SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Calcula los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -17 \\ -5x + 2y - 4z = -17 \\ 4x + y - 5z = 17 \end{cases}$

a) Método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -17 \\ -5 & 2 & -4 & -17 \\ 4 & 1 & -5 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[f3 \to 3f3 - 4f1]{f2 \to 3f2 + 5f1} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -17 \\ 0 & -4 & -7 & -136 \\ 0 & 11 & -19 & 119 \end{pmatrix} \xrightarrow[f3 \to 4f3 + 11f2]{} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -17 \\ 0 & -4 & -7 & -136 \\ 0 & 0 & -153 & -1020 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -153z = -1020 \to z = \frac{1020}{153} = \frac{20}{3} \\ -4y - 7 \cdot \left(\frac{20}{3}\right) = -136 \to -4y = \frac{-268}{3} \to y = \frac{268}{12} = \frac{67}{3} \\ 3x - 2 \cdot \frac{67}{3} + \frac{20}{3} = -17 \to 3x = 21 \to x = \frac{21}{3} = 7 \end{cases} \to \begin{cases} Solución \\ x = 7 \\ y = \frac{67}{3} \\ z = \frac{20}{3} \end{cases}$$

b) Utilizando determinantes:

Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -17 \\ -5 & 2 & -4 & -17 \\ 4 & 1 & -5 & 17 \end{pmatrix}$

Calculamos $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$ = -30-5+32-8+50+12=51 ≠0 → rg(A)=3

Tenemos rg(A)=rg(A^*)=nº Incógnitas = 3 → Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

Tiene una única solución.

Aplicamos Cramer:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -17 & -2 & 1 \\ -17 & 2 & -4 \\ 17 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{357}{51} = 7 \qquad Y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -17 & 1 \\ -5 & -17 & -4 \\ 4 & 17 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{1139}{51} = \frac{67}{3} \qquad Z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -17 \\ -5 & 2 & -17 \\ 4 & 1 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{340}{51} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{cases} Solución \\ x = 7 \\ y = \frac{67}{3} \\ z = \frac{20}{3} \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases}$

a) Método de Gauss

A* = $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f3 \to f3-5f1]{f2 \to f2-3f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & -8 & 10 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{f3 \to f3-f2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$ → Es un Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Utilizando determinantes

Las matrices del sistema son A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ y A* = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos $|A|$=$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \end{vmatrix}$= 10-18+10-30+30-2=0 → rg(A)<3

Como $|A|$ =0 y, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$= -2-6=-8≠0 → rg(A*)=2

Por otra parte calculamos el rg(A*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = -2+18+70+30-6-14≠0 → rg(A*)=3

Como rg(A)≠rg(A*) → El sistema es Incompatible, no tiene solución.

3) $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases}$

a) Método Gauss

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & 9 & -6 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[f3 \to f3-4f1]{f2 \to f2-2f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f3 \to f3-f2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Quedan dos filas y el sistema tiene tres incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible Indeterminado.

Haciendo z=λ, las infinitas soluciones son:

$$\begin{cases} z=\lambda \\ y+2z=2 \to y=2-2\lambda \\ x+2y-2z=4 \to x=4+2\lambda-4+4\lambda=6\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=6\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \forall\lambda\epsilon\mathbb{R}$$

b) Utilizando determinantes

Las matrices del sistema son A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ y A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & 9 & -6 & 18 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -6 \end{vmatrix}$ = -30-36-16+40+24+18= 0 → rg(A)<3

Como $|A|$ =0 y, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ = 5- 4=1≠0 → rg(A)=2

Por otra parte calculamos el rango de A^* rg (A^*)

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \\ 4 & 9 & 18 \end{vmatrix}$ = 90+72+80-80-72-90=0 → rg(A^*)=2

Como rg(A)= rg(A^*) < nº de incógnitas → Tenemos un sistema compatible Indeterminado (S.C.I) (tenemos

Infinitas soluciones que podemos calcular aplicando la regla de Cramer)

- Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2. Las ecuaciones que no intervienen se pasan al segundo miembro con valor de parámetro.

$\begin{cases} \boxed{x+2y} -2z=4 \\ \boxed{2x+5y} -2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases}$ → Z= λ , $\begin{cases} x+2y=4+2\lambda \\ 2x+5y=10+2\lambda \end{cases}$

- Se aplica la regla de Cramer al sistema resultante:

X=$\frac{\begin{vmatrix} 4+2\lambda & 2 \\ 10+2\lambda & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{20+10\lambda-20-4\lambda}{1}$ = 6λ   y=$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+2\lambda \\ 2 & 10+2\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}$ =2-2λ → $\begin{cases} x=6\lambda \\ y=2-2\lambda \; \forall\lambda\epsilon\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+2z=2 \\ y+2z=2 \\ 2x+2y+4z=3 \end{cases}$

a) Método de Gauss

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[f3 \leftrightarrow f1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f3 \to 2f3 - f1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 2x+2y+4z=3 \to x = \frac{-1}{2} \\ y+2z=2 \to z=\frac{5}{4} \\ -2y=1 \to y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{-1}{2} \\ z = \frac{5}{4} \end{cases}$

b) Por determinantes

Las matrices del sistema son A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y A^*= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A (Matriz de los coeficientes)

$|A|$= $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ = 4-4-4 =-4≠0 → El rango de A rg(A)=3

Como máximo el rg(A^*) puede ser tres, por lo tanto rg(A*)=3

Como rg(A)=rg(A^*)= 3 = nº de incógnitas → El sistema es Compatible Determinado (Una única solución)

Aplicamos Cramer:

X=$\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$ y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$ Z = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$

Solución: $\begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{-1}{2} \\ z = \frac{5}{4} \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=3 \\ -x+2y=5 \end{cases}$

Las matrices del sistema A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ A*=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Vemos que como máximo el rg(A) puede ser 2 y el rg(A^*)=3

Calculamos el rango de la matriz ampliada:

$|A^*|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ = 5+12+3+3+10-6≠0 → rg(A^*)=3

Como rg(A)=2 y rg(A^*)= 3 → El Sistema es Incompatible (S.I) (No tiene solución)

6) $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=3 \\ -x+2y=-4 \end{cases}$

Las matrices del sistema A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ A^*=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Vemos que como máximo el rg(A) puede ser 2 y el rg(A^*)=3

$|A^*|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ = -4+12+3+3-8-6=0 → rg(A^*)<3

Tomamos una menor de orden 2

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$= 1+2 = 3 → rg(A)=2=rg(A*)

Como el rg(A) =2= rg(A^*) = nº de Incógnitas → El Sistema es Compatible Determinado (S.C.D) → Tiene

Una única solución

Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2

$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=3 \\ -x+2y=-4 \end{cases}$ → $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

Aplicamos Cramer:

X= $\frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6}{3}$ =2 y= $\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3-6}{3}$=-1 → $\begin{cases} Solución \\ x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

SISTEMAS CON UN PARÁMETRO

7) Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ 4x - y - 5z = a \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema son:

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 & a \end{pmatrix}$

En este caso, el máximo rango que pueden tener ambas matrices es 3.

Calculamos el rango de A

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$ → rg(A)<3

Tomamos una menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$=-2+3=1≠0 → rg(A) =2

Calculamos El rango de A^*

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -14 \\ 3 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & a \end{vmatrix}$= -2a+42+16-56+3a-8 = a-6 =0 → a=6

Por tanto hay que distinguir dos casos:

Caso I : Cuando a ≠ 6

Tenemos que rg(A)≠rg(A*) ya que rg(A)=2 y rg(A*)=3 → por lo tanto el sistema es incompatible

Caso II Cuando a =6

Se cumple que rg(A)=rg(A*)=2<nº de incógnitas → Tenemos un sistema compatible Indeterminado.

Calculamos las soluciones

- Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2. Las ecuaciones que no intervienen se pasan al segundo miembro con valor de parámetro.

$$\begin{cases} \boxed{2x - y} + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ 4x - y - 5z = 6 \end{cases} \Rightarrow Z=\lambda, \begin{cases} 2x - y = -14 - 3\lambda \\ 3x - y = -4 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = 10 + 4\lambda \\ y = 34 + 11\lambda \\ z = \lambda \end{matrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

8) $\begin{cases} x+ay+z=2 \\ -x+ay-z=0 \\ ax+y+z=2a \end{cases}$

Las matrices de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema son:

A=$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A*=$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 2a \end{pmatrix}$

En este caso, el máximo rango que tener ambas matrices es 3, por lo que conviene empezar calculando el

Determinante de A y hallando para qué valores de a es distinto de 0, ya que el rg(A)=3

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = a-1-a^2-a^2+a+1=0 → -2a^2+2a =0 → a(-2a+2)=0 → a=0 y a=1

Caso I si a=0

A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A*=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rg(A), como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ≠0 y $|A|$=0 → El rg(A)=2

Calculamos el rg(A*)

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$=-2≠0 → rg(A*)=3 Como rg(A)≠rg(A*) → Sistema Incompatible

Caso II si a=1

A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A*=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos el rg(A) como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$≠0 y como $|A|$=0 → El rg(A)=2

Calculamos el rg(A*)

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$=- 2-2-2+2=0 → rg(A*)=2 → rg(A)=rg(A*)=2< nº de incógnitas → Sistema Compatible

Indeterminado (Infinitas Soluciones)

- Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2. Las ecuaciones que no intervienen se pasan al segundo miembro con valor de parámetro.

$$\begin{cases} \boxed{x+y} + z = 2 \\ \boxed{-x+y} - z = 0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{Z=}\lambda, \quad \begin{cases} x+y = 2-\lambda \\ -x+y=\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Caso III Si a≠0 y a≠1

rg(A)= rg(A*)=3 = nº de incógnitas → El sistema es Compatible Determinado (Una única solución)

x= $\frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 2a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$=$\frac{1+2a}{a}$ y= $\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ a & 2a & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$=$\frac{1}{a}$ z= $\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & a & 0 \\ a & 1 & 2a \end{vmatrix}}{|A|}$= - $\frac{a+1}{a}$

Aunque la solución depende de a, es única.

9) $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ ax+y+z=-a^2 \\ a^2x+ay+z=-a^3 \end{cases}$

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema son:

A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$ y A*=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & -a^2 \\ a^2 & a & 1 & -a^3 \end{pmatrix}$

En este caso, el máximo rango que tener ambas matrices es 3, por lo que conviene empezar calculando el Determinante de A y hallando para qué valores de a es distinto de 0, ya que el rg(A)=3

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$ = $1+a^2+a^2-a^2-a-a = a^2-2a+1=0 \rightarrow a=1$

Caso I Si a = 1

A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A*=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Vemos que ambas matrices las filas como las columnas son proporcionales entre sí, por lo tanto rg(A)=rg(A*)=1<nº de incógnitas→ Tendremos un sistema compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

Para saber el número de parámetros:
Nº parámetros = nº incógnitas – rango = 3 -1 = 2

$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x+y+z=-1 \\ x+y+z=-1 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{matrix} z=\lambda \\ y=\mu \\ x+y+z=-1 \rightarrow x=-1-\lambda-\mu \end{matrix} \quad \forall\lambda, \mu \in\mathbb{R}$

Caso II Si a≠1

En este caso rg(A)=rg(A*)=3 =nº Incógnitas → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (Una única solución)

X=$\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -a^2 & 1 & 1 \\ -a^3 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$ = -a-1 y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -a^2 & 1 \\ a^2 & -a^3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$ = a z=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & -a^2 \\ a^2 & a & -a^3 \end{vmatrix}}{|A|}$=0

Solución: $\begin{cases} x=-a-1 \\ y=a \\ z=0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ -2x+3y+4z=6 \\ (a-3)x+12y+(a+3)z=27 \end{cases}$

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema son:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ a-3 & 12 & a+3 \end{pmatrix}$ y A*= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ a-3 & 12 & a+3 & 27 \end{pmatrix}$

En este caso, el máximo rango que tener ambas matrices es 3, por lo que conviene empezar calculando el

Determinante de A y hallando para qué valores de a es distinto de 0, ya que el rg(A)=3

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ a-3 & 12 & a+3 \end{vmatrix}$ = 3a+9+24+8a-24+3a-9+4a+12-48= 18a- 36=0 → a=2

Caso I Cuando a=2

$|A|=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ y A*= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ -1 & 12 & 5 & 27 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$=3+4=7≠0 y $|A|$=0 → El rg(A) =2

Calculamos el rg(A*) → $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \\ -1 & 12 & 27 \end{vmatrix}$ = 81-120-12+15+108-72=0 → rg(A*)=2

Como rg(A)=rg(A*)< nº de incógnitas → El sistema es S.C.I (Sistema Compatible Indeterminado) , tiene

Infinitas soluciones. El número de parámetros = nº de incógnitas- rango =3-2 = 1

- Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2. Las ecuaciones que no intervienen se pasan al segundo miembro con valor de parámetro.

z= λ, $\begin{cases} x+2y=5+\lambda \\ -2x+3y=6-4\lambda \end{cases}$ → $\begin{cases} x=\frac{23+11\lambda}{7} \\ y=\frac{6-2\lambda}{7} \\ z=\lambda \end{cases}$

Caso II : Cuando a ≠2

El rg(A) = rg(A*) = nº de incógnitas → El sistema es Compatible Determinado (S.C.D) (solución única)

X= $\frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 27 & 12 & a+3 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1}{6}$ Y= $\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & 6 & 4 \\ a-3 & 27 & a+3 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{7}{3}$ z= $\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \\ a-3 & 12 & 27 \end{vmatrix}}{|A|}$ = - $\frac{1}{6}$

11) Determinar, según los valores del parámetro *a*, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+3y=1 \\ 6x-4y=a \end{cases}$$

Resolverlo para los valores de *a* que lo hacen compatible.

Las matrices de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema son:

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ A*= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & a \end{pmatrix}$

Como máximo la matriz de los coeficientes tendrá rg(A)=2 ya que las dimensiones son 3x2, y cómo

Máximo la matriz ampliada tendrá rg(A*)=3

Calculamos el determinante de la matriz ampliada y lo igualamos a 0.

$|A^*|=$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & a \end{vmatrix}$ = 3a-24-6-54+2a+4= 0 → 5a-80=0 →a=$\frac{80}{5}=16$

Caso I Cuando a= 16

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ A*= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & 16 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$=3+2=5≠0 y $|A^*|$=0 → rg(A)=rg(A*)=2= nº de incógnitas (S.C.D) (Una única solución)

Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2.

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+3y=1 \\ 6x-4y=16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Caso II: Cuando a≠16

Rg(A)=2≠rg(A*)=3 → Sistema Incompatible (S.I) → No tiene solución

12) Determinar, según los valores del parámetro *a*, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + ay = 0} \\ \boldsymbol{2x + 4y = 1} \\ \boldsymbol{x + 2y = 1/2} \end{cases}$$

a) Resolverlo para $a = 3$.

a) El sistema es lineal y tiene 3 ecuaciones con 2 incógnitas, con matriz de coeficientes y ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

El determinante de A^* es:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1/2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

por tanto, el rango de A^* siempre es menor que 3 (Podría observarse que la tercera ecuación es la mitad de la segunda).

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, se tiene que $\text{rg}(A^*) = 2$.

Para calcular el rango de A observemos que el menor $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$.

Por tanto:

- Si $a \neq 2 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 =$ nº de incógnitas. En este caso, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.
- Si $a = 2$, se tiene $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y es evidente que $\text{rg}(A) = 1$, ya que la segunda columna es el doble que la primera. Por tanto $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$, y en este caso el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

b) Según el apartado anterior, si $a = 3$, el sistema tiene solución única.

Suprimiendo la última ecuación (que es la mitad de la segunda), el sistema queda

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

Multiplicando por 2 la primera ecuación y restándole la segunda obtenemos $2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$; y, sustituyendo, $x = \frac{3}{2}$.

13) Determinar, según los valores del parámetro a, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y=1} \\ \boldsymbol{2x-4y=-a} \\ \boldsymbol{4x+10y=a^2} \end{cases}$$

a) Resolverlo para los valores de a que lo hacen compatible.

a) Se trata de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas.

Para que tenga solución única es necesario que rg(A) = rg(A*) = 2, siendo A la matriz de coeficientes y A* la matriz ampliada. Si r(A*) = 3, el sistema será incompatible.

Las matrices son: $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -a \\ 4 & 10 & a^2 \end{array}\right)$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

El determinante de A* vale:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -a \\ 4 & 10 & a^2 \end{vmatrix} = -4a^2+10a-(2a^2+4a)+20+16 = -6a^2+6a+36 = -6(a+2)(a-3)$$

Este determinante vale 0 si a = −2 o a = 3.

Por tanto:

- Si $a \neq -1$ y 3 $\Rightarrow$ rg(A*) = 3. El sistema será incompatible.
- Si a = −2 o a = 3, rg(A) = rg(A*) = 2. El sistema será compatible determinado.

b) Si a = −2 el sistema es: $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-4y=2 \\ 4x+10y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-4y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 2-2y-4y=2 \end{cases} \Rightarrow y=0;\ x=1$

Si a = 3 el sistema es: $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-4y=-3 \\ 4x+10y=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-4y=-3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 2-2y-4y=-3 \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{1}{6};\ x=\dfrac{5}{6}$

14) Consideramos las matrices M=$\begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 3 & -2b & -2c \\ 5a & -2 & c \end{pmatrix}$ y N= $\begin{pmatrix} 3c \\ a \\ -4b \end{pmatrix}$

a) Determina los valores a,b y c para que se verifique la igualdad M·$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ = N

b) Estudia el carácter del sistema de ecuaciones lineales M·$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$=N cuando a=0, b=-1 y c=2

a) $\begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 3 & -2b & -2c \\ 5a & -2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c \\ a \\ -4b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ a + 4b + 6c = 3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases}$

A*=$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[f3 \to 5f1 - 2f3]{f2 \to 2f2 - f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 15 & 9 \\ 0 & 2 & -21 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{f3 \to 3f3 - f2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 15 & 9 \\ 0 & 0 & -78 & -78 \end{array}\right) \rightarrow$

$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -3 \rightarrow 2x = -3 + 3 + 2 \rightarrow x = 1 \\ 6y + 15z = 9 \rightarrow 6y = 9 - 15 \rightarrow y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -y + z = 6 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 0 \\ -y + z = 6 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases}$

A*= $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f3 \to f3 - 2f2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$ → El sistema es Incompatible (S.I) No tiene Solución.

15) Calcula los valores del parámetro k para los cuales la matriz A tiene inversa.

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & k \end{pmatrix}$

a) Analiza el rango de A según los valores del parámetro k.

b) Tomando como referencia exclusivamente los resultados obtenidos en el apartado a), ¿se puede determinar algún valor de k para el cual el sistema tiene solución? En caso afirmativo, indica si la solución es única o no, y resuelve el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = -1 \\ -2x + 3y = k \end{cases}$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero.

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & k \end{vmatrix}$= 4k+27+4+24-6k+3=0 → -2k +58=0 → k=29

Sólo existirá matriz inversa si k≠29

a) **Caso I:** Cuando k= 29

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = 4-6 = -2≠0 y como $|A|$=0 → rg(A)=2

Caso II: Cuando k ≠ 29

$|A|$≠ 0 → rg(A)=3

b) Las matrices de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema son:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y A* =$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & k \end{pmatrix}$ Como máximo el rg(A)=2 y rg(A*)=3

Caso I: Cuando k= 29

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = 4-6 = -2≠0 y como $|A^*|$=0 → rg(A)=rg(A*)=2 = nº de incógnitas → Sistema Compatible Determinado (Una única solución)

Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = -1 \\ -2x + 3y = k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 5 \end{cases}$$

Caso II: Cuando k ≠ 29

$|A^*|$≠ 0 →rg(A*)=3 ≠ rg(A)=2 → Sistema Incompatible (no tiene solución)

16) Estudia el siguiente sistema según los valores del parámetro a y resuélvelo en los casos en que sea posible.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 - 2a + 2 \end{cases}$$

Las matrices de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema son:

$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2-2a+2 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ = a^3+1+1-a-a-a= a^3-3a+2=0 → $\begin{cases} a = -2 \\ a = 1\ (doble) \end{cases}$

- **Caso I** Cuando a=-2

Calculamos el rg(A)

Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$=4-1=3≠0 y $|A|$=0 → rg(A)=2

Calculamos el rg(A*)

$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix}$= 40+1-2+2-10-4≠0 → rg(A*)=3

Como rg(A)≠rg(A*) S:I (No tiene solución)

- **Caso II** Cuando a=1

Calculamos el rg(A)

Como $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* =\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Las filas son proporcionales por lo que rg(A)=1=rg(A*)<nºde incógnitas → El sistema es Compatible Indeterminado (S.C.I)

Nº de parámetros= nº de incógnitas- rango =3-1=2

$$\begin{cases} x = 1 - \mu - \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

- **Caso III** Cuando a≠1 y a≠-2

Tenemos que rg(A)=rg(A*)=3=nº de incógnitas → Sistema Compatible Determinado (una única solución)

$$X=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2-2a+2 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2+a+a^2-2a+2-a^3+2a^2-2a-a^2-1}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{-a^3+3a^2-3a+1}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{-(a-1)^3}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{1-a}{a+2}$$

$$Y=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2a+2 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^3+a^2-2a+2+1-a-a-a^3+2a^2-2a}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{3a^2-6a+3}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{3\cdot(a-1)^2}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{3}{a+2}$$

$$Z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2-2a+2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^4-2a^3+2a^2+1+a-a-a^2+2a-2-a^2}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a^4-2a^3+2a-1}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{(a-1)^3(a+1)}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a^2-1}{a+2}$$

PROBLEMAS

17) Un aficionado a los pájaros tiene un total de 30, entre canarios, periquitos y jilgueros. Tiene el doble que de canarios:

a) Con estos datos ¿se puede saber el número de canarios que tiene?
b) Si además, se sabe que tiene el triple de canarios que de periquitos, ¿cuántos pájaros de cada tipo tiene?

$$\begin{cases} n^{o}\ de\ canarios: x \\ n^{o}\ de\ periquitos: y \\ n^{o}\ de\ jilgueros: z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=30 \\ z=2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=30 \\ 2x-z=0 \end{cases}$$

a) Nos encontramos con un sistema que tiene dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo tanto el sistema será Compatible Indeterminado. No podremos saber el número de canarios con sólo estos datos.

b) $\begin{cases} x+y+z=30 \\ 2x-z=0 \\ x=3y \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x+y+z=30 \\ 2x-z=0 \\ x-3y=0 \end{matrix}$

1ª Opción : Gauss

A*=$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f3 \to f3 - f1]{f2 \to f2 - 2f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -60 \\ 0 & -4 & -1 & -30 \end{array}\right) \xrightarrow{f3 \to f3 - 2f2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -60 \\ 0 & 0 & 5 & 90 \end{array}\right) \rightarrow$

$\begin{cases} x=9 \\ y=3 \\ z=18 \end{cases}$ Por lo tanto tendremos 9 canarios, 3 periquitos y 18 jilgueros.

2ª Opción: Cramer

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ = -6-1-3= -10≠0

X= $\dfrac{\begin{vmatrix} 30 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-90}{-10} = 9$ y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 30 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-30}{-10} = 3$ z=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 30 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-180}{-10} = 18$

Por lo tanto tendremos 9 canarios, 3 periquitos y 18 jilgueros.

18) En una reunión hay 60 personas entre altas, medias y bajas. Se sabe que entre las bajas y las medianas duplican el número de altas. También se sabe que las altas y el doble de las medianas son el doble de las bajas. ¿Cuál es el número de personas altas, medianas y bajas? Justica la respuesta

$\begin{cases} n^{\underline{o}}\ de\ personas\ altas: x \\ n^{\underline{o}}\ de\ personas\ medianas: y \\ n^{\underline{o}}\ de\ personas\ pequeñas: z \end{cases}$ Planteamiento → $\begin{cases} x+y+z=60 \\ y+z=2x \\ x+2y=2z \end{cases}$

1ª Forma: Gauss

A*=$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f3 \to f3 - f1]{f2 \to f2 - 2f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -3 & -3 & -120 \\ 0 & 1 & -3 & -60 \end{array}\right) \xrightarrow{f3 \to 3f3 + f2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -3 & -3 & -120 \\ 0 & 0 & -12 & -300 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x=20 \\ y=15 \\ z=25 \end{cases}$ → Por tanto habrá 20 personas altas, 15 personas medianas y 25 de personas pequeñas

2ª Formas: Cramer

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ = 2+4-1+1+4+2= 12≠0

X = $\frac{\begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{120+120}{12} = 20$ y== $\frac{\begin{vmatrix} 1 & 60 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-60+240}{12} = 15$ z== $\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{240+60}{12} = 25$

Por tanto habrá 20 personas altas, 15 personas medianas y 25 de personas pequeñas

19) En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos:

- Sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros.
- Con defecto no apreciable, con una rebaja del 20% sobre el precio de los anteriores.
- Con defecto apreciable, con una rebaja del 60% sobre el precio de los que no tienen defecto.

Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40% de los que no lo tienen. ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

x: pantalones sin defecto

y: con defecto no apreciable

z: con defecto apreciable

$$\begin{cases} x+y+z=70 \\ 20x+20\cdot\frac{80}{100}\cdot y+20\cdot\frac{40}{100}\cdot z=1280 \\ y+z=\frac{40}{100}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=70 \\ 5x+4y+2z=320 \\ 2x-5y-5z=0 \end{cases}$$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 5 & 4 & 2 & 320 \\ 2 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f3=f3-2f1]{f2=f2-5f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \\ 0 & -7 & -7 & -140 \end{array}\right) \xrightarrow{f3=f3-7f2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \\ 0 & 0 & 14 & 70 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x=50 \\ y=15 \\ z=5 \end{cases}$ → Hay 50 sin defecto, 15 con defecto no apreciable y 5 con defecto apreciable.

20) En una papelería entran tres clientes: el primero compra cuatro lapiceros y seis gomas de borrar y paga 1,60 euros; el segundo compra cinco lapiceros y tres bolígrafos y paga 2,45 euros, y el tercero paga 1,30 euros por cinco gomas de borrar y dos bolígrafos.

a) Averigua el precio de cada uno de los productos.

b) ¿Cuánto deberá pagar otro cliente por cinco lapiceros, cinco gomas de borrar y diez bolígrafos?

x: precio de cada lapicero

y: precio de cada goma de borrar

z: precio de cada bolígrafo

$$\begin{cases} 4x+6y=1{,}6 \\ 5x+3z=2{,}45 \\ 5y+2z=1{,}3 \end{cases} \quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 0 & 1{,}6 \\ 5 & 0 & 3 & 2{,}45 \\ 0 & 5 & 2 & 1{,}3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0{,}8 \\ 5 & 0 & 3 & 2{,}45 \\ 0 & 5 & 2 & 1{,}3 \end{array}\right) \xrightarrow{f2=2f2-5f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & -15 & 6 & 0{,}9 \\ 0 & 5 & 2 & 1{,}3 \end{array}\right) \xrightarrow{f3=3f3+f2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & -15 & 6 & 0{,}9 \\ 0 & 0 & 12 & 4{,}8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x=0{,}25 \\ y=0{,}1 \\ z=0{,}4 \end{cases}$$

Cada lapicero cuesta 0,25€

Cada goma de borrar cuesta 0,10€

Cada bolígrafo cuesta 0,40€

b)El nuevo cliente deberá pagar 5·0,25+5·0,10+10·0,40= 5,75€

21) En una población se han presentado dos partidos políticos A y B, a las elecciones municipales y se han contabilizado 6464 votos. Si 655 votantes del partido A hubiesen votado a B, ambos partidos habrían empatado a votos. La suma de votos no válidos y en blanco supone el 1% de los que han votado a A o a B. Halla el número de votos obtenidos por cada partido y el número de votos en blanco.

x: nº de votos al partido A

y: nº de votos al partido B

z: nº de votos en blanco

$$\begin{cases} x+y+z=6464 \\ x-655=y+655 \\ z=\frac{1}{100}(x+y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=6464 \\ x-y=1310 \\ x+y-100z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3855 \\ y=2545 \\ z=64 \end{cases}$$

El partido A ha obtenido 3855 votos , el partido B 2545 votos y el número de votos en blanco 64

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

$22)\ a)\begin{cases}3x+3y+4z=0\\-2x+y-z=0\\2x+y+z=0\end{cases}$

$\begin{vmatrix}3 & 3 & 4\\-2 & 1 & -1\\2 & 1 & 1\end{vmatrix}$ =3-8-6-8+6+3=-10 → S.C.D Una única solución que es la trivial: x=0 , y=0 y z=0

$b)\ \begin{cases}x-2y+z=0\\-x+2y-3z=0\\-x+2y-5z=0\end{cases}$

$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\-1 & 2 & -3\\-1 & 2 & -5\end{vmatrix}$= -10-2-6+2+10+6=0 → S.C.I (infinitas soluciones)

A*=$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\-1 & 2 & -3 & 0\\-1 & 2 & -5 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[f3\to f3+f1]{f2\to f2+f1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & -2 & 0\\0 & 0 & -4 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{f3\to f3-2f2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ →

$\begin{cases}x=2\lambda\\y=\lambda\\z=0\end{cases}\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

c) $\begin{cases}x+y+z=0\\2x+2y+2z=0\\3x+3y+3z=0\end{cases}$ El sistema es equivalente a $\{x+y+z=0$ → S.C.I

Sus infinitas soluciones se deben escribir con la ayuda de dos parámetros

$\begin{cases}x=-\mu-\lambda\\y=\mu\\z=\lambda\end{cases}\quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

d) $\begin{cases}-x-2y+3z=0\\2x+4y-6z=0\end{cases}$ → El sistema es equivalente a $\{x+2y-3z=0\to$ S.C.I. Sus infinitas soluciones se deben escribir con la ayuda de dos parámetros:

$\begin{cases}x=-2\lambda+3\mu\\y=\lambda\\z=\mu\end{cases}\quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

e) $\begin{cases}2x+y-z=0\\2x-y+z=0\end{cases}$ → El sistema es S.C.I. Sus infinitas soluciones son:

$\begin{cases}x=0\\y=\lambda\ \forall\lambda\in\mathbb{R}\\z=\lambda\end{cases}$

f) $\begin{cases}3x+2y=0\\-x+4y=0\\-2x-3y=0\end{cases}$ A=$\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 4\\-2 & -3\end{pmatrix}$ rg(A)=2 . El S.C.D . Su única solución es la trivial x=0 y y=0