OPERACIONES CON MATRICES

1) Dadas las matrices

A= $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **B=** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ **C=** $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(A+B)\cdot C^t$ **b) Comprueba que $(A+B)\cdot C^t = AC^t+BC^t$**

a) $(A+B)\cdot C^t = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & -3 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$

b) $AC^t+BC^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & -3 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo tanto demostramos que la igualdad se cumple.

2) Dadas las matrices:

M= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **N=** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula M^2-N^2
b) Calcula $(M+N)\cdot(M-N)$

a) $M^2-N^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & -1 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $(M+N)\cdot(M-N) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -9 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

3) Dada la matriz A=$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, comprueba que A^2=2A – I . Además calcula A^4

A^2=$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

2A-I=2$\cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

Observamos que la igualdad se cumple.

Calculamos ahora A^4, sabiendo que A^2=2A – I

A^4= $(A^2)^2 = (2A-I)^2$= 4A ^{2} + I^2 -4A = 4·(2A-I) + I^2 -4A = 8A – 4I +I^2 -4A = 8A – 4I +I -4A = 4A-3I

A^4= 4A-3I = 4$\cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

4) Tenemos la matriz A=$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde a,b y c son tres números reales.

a) Encuentra A^n para todo natural n.

b) Calcula $(A^{35}-A)^2$

A^2=$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A^3= A^2·A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Observamos entonces que A^3= 0 , por lo tanto A^n=0 si n $\geq$ 3

b) Nos piden que resolvamos $(A^{35}-A)^2 = (0-A)^2 = (-A)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1}, B^{-1}, $(2A)^{-1}$ y $\left(\frac{1}{3}B\right)^{-1}$

b) Comprueba que $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$

c) Comprueba que $\left(\frac{1}{3}B\right)^{-1} = 3B^{-1}$

d) Comprueba que $\left[(2A)\cdot\left(\frac{1}{3}B\right)\right]^{-1} = \frac{3}{2}B^{-1}A^{-1}$

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ $(2A)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/10 & 1/10 \\ 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$

$\left(\frac{1}{3}B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 9/2 & 3 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$

$\begin{pmatrix} -3/10 & 1/10 \\ 1/5 & 1/10 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/10 & 1/10 \\ 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$

Por lo tanto esta igualdad se cumple.

c) $\left(\frac{1}{3}B\right)^{-1} = 3B^{-1}$

$\begin{pmatrix} 9/2 & 3 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 & 3 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo tanto esta igualdad se cumple.

d) $\left[(2A)\cdot\left(\frac{1}{3}B\right)\right]^{-1} = \frac{3}{2}B^{-1}A^{-1}$

$(2A)\cdot\left(\frac{1}{3}B\right) = 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2/3 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 10/3 \\ 2 & 10/3 \end{pmatrix}$

$\left[(2A)\cdot\left(\frac{1}{3}B\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 3/4 \\ 9/20 & -3/20 \end{pmatrix}$

$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/10 & -1/10 \end{pmatrix}$

$\frac{3}{2}B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 3/4 \\ 9/20 & -3/20 \end{pmatrix}$

$\left[(2A)\cdot\left(\frac{1}{3}B\right)\right]^{-1} = \frac{3}{2}B^{-1}A^{-1}$ → Por lo tanto comprobamos que la igualdad se cumple.

6) Dadas las matrices :

A= $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{6} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ **B=** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} & \boldsymbol{t+1} & \boldsymbol{t+2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

a) **Calcula el valor de t para que el producto AB dé como resultado la matriz nula.**
b) **Para el valor de t hallado, calcula el resultado de BA+BAB+BAB^2**

a) AB = 0 → $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -7 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & t+1 & t+2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ →

$\begin{pmatrix} 2t-4+2 & 2t+2-8+4 & 2t+4-12+6 \\ -7t+12-5 & -7t-7+24-10 & -7t-14+36-15 \\ -5t+8-3 & -5t-5+16-6 & -5t-10+24-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ →

$\begin{pmatrix} 2t-2 & 2t-2 & 2t-2 \\ -7t+7 & -7t+7 & -7t+7 \\ -5t+5 & -5t+5 & -5t+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → t=1

b) BA+BAB+BAB^2 → Tenemos que AB=0

BA + B·0 + B·(AB)·B = BA + 0 + B·0·B = BA = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -7 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 22 & -17 \\ -54 & 44 & -34 \\ -27 & 22 & -17 \end{pmatrix}$

7) Sea la matriz A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **y n, un número natural cualquiera. Encuentra el valor de A^n para cada n y halla A^{360}-A^{250}**

Aplicaremos el método de inducción. Calculamos las primeras potencias de A.

A^2= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

A^3=A^2·A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

Suponemos que A^n=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$ Vemos que

1. Se verifica para n=1
2. Si se cumple para n, también se cumple para n+1, ya que:
   A^{n+1}=A^n·A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3(n+1) & 1 \end{pmatrix}$

En consecuencia, nuestra suposición es cierta. Luego A^n=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto: A^{360}-A^{250} = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot 360 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 \cdot 250 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 330 & 1 \end{pmatrix}$

MATRIZ INVERSA

8) Calcula las matrices inversas de :

D= $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

D= $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow F1 \leftrightarrow F2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$F1 \leftrightarrow -F1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow F_{2\rightarrow} 2F_1\text{-}F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$F_{2\rightarrow} -\frac{1}{3} F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow F_{3\rightarrow} 4F_2\text{-}F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4/3 & 8/3 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$F_{3\rightarrow} \frac{1}{7} F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/21 & 8/21 & -1/7 \end{array}\right) \rightarrow$

$\begin{array}{l} f1 \rightarrow 3f3 + f1 \\ f2 \rightarrow f2 - 2f3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 12/21 & 3/21 & -3/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1/21 & -2/21 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 4/21 & 8/21 & -1/7 \end{array}\right) \rightarrow$

$f_1 \rightarrow f_{1+}f_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11/21 & 1/21 & -1/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1/21 & -2/21 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 4/21 & 8/21 & -1/7 \end{array}\right)$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} 11/21 & 1/21 & -1/7 \\ -1/21 & -2/21 & 2/7 \\ 4/21 & 8/21 & -1/7 \end{pmatrix}$

C= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

C= $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} f2 \rightarrow 2f1 + f2 \\ f3 \rightarrow 3f1 - f3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$f3 \rightarrow 7f2 - 3f3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} f2 \rightarrow 2f3 + f2 \\ f1 \rightarrow f1 + f3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$

$f3 \rightarrow \frac{1}{3} f3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \rightarrow f1 \rightarrow f1 - f2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

RANGO DE UNA MATRIZ

9) Calcula el rango de la siguiente matriz

A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz dada:

$$\begin{array}{c} \mathbf{1^{a}} \\ \mathbf{2^{a}} \\ \mathbf{3^{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \mathbf{3^{a}} \\ \mathbf{2^{a}} \\ \mathbf{1^{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \mathbf{1^{a}} \\ \mathbf{1^{a}+2^{a}} \\ \mathbf{3\cdot 1^{a}-3^{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & -20 & -16 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{1^{a}} \\ \mathbf{2^{a}} \\ \mathbf{4\cdot 1^{a}-3^{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$ Por tanto el rango de la matriz rg(A)=2

10) Aplicando el método de Gauss, calcula el rango de las siguientes matrices:

a) B= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow f_3 \rightarrow f_3 - f_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow f_3 \rightarrow f_3 + 2f_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow$ rg(B)= 3

b) C= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

C= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} f2 \rightarrow f2 - 2f1 \\ f3 \rightarrow f3 - 5f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow f3 \rightarrow f3 - 2f2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rg(C)= 2

ECUACIONES MATRICIALES

11) Si la matriz A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ determina los valores de x e y para que se cumpla la igualdad A^2+x·A+y·I=0 . I representa la matriz identidad de orden 2.

Calculamos $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$

Tenemos que **A^2+x·A+y·I=0**

$$\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} + x\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -5+x+y=0 \\ 10+2x=0 \\ -15-3x=0 \\ 10+4x+y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x=-5 \\ y=10 \end{array}$$

12) Si I es la matriz identidad de orden 2 y A=$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ halla el valor que deben tener "X" para que A^2-x·A+yI=0

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$

A^2-xA-yI $= \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2x-y & 9-3x \\ -6+2x & -5-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} -2-2x-y=0 \\ 9-3x=0 \\ -6+2x=0 \\ -5-x-y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-8 \end{array}\right\}$$

13) Dada la matriz A=$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) Calcula A^t·A y A·A^t, donde A^t es la traspuesta A

b) Encuentra las matrices de la forma X=$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$ tales que: A·A^t·X=X

c) Encuentra todas las matrices de la forma Y=$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ tales que: A^tAY=Y

La matriz traspuesta de A es:

$A^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^t\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A\cdot A^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) **A·A^t·X=X** → $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ → $\begin{cases}x=x\\2y=y\rightarrow y=0\end{cases}$

Por tanto X=$\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ donde x∈ℝ

c) **A^t·A·Y=Y** → $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ → $\begin{cases}a+c=a\\b=b\\a+c=c\end{cases}$ → $\begin{cases}a=0\\b=b\\c=0\end{cases}$

Solución: Y=$\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}$ donde b∈ℝ

14) Resuelve la ecuación matricial XA=B, siendo A=$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\\mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{-1}\\\mathbf{0} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$

Solución:

Despejamos X multiplicando por A^{-1} por la derecha: $XAA^{-1} = BA^{-1}$ → $X=BA^{-1}$

Hallamos A^{-1}=$\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$

Así que X= $\begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$ → X= $\begin{pmatrix}3 & -7\\0 & 2\end{pmatrix}$

15) Resolver la ecuación de matrices : A·X=B, siendo:

A= $\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & -5\end{pmatrix}$

Solución: Multiplicando la ecuación dada por A^{-1} a la izquierda, resulta:

$A^{-1}\cdot(A\cdot X) = A^{-1}\cdot B$

Teniendo en cuenta que la multiplicación de matrices es asociativa, que $A^{-1}\cdot A=I$ y que $I\cdot X=X$, se obtiene:

$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 17\\1 & -11\end{pmatrix}$

16) Resolver la ecuación matricial X·A=B+C

A=$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

Solución:

Multiplicando a la derecha por la inversa A^{-1} de A se obtiene: $X=(B+C)\cdot A^{-1}$

Como B+C=$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ y A^{-1}= $\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$, resulta la solución:

X=$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$,

17) Resolver la ecuación: M·X+N=P, siendo:

M=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ N=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ P=$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Si designamos por I la matriz unidad, se puede escribir M= -I

La ecuación dada se escribe entonces en la forma: -I·X+N=P, y como -I·X=-X, resulta:

X=N-P = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

18) **Resolver la ecuación matricial A·X·B=C, siendo:**

A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:
Teniendo en cuenta que la matriz A es la matriz unidad, la ecuación dada se escribe en la forma X·B=C. Multiplicando a la derecha por B^{-1} se obtiene:

X= C·B^{-1}=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

19) Resuelve el siguiente sistema matricial: 3X-2Y = $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{15} & \mathbf{-4} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$; 2X+Y=$\begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-5} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

Vamos a llamar A a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ y vamos a llamar B a la matriz $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Si aplicamos este cambio nos queda un sistema de la forma: $\begin{cases} 3X - 2Y = A \\ 2X + Y = B \end{cases}$ resolvemos el sistema y nos queda que X=$\frac{1}{7}(A + 2B)$ e Y=$\frac{1}{7}(3B - 2A)$

X=$\frac{1}{7}(A + 2B) = \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Y=$\frac{1}{7}(3B - 2A) = \frac{1}{7}\left[3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 21 & -7 & 14 \\ -28 & 0 & 21 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

20) Matriz Inversa por el método de Gauss-Jordan

Comprueba que el rango de A=$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2 y observa qué ocurre si se intenta calcular A^{-1} por el método de Gauss.

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ rg(A)=2

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

El hecho de que en la parte izquierda de la expresión aparezca una fila de todo ceros indica que la matriz **no tiene inversa**.

21) Calcula X de forma que XA – B = 2C

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ C= $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$XA = 2C + B \rightarrow XAA^{-1} = (2C+B)A^{-1} \rightarrow XI = (2C+B)A^{-1} \rightarrow X=(2C+B)A^{-1}$

Calculamos A^{-1}

A=$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow f_2 \rightarrow \frac{1}{2} f_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \rightarrow f_1 \rightarrow f_1 - f_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

X= $\left[2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6/2 \\ 3 & -12/2 \end{pmatrix}$

X= $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

22) **Halla la matriz X tal que $A^2X + BX = C$, siendo A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$**

$(A2 + B)X = C \rightarrow (A^2+B)^{-1}\cdot(A^2+B)\cdot X = (A^2+B)^{-1}\cdot C \rightarrow I\cdot X=(A^2+B)^{-1}\cdot C \rightarrow$

$X= (A^2+B)^{-1}\cdot C = \left[\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

23) **Resuelve la siguiente ecuación:**

$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow$

$X\cdot I = X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Calculamos $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$X= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$