OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [1,5 PUNTOS] Analiza el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & k \end{pmatrix}$$ **según los valores de k.**

B. [1,5 PUNTOS] Basándote en los resultados obtenidos en el apartado A), ¿podrías afirmar si el siguiente sistema tiene solución?

$$\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x - y = -1 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases}$$

¿Y el siguiente?

$$\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x - y = -1 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Justifica las respuestas utilizando los resultados obtenidos en el apartado A).

C. [0,5 PUNTOS] En caso de existir soluciones en alguno de los dos anteriores sistemas, calcúlalas.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{ax + b}$ **, determina los valores de a y b sabiendo que su grafica tiene un extremo relativo en el punto (–2, –5).**

B. [1,75 PUNTOS] Si a = 1 y b = 1, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

La edad de los asistentes a un concierto homenaje a la música de los años 60 sigue una distribución normal con desviación típica de 5 años. Una muestra aleatoria de 250 espectadores ha dado como resultado una edad media de 56,3 años.

A. [1,5 PUNTOS] Obtén el intervalo de confianza del 98% para la edad media de los asistentes.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97% sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. **[3,5 PUNTOS] Minimiza la función** $3x+2y$ **con las siguientes restricciones**

$$x-5y\leq 10$$
$$2x-3y\geq 6$$
$$0\leq x\leq 8$$

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+5x-14}{x^2-x-2}$

A. **[1,75 PUNTOS] Estudia su continuidad, analizando los distintos tipos de discontinuidad que existan.**
B. **[1,5 PUNTOS] Determina las asíntotas de la gráfica de la función, indicando sus ecuaciones. En el caso de que existan asíntotas verticales, indica también la posición de la curva respecto a los mismos.**
C. **[0,25 PUNTOS] En aquellos puntos donde** $f(x)$ **no es continua, ¿es posible definir de nuevo la función para evitar la discontinuidad? Razona la respuesta.**

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Ana no tiene claro con quién salir el próximo sábado, si con sus amigos del instituto o con las compañeras del equipo de baloncesto. En el primer caso, la probabilidad que tiene de ir al cine es de un 75% y la de ir a cenar de un 25%. Con el segundo grupo, la probabilidad que tiene de ir al cine es de un 40% y la de salir a cenar de un 60%. Decide echarlo a cara o cruz. Si sale cara, saldrá con el grupo del instituto, y si sale cruz, con sus compañeras de entrenamiento.

A. **[1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad que Ana tiene de salir a cenar?**
B. **[1 PUNTO] Si al final ha ido al cine, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho con sus compañeras de equipo?**
C. **[1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad que Ana tiene de salir con sus amigos del instituto e ir a cenar?**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [1,5 PUNTOS] Analiza el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & k \end{pmatrix}$$ **según los valores de k.**

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

El determinante de la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & k \end{pmatrix}$ es $|A|$ = -k -9 -10 +2 +15k +3 = 14k -14

Se anula cuando 14k -14 = 0 → k = 1

1) Si k ≠ 1 , se tendrá que rg(A) = 3, pues $|A| \neq 0$

2) Si k= 1 , se tendrá que rg(A) = 2, pues el menor (de orden 2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq .0$

B. [1,5 PUNTOS] Basándote en los resultados obtenidos en el apartado A), ¿podrías afirmar si el siguiente sistema tiene solución?

$$\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x - y = -1 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases}$$

¿Y el siguiente?

$$\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x - y = -1 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Justifica las respuestas utilizando los resultados obtenidos en el apartado A).

C. [0,5 PUNTOS] En caso de existir soluciones en alguno de los dos anteriores sistemas, calcúlalas.

$$\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x - y = -1 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases}$$ Estamos ante un sistema en el que el valor de la k = 7 y por lo tanto estaríamos en el caso de k≠1.

Por lo tanto el rg(A*) = 3 ≠ rg (A) = 2 → **<u>Teorema de Rouché-Fröbenius</u>**:

Como rg(A*) ≠ rg (A) → Se trataría de un <u>Sistema Incompatible</u>. El Sistema no tiene Solución.

$$\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x - y = -1 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$$ Estamos ante un sistema en el que el valor de la k = 1.

Por lo tanto el rg(A*) = 2 = rg (A) = 2 → **Teorema de Rouché-Fröbenius**:

Como rg(A*) = rg (A) = nº de incógnitas = 2 → Se trataría de un **Sistema Compatible Determinado**. (Una única solución)

Para resolver el sistema escogemos aquella menor que garantice que el rango de la matriz sea 2.

$$\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{7} \\ y = \dfrac{1}{7} \end{cases}$$

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

C. [1,75 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{ax + b}$ **, determina los valores de a y b sabiendo que su grafica tiene un extremo relativo en el punto (–2, –5).**

- El enunciado nos dice que posee un extremo relativo en $x = -2$:

  f´(-2)=0

- Nos dan también la coordenada de la función, que pasa por el punto $(-2, -5)$

  f(-2) = -5

  - f´(x) = $\frac{(2x-1)(ax+b)-(a)(x^2-x-1)}{(ax+b)^2} = \frac{\mathbf{ax^2+2bx-b+a}}{\mathbf{(ax+b)^2}}$

    f´(-2) = 0 → f´(-2)= $\frac{a(-2)^2+2b(-2)-b+a}{(a(-2)+b)^2} = 0$ → 4a -4b –b +a = 0 → 5a -5b = 0 → a=b

  - f(-2) = $\frac{(-2)^2-(-2)-1}{-2a+b} = \frac{5}{-2a+b} = -5$ → 5=10a -5b → 2a –b = 1

Calculamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a = b \\ 2a - b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

La función resultante será : f(x) = $\frac{x^2-x-1}{x+1}$

B. [1,75 PUNTOS] Si a = 1 y b = 1, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

La función sería la siguiente: f(x) = $\frac{x^2-x-1}{x+1}$

- Calculamos el dominio de la función: D(f) = $\forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-1\}$
- Calculamos la derivada de la función

$$f´(x) = \frac{(2x-1)(x+)-(1)(x^2-x-1)}{(x+1)^2} = \frac{\mathbf{x^2+2x}}{\mathbf{(x+1)^2}}$$

- Igualamos nuestra derivada a cero .

$$f´(x) = \frac{\mathbf{x^2+2x}}{\mathbf{(x+1)^2}} = \mathbf{0} \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow \text{Posibles Extremos Relativos}$$

	(-∞, −2)	(-2,-1)	(-1,0)	(0,∞)
Signo de f´(x)	+	-	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↘	↗

- **Crecimiento: (-∞, −2) ∪ (0, ∞)**
- **Decrecimiento: (-2,1)∪ (−1, 0)**
- **Máximo: (-2, -5)**
- **Mínimo: (0,-1)**

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

La edad de los asistentes a un concierto homenaje a la música de los años 60 sigue una distribución normal con desviación típica de 5 años. Una muestra aleatoria de 250 espectadores ha dado como resultado una edad media de 56,3 años.

A. [1,5 PUNTOS] Obtén el intervalo de confianza del 98% para la edad media de los asistentes.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97% sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

Sea X la variable aleatoria que mide la edad de los asistentes a un concierto homenaje a la música de los años 60, donde X ~ N(μ, 5).

a) Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 250 espectadores
$\bar{x}$ = 56,3 años

Para una confianza del 98%, α = 0,02,

$P(Z \leq Z_{\propto/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}99 \rightarrow$ por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0{,}01} = 2{,}33$

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0{,}98}(\mu) = \left(56{,}3 - 2{,}33\frac{5}{\sqrt{250}}\,;\,56{,}3 + 2{,}33\frac{5}{\sqrt{250}}\right) = (55{,}563;57{,}037).$$

b) Lo primero que tenemos que calcular el Error del apartado a)

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow E = 2{,}33\frac{5}{\sqrt{250}} \rightarrow E = 0{,}737$

Por lo tanto el error que nos piden en este apartado será: $\frac{E}{3} = 0{,}246$

Para una confianza del 97%, α = 0,03,

$P(Z \leq Z_{\propto/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}985 \rightarrow$ por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0{,}015} = 2{,}17$

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0{,}246 \rightarrow n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{0{,}246}\right)^2 \rightarrow n > \left(\frac{2{,}17\cdot 5}{0{,}246}\right)^2 \rightarrow n > 1945{,}31$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **n= 1946**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

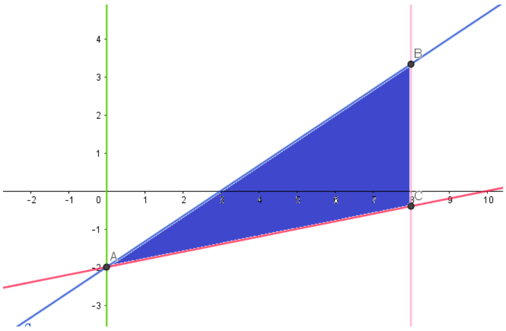
B. [3,5 PUNTOS] Minimiza la función $3x+2y$ **con las siguientes restricciones**

$$x-5y\le 10$$
$$2x-3y\ge 6$$
$$0\le x\le 8$$

Restricciones:

$$x-5y\le 10$$
$$2x-3y\ge 6$$
$$0\le x\le 8$$

Función Objetivo: z(x,y)= 3x +2y



Calculamos cada uno de los vértices:

A$\begin{cases} x-5y=10 \\ 2x-3y=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \rightarrow A(0,-2)$

B$\begin{cases} x=8 \\ 2x-3y=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=10/3 \end{cases} \rightarrow B(8,\frac{10}{3})$

C$\begin{cases} x-5y=10 \\ x=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-2/5 \end{cases} \rightarrow C(8,-\frac{2}{5})$

Función Objetivo: z(x,y)= 3x +2y $A(0,-2)\rightarrow Z_A=3\cdot 0+2\cdot(-2)=\mathbf{-4}$

$B\left(8,\frac{10}{3}\right)\rightarrow Z_B=3\cdot 8+2\cdot\frac{10}{3}=\frac{92}{3}=30,\hat{6}$

$C\left(8,-\frac{2}{5}\right)\rightarrow Z_C=3\cdot 8+2\cdot\left(\frac{-2}{5}\right)=\frac{116}{5}=23,2$

Para minimizar la función el valor de la función, x= 0 e y = -2

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+5x-14}{x^2-x-2}$

A. [1,75 PUNTOS] Estudia su continuidad, analizando los distintos tipos de discontinuidad que existan.

B. [1,5 PUNTOS] Determina las asíntotas de la gráfica de la función, indicando sus ecuaciones. En el caso de que existan asíntotas verticales, indica también la posición de la curva respecto a los mismos.

C. [0,25 PUNTOS] En aquellos puntos donde f(x) no es continua, ¿es posible definir de nuevo la función para evitar la discontinuidad? Razona la respuesta.

A. Calculamos el dominio de la función:

Al tratarse de una función racional, la función no existirá en aquellos puntos que anulen el denominador.

$$x^2-x-2=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Por lo tanto el dominio será: **D(f) =** $\forall \boldsymbol{x\epsilon}\mathbb{R}-\{\mathbf{-1,2}\}$

Estudiamos la continuidad en los puntos x = -1 y x=2

- Para x = -1

$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+5x-14}{x^2-x-2}=\left[\frac{-18}{0}\right]$

Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+5x-14}{x^2-x-2}=\frac{-}{0^+}=-\infty$ → Tendremos una <u>Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito</u>

$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+5x-14}{x^2-x-2}=\frac{-}{0^-}=+\infty$ → Tendremos una <u>Asíntota Vertical en x=-1</u>

- Para x = 2

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+5x-14}{x^2-x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]$ Factorizamos:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+5x-14}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+7)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x+7)}{(x+1)}=3$$

Como $\exists \lim\limits_{x\to2} f(x)$ y $\nexists$ f(2) → Tendremos una <u>Discontinuidad Evitable</u>

→ No tendremos Asíntota vertical en x=2

La función no será continua en x = -1 y en x=2.

Para que la función sea continua en x=2, definiremos de nuevo la función:

f(x) = $\begin{cases} \boldsymbol{\frac{x^2+5x-14}{x^2-x-2}} & \boldsymbol{si\ x\neq 2} \\ \mathbf{3} & \boldsymbol{si\ x=2} \end{cases}$

- Como el grado del numerador de la función es igual al grado del denominador, tendremos una asíntota una Asíntota Horizontal.

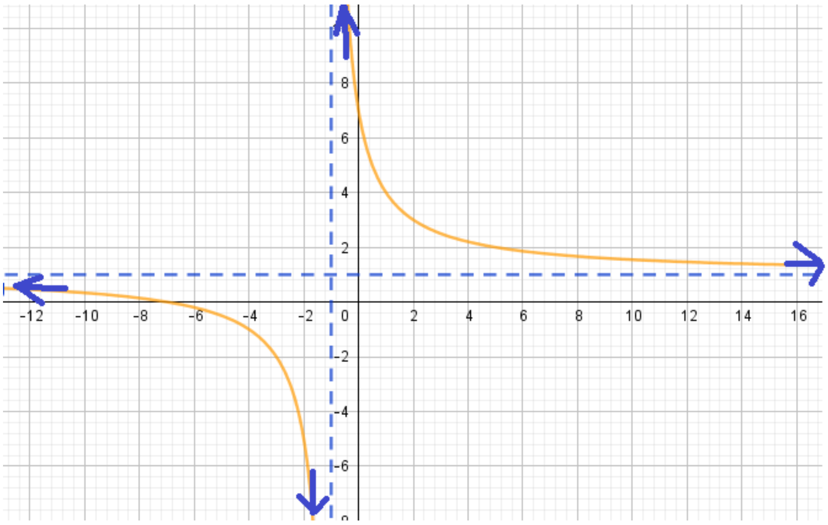
- Procedemos a calcular dicha asíntota:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-14}{x^2-x-2}=1$ → Tendremos una Asíntota Horizontal en y = 1

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x-14}{x^2-x-2}=1$$

- Posición de la función con respecto a la Asíntota Horizontal:
  - x= 100 función→ f(100) = 1,059
    Asíntota → y = 1 → Como el valor de la función > que el valor de la Asíntota
    La función estará por encima de la asíntota
  - x= -100 función→ f(-100) = 0,93
    Asíntota → y = 1 → Como el valor de la función < que el valor de la Asíntota
    La función estará por debajo de la asíntota

Representación:



Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Ana no tiene claro con quién salir el próximo sábado, si con sus amigos del instituto o con las compañeras del equipo de baloncesto. En el primer caso, la probabilidad que tiene de ir al cine es de un 75% y la de ir a cenar de un 25%. Con el segundo grupo, la probabilidad que tiene de ir al cine es de un 40% y la de salir a cenar de un 60%. Decide echarlo a cara o cruz. Si sale cara, saldrá con el grupo del instituto, y si sale cruz, con sus compañeras de entrenamiento.

- **A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad que Ana tiene de salir a cenar?**
- **B. [1 PUNTO] Si al final ha ido al cine, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho con sus compañeras de equipo?**
- **C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad que Ana tiene de salir con sus amigos del instituto e ir a cenar?**

Se designan:

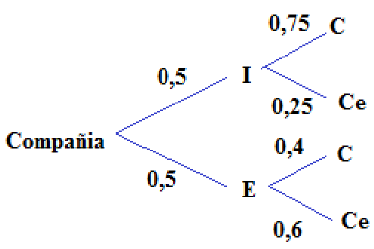
I=" Salir con los amigos del Instituto" "Que salga Cara"

E=" Salir con su Equipo de Baloncesto" "Que salga Cruz"

C="Ir al Cine"

Ce= " Ir a Cenar"

Realizamos el Diagrama de Árbol:



a) Se trata de una <u>Probabilidad Total</u>

$P(Ce) = P(I)\cdot P(Ce/I) + P(E)\cdot P(Ce/E)$

$P(Ce) = 0{,}5\cdot 0{,}25 + 0{,}5\cdot 0{,}6 = 0{,}425$

El Porcentaje será del 42,5%

$P(C) = 1 - P(Ce) = 1 - 0{,}425 = 0{,}575$

b) Se trata de una <u>Probabilidad Condicionada</u>

Aplicamos el Teorema de Bayes

$$P(E/C)= \frac{P(E\cap C)}{P(C)} = \frac{P(E)\cdot P(C/E)}{P(C)} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}4}{0{,}575} = 0{,}3478$$

El porcentaje será del 34,78%

c) Se trata de una <u>Probabilidad Compuesta</u>

$P(I\cap Ce) = P(I)\cdot P(Ce/I) = 0{,}5\cdot 0{,}25 = 0{,}125$

El Porcentaje será del 12,5%