1) Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ = 4·1·(-1)+1·0·3+(-2) ·0·2 – [2·1·3+1·(-2) ·(-1)+4·0·0]=

-4+0+0-[6+2+0] = -4-6-2= -12

b) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$ = $(1-x)^3$+1·0·1+1·0·1-[1·1·(1-x)+1·1·(1-x)+0·0·(1-x)] =

= $-x^3+3x^2-3x+1+0+0$ – [1-x+1-x+0] = $-x^3+3x^2-3x+1-1+x-1+x$ = $-x^3+3x^2-x-1$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ = 0·1·0+1·3·(-1)+2·2·(-2)-[(-1) ·1·(-2)+2·1·0+2·3·0] =

= 0 – 3 – 8 – 2 + 0 + 0 = -13

2) Calcula el valor de x para que el determinante sea igual a 0.

$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3x+2+3x^2-2x^2-3x-3 = 0 \rightarrow x^2-1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

3) Calcula el valor de t para que el determinado sea igual a 0.

$\begin{vmatrix} 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \\ t & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \\ t & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 4t + 0 + t^3 - 0 - 2t - 4t = 0 \rightarrow t^3 - 2t = 0 \rightarrow t(t^2-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} Soluciones \\ t = 0 \\ t = +\sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$

4) Indica si son ciertas las siguientes igualdades.

a) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a/2} & \boldsymbol{b/2} \\ \boldsymbol{2x} & \boldsymbol{2y} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{5x} & \boldsymbol{5a} \\ \boldsymbol{5y} & \boldsymbol{5b} \end{vmatrix} = \mathbf{5} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a/2 & b/2 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}$ → ay – xb = $\frac{a}{2}$ · 2y - $\frac{b}{2}$ ·2x = ay –xb → La igualdad se cumple

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5a \\ 5y & 5b \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$ → 5x·5b – 5a·5y = 25xb-25ay≠ 5·[xb –ay] = 5xb – 5ay

5) Los elementos de la matriz cuadrada de orden 4. A= (a_{ij}) son : $\begin{cases} \mathbf{1} \quad \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{i = j = 1} \\ \mathbf{0} \quad \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{i = j \neq 1} \\ \mathbf{-1} \quad \boldsymbol{si\ i \neq j} \end{cases}$

a) Escribe la matriz.

b) Calcula el determinante de la matriz.

a) A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $|A|$ = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ = -5

6) Calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ = $c1 = c1 + c2 + c3 + c4$ $\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ Aplico la propiedad 6 = 10· $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$\begin{matrix} f2 = f2 - f1 \\ f3 = f3 - f1 \\ f4 = f4 - f1 \end{matrix}$ = 10· $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ = 10 · $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ = 160

7) **Resuelve la siguiente ecuación :** $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$ **= 80x – 96**

$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{matrix} Aplico\ propiedad\ 4 \\ c1 = c1 + c2 + c3 + c4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 6+x & 1 & 2 & 3 \\ 6+x & x & 1 & 2 \\ 6+x & 3 & x & 1 \\ 6+x & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$ = aplico la propiedad 6 en la columna 1

$(6+x)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{matrix} f2 = f2 - f1 \\ f3 = f3 - f1 \\ f4 = f4 - f1 \end{matrix}\ (6+x)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & x-2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} =$

(6+x)·$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 2 & x-2 & -2 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix}$ = x^4-20x^2+80x-96 = 80x-96 → x^4-20x^2=0 →x^2· (x^2-20)=0

$x = 0$
→ $x = \sqrt{20}$
$x = -\sqrt{20}$

Propiedades de los Determinantes

8) **Si A y B son dos matrices 2X2, tales que $|A|$ =2 y $|B|$ = -3, calcula:**
$|AB|$ $|A^2|$ $|3A|$ $|-A|$ $|A^t|$ $|A^{-1}|$

- $|AB|$ → Aplico la propiedad 8 del libro → $|AB|$ = $|A|\cdot|B|$ = 2· (-3) = - 6
- $|A^2|$ = $|A \cdot A|$ → Aplico la propiedad 8 → $|A \cdot A|$ = $|A|\cdot|A|$ = 2 · 2 = 4
- $|3A|$ → Aplico la propiedad $|\alpha \cdot A|$ = α^n ·$|A|$ siendo "n" el orden de la matriz A

  $|3A|$ = 3^2 ·$|A|$ = 9·2= 18
- $|-A|$ = $|(-1)\cdot A|$ → Aplico la propiedad anterior = $(-1)^2$· $|A|$
- $|A^t|$ → Aplico la propiedad 7 → $|A^t|$ = $|A|$ = 2
- $|A^{-1}|$ Para hallar la inversa tenemos en cuenta que $A\cdot A^{-1}$=I y que existe la inversa (A^{-1}) , debido a que el determinante de A es distinto de cero $|A|$ = 2 ≠0

  $|A \cdot A^{-1}|$ = $|I|$ → Aplico la propiedad 8 → $|A|\cdot|A^{-1}|$ =1 → $|A^{-1}|$ = $\frac{1}{|A|}$ =$\frac{1}{2}$

9) Sabiendo que $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$ = 3 , calcula el valor de los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} x & y \\ a-x & b-y \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ a & b \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} x & y \\ a-x & b-y \end{vmatrix}$ → Aplico la propiedad 4 del libro $f_2 \to f_1 + f_2$ $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$ = 3

b) $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}$ → Aplico la propiedad 5 $f_1 \leftrightarrow f_2$ $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}$ = - $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$ = -3

c) $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ a & b \end{vmatrix}$ → Aplico la propiedad 6 → $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ a & b \end{vmatrix}$ = 5· $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$ = 5·3 = 15

d) $\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$ → si os dais cuenta es la matriz traspuesta de A. Aplico la propiedad 7.

$|A| = |A^t|$ → $\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$ = 3

10) Sabiendo que $\begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b+c} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a+c} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a+b} \end{vmatrix}$. Demuestra sin desarrollar (aplicando las propiedades) que el determinante vale cero.

$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow[C3 = C2 + C3]{} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$ → Aplico la propiedad número 6

(a+b+c)· $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$ → Según la propiedad 2, como la columna 1 y la columna 3 son iguales determinamos que ese determinante es cero.

11) Sabiendo que A= $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix}$ = 5 , calcula: B= $\begin{vmatrix} \boldsymbol{3a} & \boldsymbol{3b} & \boldsymbol{3c} \\ \boldsymbol{5/2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{2} \end{vmatrix}$

B= $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 5/2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ → Aplico la propiedad 6 en la fila 1 y la fila 3

= 3·2· $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ → Aplico la propiedad 6 en la fila 2

=3·2·$\frac{1}{2}$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = $\frac{6}{2}$ · $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 3·5 =15

12) Calcula el siguiente determinante aplicando sus propiedades

A= $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[c1=c1+c2+c3+c4]{Aplico\ la\ propiedad\ 4} \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ → Aplico la propiedad 6 en la columna 1

(a+3)· $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ **=** $\begin{matrix} f2=f2-f1 \\ ------> \\ f3=f3-f1 \\ f4=f4-f1 \end{matrix}$ (a+3)· $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$ → Según la propiedad 10 el determinante de

una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

(a+3)· $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$ **=**(a+3) **[**1·(a-1)·(a-1)·(a-1)] = (a+3)·$(a-1)^3$

13) Sabiendo que $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{t} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$ **= 5, calcula el valor de** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x+1} & \boldsymbol{y+1} & \boldsymbol{x+y} \\ \boldsymbol{u+2} & \boldsymbol{v+2} & \boldsymbol{u+v} \\ \boldsymbol{s+3} & \boldsymbol{t+3} & \boldsymbol{s+t} \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & x+y \\ u+2 & v+2 & u+v \\ s+3 & t+3 & s+t \end{vmatrix}$ = $C_3 = C_3 - C_1 - C_2$ $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & -2 \\ u+2 & v+2 & -4 \\ s+3 & t+3 & -6 \end{vmatrix}$ Aplico la propiedad 6

-2· $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & 1 \\ u+2 & v+2 & 2 \\ s+3 & t+3 & 3 \end{vmatrix}$ = $\begin{matrix} c1=c1-c3 \\ c2=c2-c3 \end{matrix}$ -2· $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ u & v & 2 \\ s & t & 3 \end{vmatrix}$ = -2·5 = - 10

14) Sabiendo que el determinante A= $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix}$ **=20 calcula B=** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{2a} & \boldsymbol{2c} & \boldsymbol{2b} \\ \boldsymbol{2g} & \boldsymbol{2i} & \boldsymbol{2h} \\ \boldsymbol{2d} & \boldsymbol{2f} & \boldsymbol{2e} \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 3g & 3i & 3h \\ 2d & 2f & 2e \end{vmatrix}$ → Aplico la propiedad 6 = 2·3·2· $\begin{vmatrix} a & c & b \\ g & i & h \\ d & f & e \end{vmatrix}$ → Aplico la propiedad 5 $C_2 \leftrightarrow C_3$

-2·3·2· $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$ → Aplico la propiedad 5 $F_2 \leftrightarrow F_3$ $_{(-1)(-1)}$ 2·3·2· $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$ =

2 · 3 · 2 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = 12·20 = 240

Desarrollo de un determinante por una fila o columna

15) Determina el valor de los siguientes determinantes:

a) $$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&\end{vmatrix} \begin{matrix} f2->f2-2f1\\ f3->f3-3f1\\ ------->\\ f4->f4-4f1\end{matrix} \begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-7\\0&-2&-8&-10\\0&-7&-10&-13\end{vmatrix} \rightarrow 1\cdot\begin{vmatrix}-1&-2&-7\\-2&-8&-10\\-7&-10&-13\end{vmatrix} =$$

1· [-104-140-140+392+52+100] = 160

b) $$\begin{vmatrix}1&2&2&3\\0&3&4&1\\-1&2&2&5\\2&-2&1&-3\end{vmatrix} \begin{matrix} f3\to f3+f1\\ ----\to\\ f4\to f4-2f1\end{matrix} \begin{vmatrix}1&2&2&3\\0&3&4&1\\0&4&4&8\\0&-6&-3&-9\end{vmatrix} \rightarrow 1\cdot\begin{vmatrix}3&4&1\\4&4&8\\-6&-3&-9\end{vmatrix} =$$

1· [-108-12-192+24+144+72] = - 72

c) $$\begin{vmatrix}2&3&2&4\\0&1&2&3\\2&2&-1&1\\3&-3&-2&3\end{vmatrix} \begin{matrix} c3\to c3-2c2\\ ------\to\\ c4\to c4-3c2\end{matrix} \begin{vmatrix}2&3&-4&-5\\0&1&0&0\\2&2&-5&-5\\3&-3&4&12\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}2&-4&-5\\2&-5&-5\\3&4&12\end{vmatrix} =$$

1·[-120-40+60-75+96+40] = -39

d) $$\begin{vmatrix}3&-5&2&2\\4&7&8&27\\1&5&3&12\\5&1&0&6\end{vmatrix} = \begin{matrix} c1\to c1-5c2\\ ------\to\\ c4\to c4-6c2\end{matrix} \begin{vmatrix}28&-5&2&32\\-31&7&8&-15\\-24&5&3&-18\\0&1&0&0\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}28&2&32\\-31&8&-15\\-24&3&-18\end{vmatrix} =$$

= 1·[-4032 – 2976+720+6144-1116+1260] = 0

16) Calcula el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} f2->f2-2f1 \\ f3->f3-f1 \\ ------> \\ f4->f4-3f1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} =$

= 1·[30+8-14-24] = 0

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} f2->f2-2f1 \\ f3->f3-3f1 \\ ---------> \\ f4->f4-2f1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$

= 1·[12-9+6-27]= -18

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} c3 \to c3 + c1 \\ ----\to \\ c4 \to c4 - 2c1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \end{vmatrix} =$

= 1·[-48-96-48+96+64+36]= 4

d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} f2 \to f2 + 2f1 \\ -----\to \\ f4 \to f4 + 7f1 \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 0 & 13 & 23 & -9 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -5 & 10 & 4 \\ 13 & 23 & -9 \end{vmatrix}$

= (-1)·[-360-115+260-130-225-368] = 938

Rango de una matriz

17) Halla el rango de las siguientes:

a) A= $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ b) B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) C= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Es una matriz con 4 filas y tres columnas, el determinante sólo puede ser de 3x3. Como máximo el rango podría ser 3.
Tomamos un menor 2x2 y hallamos su determinante:

- Si nos diese distinto de cero el rango es como mínimo dos.
- Si nos diese cero, probamos con otros menores 2x2, hasta encontrar uno que sea ≠ 0. Si no existiera ninguno que fuese distinto de cero el rango sería 1. A no ser que tuviésemos una matriz nula que en ese caso el rango sería 0 → rg(A)=0

$\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ = -10≠0 → rg(A)≥ 2 → Las filas 1 y 2 son linealmente independientes.

Tomamos un menor de orden 3 : $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ = 5+20-15 =10≠0 →rg(A)≥ 3

Como la dimensión de la matriz es 4x3 , el determinante sólo puede ser 3x3 por lo tanto → **El rg(A)=3**

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f2->f2-6f1 \\ f3->f3-3f1 \\ ------> \\ f4->f4-4f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -8 \\ 0 & -15 & -5 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f4 \to f2 - f4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -8 \\ 0 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el rg(A)=3

b) **rg(B)= 3**
c) **rg(C) = 4**

18) Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) A= $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -10 & 8 & 6 & -8 \end{pmatrix}$ b) B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

a) Es una matriz con 4 filas y 4 columnas, el determinante puede ser 4x4. Como máximo el rango podría ser 4.

Tomamos un menor 2x2 y hallamos su determinante:

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$ = 4-10 = -6 ≠ 0 → rg(A)≥ 2

Tomamos un menor de orden 3:

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ -10 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \\ -10 & 8 & -8 \end{vmatrix} = 0$

Como todos los determinantes son igual a cero, el rg(A)= 2

Hemos comprobado que estas filas no son linealmente dependientes. De hecho:
$F_{4=}$ -2F_2 y F_2= 2·F_3-F_1

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -10 & 8 & 6 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} f2->f2+5f1 \\ f3->f3+2f1 \\ --------> \\ f4->f4-10f1 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & -12 & -24 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 12 & 4 \\ 0 & -12 & -24 & -8 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c} f3 \to f3 - 2f1 \\ ----\to \\ f4 \to f4 + 4f2 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Por lo que rg(A)=2 ya que la tercera y cuarta fila tiene todos sus valores nulos.

b) Es una matriz con 3 filas y 4 columnas, el determinante sólo puede ser 3x3. Como máximo el rango podría ser 3.

Tomamos un menor 2x2 y hallamos su determinante:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ = 0+2=2 ≠0 → rg(B)≥ 2

Tomamos un menor de orden 3:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ =0 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix}$ = 0

Como todos los determinantes son igual a cero → rg(B)= 2

Hemos comprobado también que estas filas no son linealmente independientes.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[f3 \to f3 - 3f1]{f2 \to f1 + f2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -10 & -10 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{f3 \to f3 + 5f2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Por lo tanto el rg(B) =2 ya que la tercera fila todos los valores son nulos.

Rango con parámetros

19) Estudia, según los valores del parámetro a, el rango de las siguientes matrices.

a) A= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{a} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$ **b=** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$ **c=** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{-a} & \boldsymbol{a}-\mathbf{4} \end{pmatrix}$ **d=** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2}\boldsymbol{a} & \mathbf{2}\boldsymbol{a} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \boldsymbol{a}+\mathbf{2} \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{vmatrix}$ = -10-6a+6-8-15-3a = -27-9a → -27-9a=0 → a=-3

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ = 2+ 3 = 5≠ 0

- Si a=-3 → rg(A)=2
- Si a≠ -3 → rg(A)=3

b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & a \\ a & 6 & 9 \end{vmatrix}$ = 36+12a+ 2a^2 -4a^2-36-6a = -2a^2 +6a → -2a^2 +6a=0→ a(-2a+6)=0

a=0 y a= 3

- Si a=0 → B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ → rg(B)=2 , ya que $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$=12≠0
- Si a=3 → B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ → rg(B)=2 , ya que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$=-6≠0
- Si a≠0 y a≠-3 → rg(B)=3

c) $|C|$ = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -a & a-4 \end{vmatrix}$ = a^2-4a-a+4-a-2a+8+2a= a^2-6a+12 =0 → a= $\frac{6\pm\sqrt{36-48}}{2}$ → No existe ningún valor real de a que anule el determinante de C → rg(C)=3 en todos los casos.

d) $|D|$ = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2a & 2a \\ 3 & 3 & a+2 \end{vmatrix}$ = $2a^2$+4a+6a+6a-$6a^2$-2a-4-6a= -$4a^2$+8a-4 = 0 → a=1

- Si a=1 → D=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ → rg(D)=1, ya que las tres filas son proporcionales.
- Si a≠1 → rg(D)=3

20) Estudia, según los valores de m, el rango de la siguiente matriz A = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \boldsymbol{2m} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{-2m} \end{pmatrix}$

- Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

  $|A|$ = $\begin{vmatrix} m & 1 & -2 \\ 2m & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2m \end{vmatrix}$ = -$4m^2$ -4m -4 +4 + $4m^2$ +4m = 0 en todos los casos. Por lo tanto rg(A)≤ 2

  Como F_1= 2·F_2 → rg(A) = rg $\begin{pmatrix} m & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2m \end{pmatrix}$

  Si m=1 → rg(A) = rg$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ = 1

  Si m≠1 → rg(A) = 2

21) Estudia, según los valores de t, el rango de la matriz A= $\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{t} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

- Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

  $|A|$ = $\begin{vmatrix} t & -1 & 3 \\ 1 & t & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ = $2t^2$+6+4-12t+2+2t = $2t^2$-10t +12 =0

  $2t^2$-10t +12 =0 → $\begin{cases} t=2 \\ t=3 \end{cases}$

- Si t≠ 2 y t≠3 →$|A|$ =0 → rg(A)=3

- Si t=2

A= $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ → rg(A)=2 ya que $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ ≠0 y $|A|$ =0

- Si t=3

A= $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ → rg(A)=2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ =2-12=-10 ≠0 y $|A|$ =0

MATRIZ INVERSA

22) Calcula, si es posible, la inversa de la matriz : A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1+a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1+a} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$ **para los casos en los que a=2 y a=0**

- a=2 → A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Calculamos el determinante $|A|$ = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 6+3+1-1-2-9=-2 ≠0

  Por lo tanto existe la matriz inversa A^{-1}. La calculamos:

  Calculamos los adjuntos:

  A_{11}= -1 A_{12}=-1 A_{13}=2

  A_{21}=1 A_{22}=5 A_{23}=-8

  A_{31}=0 A_{32}=-2 A_{33}=2

  Adj(A)= $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ → $(Adj(A))^t$ = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ →

  A^{-1} = $\frac{1}{|A|}\cdot(Adj(A))^t$ = $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

- Para a =0 → A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Como las dos filas son iguales $|A|$ =0. Por tanto no existe A^{-1}

23) Calcula para qué valores de t existe la inversa de la matriz A= $\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{t} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{t} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

b) Calcular A^{-1} para t =0

a) La condición necesaria y suficiente para que exista la matriz inversa (A^{-1}) es que $|A| \neq 0$

Calculamos el determinante de A → $|A| = \begin{vmatrix} t & -1 & 2 \\ 2 & t & -1 \\ -1 & t & 2 \end{vmatrix} = 2t^2+4t-1+2t+4+t^2 =$

$3t^2+6t+3=0$ → t = -1

- Por lo tanto para que exista matriz inversa A^{-1}, t tiene que ser distinto de -1 ($t\neq-1$)

b) Si t =0, la matriz A nos queda de la siguiente manera A=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante para demostrar que existe matriz inversa.

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0+0-1+0+4+0=3\neq0$ → Por lo tanto habrá matriz inversa.

- Calculamos los adjuntos:

$A_{11} = 0$ $A_{12} = -3$ $A_{13} = 0$

$A_{21} = 2$ $A_{22} = 2$ $A_{23} = 1$

$A_{31} = 1$ $A_{32} = 4$ $A_{33} = 2$

Adj (A) = $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ → $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ →

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ -1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

24) Calcula los valores de a para los que existe la matriz inversa de B= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

b)Calcula A^{-1} para a =0

a) La condición necesaria y suficiente para que exista la matriz inversa (A^{-1}) es que $|A| \neq 0$

Calculamos el determinante de B → $|B|$ = $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = $1+1-2a^2+2-a-a= -2a^2-2a+4=0$ →

$\begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

La matriz inversa A^{-1} existe si a≠1 y a≠-2.

b) Calculamos A^{-1} para a=0, así que sustituimos a por 0 en la matriz B.

B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante para demostrar que existe matriz inversa.

$|B|$= $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 1+1+0+2+0+0 = 4 ≠0 Vamos a tener matriz inversa.

- Calculamos los adjuntos:

B_{11}= 1 B_{12}= -1 B_{13}= 3

B_{21}= 1 B_{22}=3 B_{23}=-1

B_{31}= -1 B_{32}= 1 B_{33}= 1

Adj(B) = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ → $(\mathrm{Adj(B)})^t$ = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

A^{-1} = $\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj(B)})^t$ = $\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$