OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Determina para qué valores de *a* la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 5-a & -2\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$ **no tiene inversa.**

[1,75 PUNTOS] Considerando la matriz *A* del apartado anterior con *a* = –1, resuelve la ecuación $XA+B=CA$**, donde** $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$**.**

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+6 & \text{si } x\le -1\\ bx^2-2x+1 & \text{si } -1<x\le 2\\ \dfrac{x-5}{(x+1)^2} & \text{si } x>2\end{cases}$

A. [1,75 PUNTOS] Determina los valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales la función es continua en todo su dominio.

B. [1,75 PUNTOS] Calcula la integral definida $\int_3^4 f(x)dx$ **.**

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Juan, Isabel y Elena son tres estudiantes que deciden presentarse a las pruebas de nivel B2 de inglés que organiza la universidad. La probabilidad que tienen de superarla es, respectivamente, de $\frac{3}{4}$ **,** $\frac{2}{3}$ **y** $\frac{2}{5}$**. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:**

A. [1 PUNTO] Los tres suspenden la prueba.

B. [1 PUNTO] Sólo la supera uno de ellos.

C. [1 PUNTO] Al menos uno de ellos la supera.

<u>OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2</u>

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. Determina, según los valores del parámetro *a*, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = a \\ 4x + 2y = 2a \end{cases}$$

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 1}$, determina:

A. [0,2 PUNTOS] El dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.

B. [1,1 PUNTOS] Las asíntotas.

C. [1,75 PUNTOS] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

D. [1,1, PUNTOS] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibuja su gráfica.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

A. [1,5 PUNTOS] El tiempo diario que los estudiantes de bachillerato de Cantabria dedican al estudio en las dos semanas previas al inicio de los exámenes de Selectividad de la convocatoria de junio, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 15 minutos. Para estimar el tiempo medio se elije una muestra de 300 alumnos. ¿Con qué nivel de confianza debe realizarse la estimación si el error cometido es de 1,88 minutos?

B. [1,5 PUNTOS] Con vistas a la convocatoria de septiembre del mismo año se realiza un análisis similar. El tiempo diario que los estudiantes destinan al estudio las dos semanas anteriores al inicio de los exámenes, sigue una distribución normal con desviación típica 11 minutos. Con una muestra aleatoria de 150 alumnos se ha obtenido un tiempo medio de 173 minutos. Obtén el intervalo de confianza del 93% para el tiempo medio de estudio.

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1.

A. Una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de 0.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 5-a & -2\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(5-a)\cdot a+2+2(2a+2)+2(2-5+a)=-a^2+11a=a(11-a)$$

Por tanto, la matriz A no tiene inversa cuando $|A|=0$, y eso se cumple si a = 0 o a = 11.

B. Para a = –1, la matriz A tiene inversa, es decir, existe A^{-1}, por lo que podemos despejar X:

$$XA+B=CA\Rightarrow XA=CA-B\Rightarrow XA\cdot A^{-1}=(CA-B)A^{-1}\Rightarrow X=C-BA^{-1}$$

Cálculo de la inversa: $A^{-1}=\dfrac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 6 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix};\ |A|=-12;\ (A_{ij})=\begin{pmatrix}-4 & 0 & -4\\ 0 & -3 & -3\\ -8 & 6 & 10\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 0 & -8\\ 0 & -3 & 6\\ -4 & -3 & 10\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X=C-BA^{-1}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)\begin{pmatrix}-4 & 0 & -8\\ 0 & -3 & 6\\ -4 & -3 & 10\end{pmatrix}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{6}\\ 0 & \frac{1}{2} & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{17}{6}\\ 3 & \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

A. Las funciones que definen $f(x)=\begin{cases}ax+6 & \text{si } x\le -1\\ bx^2-2x+1 & \text{si } -1<x\le 2\\ \dfrac{x-5}{(x+1)^2} & \text{si } x>2\end{cases}$

son continuas, cada una en su dominio, por lo que, los únicos puntos que hay que estudiar son x = –1 y x = 2.

Para que la función sea continua en esos puntos deben coincidir los límites laterales con el valor de la función en dichos puntos, es decir, se debe cumplir que:

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)$ y $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$

En x = –1: $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(ax+6)=-a+6$; $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(bx^2-2x+1)=b+3$

En x = 2: $f(-2)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(bx^2-2x+1)=4b-3$; $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-5}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{3}$

Igualando los límites laterales se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}-a+6=b+3\\ 4b-3=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+6=\dfrac{2}{3}+3\Rightarrow a=\dfrac{7}{3}\\ b=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

B. $$\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4\frac{x-5}{(x+1)^2}dx=\int_3^4\frac{x+1-6}{(x+1)^2}dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x+1}-\frac{6}{(x+1)^2}\right)dx=\left[\ln(x+1)+\frac{6}{x+1}\right]_3^4$$

$$=\left(\ln 5+\frac{6}{5}\right)-\left(\ln 4+\frac{6}{4}\right)=\ln 5-\ln 4-\frac{6}{20}=\ln\frac{5}{4}-\frac{3}{10}.$$

Ejercicio 3.

Si definimos los sucesos: J = "Juan supera la prueba", I = "Isabel supera la prueba", E = "Elena supera la prueba", las probabilidades de superar o no superar la prueba son:

La probabilidad de que Juan supere la prueba es $P(J)=\frac{3}{4}$ y de que no la supere $P(\bar{J})=\frac{1}{4}$.

La probabilidad de que Isabel supere la prueba es $P(I)=\frac{2}{3}$ y de que no la supere $P(\bar{I})=\frac{1}{3}$.

La probabilidad de que Elena supere la prueba es $P(E)=\frac{2}{5}$ y de que no la supere $P(\bar{E})=\frac{3}{5}$.

En todos los casos los sucesos (superar o no superar la prueba) son independientes.

A. P(los tres suspenden) = $P(\bar{J}\cap\bar{I}\cap\bar{E})=P(\bar{J})\cdot P(\bar{I})\cdot P(\bar{E})=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{20}$.

B. Para que sólo uno de ellos supere la prueba, pueden ocurrir tres situaciones en las que debe aprobar uno y suspender los otros dos:

$$P(J\cap\bar{I}\cap\bar{E})+P(\bar{J}\cap I\cap\bar{E})+P(\bar{J}\cap\bar{I}\cap E)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{17}{60}$$

C. El suceso de que, al menos, uno de ellos supere la prueba, es el contrario al de que suspendan los tres:

P(al menos uno la supera) = 1– P(los tres suspenden) = $1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. Determina, según los valores del parámetro *a*, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = a \\ 4x + 2y = 2a \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = a \\ 4x + 2y = 2a \end{cases}$, será compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada. Si ambos rangos coinciden con el número de incógnitas, que en este caso es 2, el sistema será determinado.

La matriz de coeficientes es A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2; la ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & a \\ 4 & 2 & 2a \end{pmatrix}$.

Empezamos realizando el determinante de aquella matriz que sea cuadrada, en este caso lo haremos con la matriz ampliada.

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & a \\ 4 & 2 & 2a \end{vmatrix} = -12a + 2 - 4a + 12 + 2a - 4a = -18a + 14 = 0 \rightarrow a = \frac{14}{18} = \mathbf{\frac{7}{9}}$$

a1) Si a= $\frac{7}{9}$

$|A^*| = 0 \rightarrow$ rg(A*)<3

Buscamos una menor de orden 2:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 1 = -5 \neq 0 \rightarrow$ rg(A)=rg(A*)=nº de incógnitas =2 por lo tanto estaremos ante un sistema

<u>Sistema Compatible Determinado</u> (Una única solución)

a2) Si a $\neq \frac{7}{9}$, como rg(A*) = 3, y el rg(A) = 2 $\rightarrow$ El sistema será <u>Sistema Incompatible</u>. (No tiene solución)

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+x-5}{x-1}$, determina:

A. [0,2 PUNTOS] El dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.

B. [1,1 PUNTOS] Las asíntotas.

C. [1,75 PUNTOS] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

D. [1,1, PUNTOS] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibuja su gráfica.

a) Calculamos el dominio de la función:

D(f) = $\forall x \epsilon \mathbb{R} - \{1\}$

- Calculamos los puntos de corte con los ejes:

  - Con el eje X : f(x) = 0 → $\frac{x^2+x-5}{x-1} = 0 \to \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} - 5 = 0 \to \begin{cases} x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \to \begin{cases} (\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, 0) \\ (\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, 0) \end{cases}$
  - Con el eje Y: x=0 → f(0)= 5 → (0,5)

- Calculamos las asíntotas:

  <u>Asíntotas Verticales</u>

  - Para x=1

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-5}{x-1} = \frac{-3}{0} \to \left[\frac{k}{o}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-5}{x-1} = \frac{-}{0^-} = +\infty$$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-5}{x-1} = \frac{-}{0^+} = -\infty \to$ Tenemos una **Asíntota Vertical en x = 1**

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, tendremos una Asíntota Oblicua.

<u>Asíntota Oblicua</u>

- y=mx+n

m= = $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+x-5}{x-1}}{x} = 1$

Asíntota oblicua: y= x+2

n= $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-5}{x-1}$ -x = 2

- Posición de la función con respecto a la asíntota oblicua.

Tomamos f(1000) = 1001,99 y= 1002= 1002 →la función < la asíntota oblicua → por debajo

Tomamos f(-1000) = -997,99 y= -1000+2= -998 → la función < la asíntota oblicua → por encima

- **Monotonía**

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

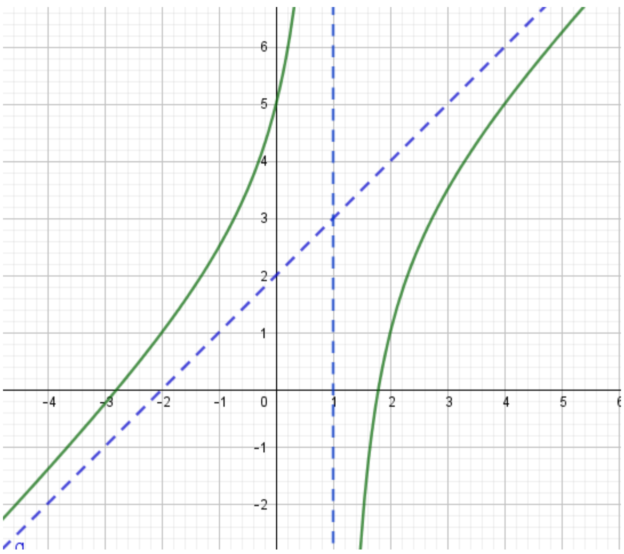
$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)-1\cdot(x^2+x-5)}{(x-1)^2} = \frac{(2x^2+x-2x-1)-(x^2+x-5)}{(x-1)^2} = \frac{\mathbf{x^2-2x+4}}{\mathbf{(x-1)^2}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{\mathbf{x^2-2x+4}}{\mathbf{(x-1)^2}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x^2 - 2x + 4 = 0} \rightarrow$ (No tiene solución real)→ No tendrá ni máximos ni mínimos.

	(-∞, 1)	(1,∞)
Signo de f´(x)	+	+
Comportamiento de f(x)	↗	↗

- Crecimiento: (-∞,1)U(1,∞)
- Decrecimiento: No hay
- Máximos y Mínimos: No hay

- Representación Gráfica:



Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

A. [1,5 PUNTOS] El tiempo diario que los estudiantes de bachillerato de Cantabria dedican al estudio en las dos semanas previas al inicio de los exámenes de Selectividad de la convocatoria de junio, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 15 minutos. Para estimar el tiempo medio se elige una muestra de 300 alumnos. ¿Con qué nivel de confianza debe realizarse la estimación si el error cometido es de 1,88 minutos?

B. [1,5 PUNTOS] Con vistas a la convocatoria de septiembre del mismo año se realiza un análisis similar. El tiempo diario que los estudiantes destinan al estudio las dos semanas anteriores al inicio de los exámenes, sigue una distribución normal con desviación típica 11 minutos. Con una muestra aleatoria de 150 alumnos se ha obtenido un tiempo medio de 173 minutos. Obtén el intervalo de confianza del 93% para el tiempo medio de estudio.

Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo diario que los estudiantes de bachillerato de Cantabria dedican al estudio en las semanas previas al inicio de los exámenes, donde X ~ N(μ, 15).

a) Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 − α.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 300 alumnos

E = 1,88 minutos

$\bar{x}$ = desconocida

El error viene definido por: E = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ → 1,88 = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{15}{\sqrt{300}}$ → $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ =2,17

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ → P(Z≤ 2,17) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,985 → $\alpha = 0{,}03$

Nivel de confianza → NC = 1- α =1 - 0,03 =0,97 → El nivel de confianza será del 97%

b) Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo diario que los estudiantes de bachillerato de Cantabria dedican al estudio en las semanas previas al inicio de los exámenes en septiembre, donde X ~ N(μ; 11).

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 − α.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 150 alumnos
$\bar{x}$ = 173 minutos

Para una confianza del 93%, α = 0,07

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,965 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,035}$= 1,81

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,93}(\mu) = \left(173 - 1{,}81\frac{11}{\sqrt{150}}\,;\,173 + 1{,}81\frac{11}{\sqrt{150}}\right) = (171{,}374\,;\,174{,}626)$$