OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

EJERCICIO 1

a) [3 puntos] Determinar, según los valores del parámetro *a*, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} -x+3y=a \\ x+2y=-2 \\ 4x+3y=3a \end{cases}$$

b) [0,5 puntos] Resolver los casos compatibles.

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x}$, determinar:

a) [0,2 puntos] El dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.

b) [1,1 puntos] Las asíntotas.

c) [1,1 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

d) [1,1 puntos] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

EJERCICIO 3

En una determinada población se han organizado tres asociaciones de vecinos, correspondientes a los tres principales barrios del pueblo. De todos los vecinos pertenecientes a alguna de ellas, el 35% pertenece a la asociación *A*, el 40% a la *B* y el 25% a la *C*. Entre los socios de la *A*, sólo el 10% está satisfecho con la labor realizada por su asociación en el último año. En el caso de la *B*, el porcentaje de socios satisfechos es del 60% y en la *C* es del 45%.

a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que un ciudadano elegido al azar de entre todos los pertenecientes a alguna de las tres asociaciones, sea socio de la *A* y esté satisfecho con la labor realizada el último año?

b) [1 punto] Si uno de los vecinos perteneciente a alguna agrupación está insatisfecho con ella, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la *B*?

c) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que un ciudadano elegido al azar de entre todos los pertenecientes a alguna de las tres asociaciones, esté insatisfecho con la labor realizada el último año?

OPCIÓN DE EXAMEN N° 2

EJERCICIO 1

a) **[1,75 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -k \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, analizar su rango según los valores del parámetro *k*.**

b) **[0,25 puntos] Para $k = 5$, ¿la matriz *A* del apartado a) tiene inversa?**

c) **[1,5 puntos] Consideremos la matriz *A* del apartado a) para $k = 0$ y las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Resolver la ecuación matricial $AX + C = BX$.**

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x-2}{(x+4)^2} & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ x^2 - 2x + b & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$.

a) **[1,75 puntos] Determinar los valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales la función es continua en todo su dominio.**

b) **[1,75 puntos] Calcular la integral definida**

$$\int_0^2 f(x)\, dx$$

EJERCICIO 3

a) **[1,5 puntos] Los gastos diarios de una familia española de clase media en una ciudad *A* siguen una distribución normal de media desconocida y desviación típica 10 euros. Para estimar el gasto medio se elige una muestra de 350 familias. ¿Con qué nivel de confianza debe realizarse la estimación si el error cometido es de 1,45 euros?**

b) **[1,5 puntos] Se realiza la misma encuesta en otra ciudad, *B*. En este caso, los gastos diarios de una familia de clase media siguen una distribución normal con desviación típica 4,50 euros. Con una muestra aleatoria de 300 familias se ha obtenido un gasto medio de 53 euros. Obtener el intervalo de confianza del 94% para el gasto medio diario.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

EJERCICIO 1

a) [3 puntos] Determinar, según los valores del parámetro *a*, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} -x+3y=a \\ x+2y=-2 \\ 4x+3y=3a \end{cases}$$

b) [0,5 puntos] Resolver los casos compatibles.

Lo primero vamos a calcular los valores de a, para ello calcularemos previamente la matriz A y la matriz A*(matriz ampliada).

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} -1 & 3 & a \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 3a \end{pmatrix}$$

Para calcular el parámetro a, debemos realizar el determinante de aquella matriz que sea cuadrada, en este caso escogeremos la matriz ampliada.

$$|A^*|=\begin{vmatrix} -1 & 3 & a \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 3a \end{vmatrix}=-6a+3a-24-8a-9a-6=-20a-30$$

$$|A^*|=0 \rightarrow -20a-30=0 \rightarrow a=\frac{30}{-20}=-\frac{3}{2}$$

Teorema de Rouché-Fröbenius: Vamos a analizar los diferentes casos:

- Si a≠ - $\frac{3}{2}$

  Como $|A^*| \neq 0 \rightarrow \mathrm{rg}(A^*)=3$

  El rango de la matriz A será:

  $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2-3=-5\neq 0 \rightarrow$ rg(A)=2

  Como $\mathrm{rg}(A^*) \neq \mathrm{rg}(A) \rightarrow$ Tendremos un Sistema Incompatible (S.I) (no hay solución)

- Si a= - $\frac{3}{2}$

  Como $|A^*|=0 \rightarrow \mathrm{rg}(A^*)<3$

  Tomamos una menor de orden 2: $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2-3=-5\neq 0 \rightarrow$ rg(A*)=2

  $$\left.\begin{array}{r} \mathrm{rg}(A^*)=2 \\ \mathrm{rg}(A)=2 \\ \text{nº de incógnitas}=2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Como } \mathrm{rg}(A^*)=\mathrm{rg}(A)=\text{nº de incógnitas}=2$$

  →Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D) (Una única solución)

Vamos a calcular el valor del sistema para a = - $\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} -x+3y=-\frac{3}{2} \\ x+2y=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-3/5 \\ y=-7/10 \end{cases}$$

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x}$, determinar:

a) [0,2 puntos] El dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.

b) [1,1 puntos] Las asíntotas.

c) [1,1 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

d) [1,1 puntos] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

a) Calculamos el dominio de la función:

D(f) = $\forall x \epsilon \mathbb{R}-\{0,3\}$

- Calculamos los puntos de corte con los ejes:
  - Con el eje X : f(x) = 0 → $\frac{x+1}{x^2-3x}=0 \rightarrow x+1=0$ → x= -1 → (-1,0)
  - Con el eje Y: x=0 → ∄f(0)
- Calculamos las asíntotas:

  Asíntotas Verticales

  - Para x=0

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2-3x}=\frac{1}{0}\rightarrow\left[\frac{k}{o}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x^2-3x}=\frac{+}{0^+}=+\infty$$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^2-3x}=\frac{+}{0^-}=-\infty$ → Tenemos una **Asíntota Vertical en x = 0**

  - Para x= 3

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x^2-3x}=\frac{4}{0}\rightarrow\left[\frac{k}{0}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x+1}{x^2-3x}=\frac{+}{0^-}=-\infty$$

$\lim_{x\to 3^+}\frac{x+1}{x^2-3x}=\frac{+}{0^+}=+\infty$ → Tenemos una **Asíntota Vertical en x = 3**

Como el grado del denominador es mayor que el grado del denominador, tendremos una Asíntota Horizontal.

<u>Asíntota Horizontal</u>

- $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2-3x} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2-3x} = 0$ → Tenemos una **Asíntota Horizontal en y=0**

- **Monotonía**

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

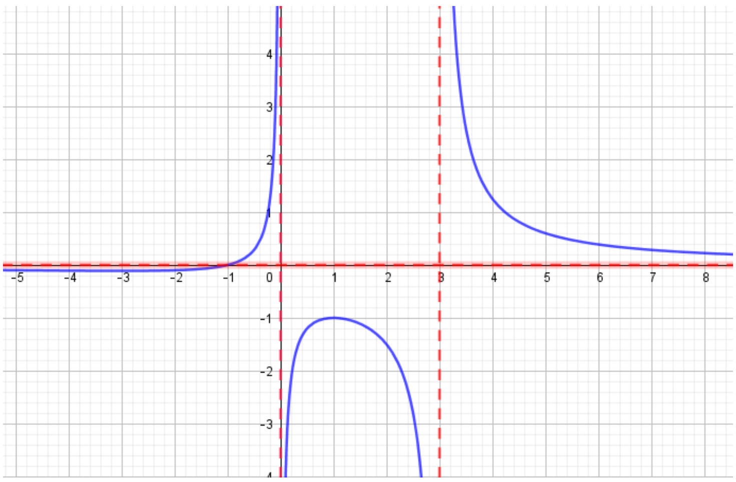
$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-3x)-(2x-3)(x+1)}{(x^2-3x)^2} = \frac{(x^2-3x)-(2x^2-3x+2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \frac{\mathbf{-x^2-2x+3}}{\mathbf{(x^2-3x)^2}}$$

$$f'(x) = 0 \to f'(x) = \frac{\mathbf{-x^2-2x+3}}{\mathbf{(x^2-3x)^2}} \mathbf{= 0 \to -x^2-2x+3=0} \to \begin{cases} \boldsymbol{x=-3} \\ \boldsymbol{x=1} \end{cases} \to \text{Posibles Máximos y Mínimos}$$

	(-∞, −3)	(-3,0)	(0,1)	(1,3)	(3,∞)
Signo de f´(x)	-	+	+	-	-
Comportamiento de f(x)	↘	↗	↗	↘	↘

- Crecimiento: (-3,0)∪(0,1)
- Decrecimiento: (-∞, −3) ∪ (1,3) ∪ (3, ∞)
- Mínimo en x= -3 : (-3, -1/9)
- Máximo en x= 1: (1,-1)

- Representación Gráfica:



EJERCICIO 3

En una determinada población se han organizado tres asociaciones de vecinos, correspondientes a los tres principales barrios del pueblo. De todos los vecinos pertenecientes a alguna de ellas, el 35% pertenece a la asociación *A*, el 40% a la *B* y el 25% a la *C*. Entre los socios de la *A*, sólo el 10% está satisfecho con la labor realizada por su asociación en el último año. En el caso de la *B*, el porcentaje de socios satisfechos es del 60% y en la *C* es del 45%.

d) **[1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que un ciudadano elegido al azar de entre todos los pertenecientes a alguna de las tres asociaciones, sea socio de la *A* y esté satisfecho con la labor realizada el último año?**

e) **[1 punto] Si uno de los vecinos perteneciente a alguna agrupación está insatisfecho con ella, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la *B*?**

f) **[1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que un ciudadano elegido al azar de entre todos los pertenecientes a alguna de las tres asociaciones, esté insatisfecho con la labor realizada el último año?**

Se designan:

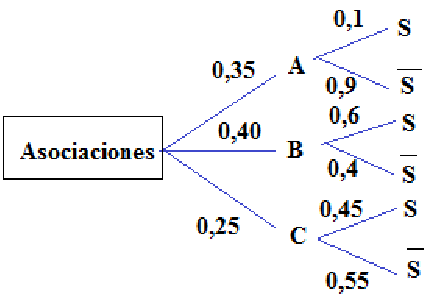
A=" Asociación A"

B="Asociación B"

C="Asociación C"

S=" Están satisfechos"

$\bar{S}$=" No están satisfechos"



a) Se trata de una <u>Probabilidad Compuesta</u> (Intersección)

P(A∩S) = P(A)·P(S/A) = 0,35·0,1 = 0,035

El porcentaje será del 3,5%

b) Se trata de una <u>Probabilidad Condicionada</u>

Aplicamos el **teorema de Bayes**

$$P(B/\bar{S}) = \frac{P(B\cap\bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(B)\cdot P(\bar{S}/B)}{P(A)\cdot P(\bar{S}/A)+P(B)\cdot P(\bar{S}/B)+P(C)\cdot P(\bar{S}/C)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}4}{0{,}35\cdot 0{,}9+0{,}4\cdot 0{,}4+0{,}25\cdot 0{,}55} = 0{,}2612$$

El porcentaje será del 26,12%

c) Se trata de una <u>Probabilidad Total</u>:

$P(\bar{S}) = P(A)\cdot P(\bar{S}/A) + P(B)\cdot P(\bar{S}/B) + P(C)\cdot P(\bar{S}/C)$ = 0,35·0,9+0,4·0,4+0,25·0,55 = 0,6125

El porcentaje será del 61,25%

OPCIÓN DE EXAMEN N° 2

EJERCICIO 1

a) [1,75 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -k \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, **analizar su rango según los valores del parámetro *k*.**

1. Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -k \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 - 6k - 36 - 2k$$

2. Igualamos el determinante de A a cero

$|A|$=0 → $4 - 6k - 36 - 2k = 0$ → -32-8k=0 → **k = -4**

3. Analizamos el rango para el valor de k obtenido:

- Si k≠ -4

  Como $|A|$ ≠0→ rg(A) = 3

- Si k = -4

  Como $|A|$=0 → rg(A)<3

  Calculamos una menor de orden 2

  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$ → por lo tanto el rg(A)=2

b) [0,25 puntos] Para *k* = 5, ¿la matriz *A* del apartado a) tiene inversa?

Como k≠ -4 → $|A|$ ≠0 → por lo tanto la matriz tiene matriz inversa.

c) **[1,5 puntos] Consideremos la matriz *A* del apartado a) para *k* = 0 y las matrices** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$**. Resolver la ecuación matricial *AX* + *C* = *BX*.**

1. Calculamos la matriz A

   $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Despejamos la Ecuación Matricial

   AX + C = BX → AX-BX = -C → (A-B)X = (-C) → $(A-B)^{-1}$ · (A-B)·X = $(A-B)^{-1}$ · (-C) →
   I·X = $(A-B)^{-1}$ · (-C) → X = $(A-B)^{-1}$ · (-C)

3. Calculamos Z= A – B

   $Z = A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Calculamos la matriz inversa de la matriz Z

   $$Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot \mathrm{Adj}(Z)^t$$

   - Calculamos el determinante de Z:

     $|Z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10$

   - Calculamos los Adjuntos de Z:

     $Z_{11} = 0 \qquad Z_{12} = -10 \qquad Z_{13} = -5$
     $Z_{21} = 2 \qquad Z_{22} = 6 \qquad Z_{23} = 2$
     $Z_{31} = 2 \qquad Z_{32} = -14 \qquad Z_{33} = -3$

   - Escribimos la matriz adjunta.

     $\mathrm{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & -14 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}(Z)^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -10 & 6 & -14 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

     $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot \mathrm{Adj}(Z)^t \rightarrow Z^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -10 & 6 & -14 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

   - $X = (A-B)^{-1} \cdot (-C) = Z^{-1} \cdot (-C) = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -10 & 6 & -14 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3/5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{16/5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{9/10} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{si } x<-1 \\ \dfrac{x-2}{(x+4)^2} & \text{si } -1\le x<3 \\ x^2-2x+b & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$.

a) [1,75 puntos] Determinar los valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales la función es continua en todo su dominio.

Calculamos el dominio de cada una de las funciones y observamos que son continuas en el intervalo en el que están definidas.

Vamos a estudiar la continuidad en los puntos de ruptura, es decir en los puntos x=-1 y x=3

- Para x = -1

  $\lim_{x\to -1^-} ax+2 = -a+2$

  $\lim_{x\to -1^+} \frac{x-2}{(x+4)^2} = \frac{-1-2}{3^2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$

  $f(-1) = \frac{-1-2}{3^2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$

  Para que la función sea continua en x=-1 se tiene que cumplir que:

  $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \to$ -a+2 = $-\frac{1}{3} \to$ **a =** $\mathbf{\frac{7}{3}}$

- Para x = 3

  $\lim_{x\to 3^-} \frac{x-2}{(x+4)^2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

  $\lim_{x\to 3^+} x^2-2x+b = 3^2-2\cdot 3+b$ = 3 +b

  f(3) = $3^2-2\cdot 3+b$ = 3 + b

  Para que la función sea continua en x=3 se tiene que cumplir que:

  $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \to 3+b = \frac{1}{49} \to$ **b = -** $\mathbf{\frac{146}{49}}$

Para que la función sea continua en todo $\mathbb{R} \to$ **a =** $\mathbf{\frac{7}{3}}$ **y b = -** $\mathbf{\frac{146}{49}}$

EJERCICIO 3

a) **[1,5 puntos] Los gastos diarios de una familia española de clase media en una ciudad *A* siguen una distribución normal de media desconocida y desviación típica 10 euros. Para estimar el gasto medio se elige una muestra de 350 familias. ¿Con qué nivel de confianza debe realizarse la estimación si el error cometido es de 1,45 euros?**

b) **[1,5 puntos] Se realiza la misma encuesta en otra ciudad, *B*. En este caso, los gastos diarios de una familia de clase media siguen una distribución normal con desviación típica 4,50 euros. Con una muestra aleatoria de 300 familias se ha obtenido un gasto medio de 53 euros. Obtener el intervalo de confianza del 94% para el gasto medio diario.**

Sea X la variable aleatoria que mide los gastos diarios de una familia española de clase media en una ciudad A, donde X ~ N(μ, 10).

a) Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 350 familias
E = 1,45 €
$\bar{x}$ = desconocida

El error viene definido por: E = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow$ 1,45 = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{10}{\sqrt{350}} \rightarrow$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ =2,71

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ → P(Z≤ 2,71) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,9966 → α = 0,0068

Nivel de confianza → NC = 1- α =1 - 0,0068 =0,9932 → El nivel de confianza será del 99,32%

b) Sea X la variable aleatoria que mide los gastos diarios de una familia española de clase media en una ciudad B, donde X ~ N(μ; 4,5).

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 300 familias
$\bar{x}$ = 53€

Para una confianza del 94%, α = 0,06

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,97 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,03}$= 1,88

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,94}(\mu) = \left(53 - 1{,}88\frac{4{,}5}{\sqrt{300}}\,;\, 53 + 1{,}88\frac{4{,}5}{\sqrt{300}}\right) = (52{,}512\,;\, 53{,}488)$$