OPCIÓN DE EXAMEN N.º 1

Ejercicio 1

a) (1,5 puntos) Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 & a^2 \\ 0 & -2 & a \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$**, analizar su rango según los valores del parámetro a.**

b) Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -x+3y=a^2 \\ -2y=a \\ 3x+y=-2 \end{cases}$$

Basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior:

b1) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de a tenemos un sistema compatible determinado?

b2) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de a tenemos un sistema incompatible?

c) (0,5 puntos) Resolver los casos compatibles del sistema anterior.

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

El determinante de la matriz A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 & a^2 \\ 0 & -2 & a \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es $|A|$ = -(4-a) + 3· (3a+2a^2)= 6a^2+10a-4

Se anula cuando 6a^2 + 10 a-4 = 0 → a= $\frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{12}$ → $\begin{cases} a=-2 \\ a=\frac{1}{3} \end{cases}$

1) Si a ≠ –2 y a≠ $\frac{1}{3}$, se tendrá que rg(A) = 3, pues $|A| \neq 0$

2) Si a = –2 o a = $\frac{1}{3}$, rg(A) = 2, pues el menor (de orden 2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq .0$

b) El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -x+3y= a^2 \\ -2y=a \\ 3x+y=-2 \end{cases}$, será compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada. Si ambos rangos coinciden con el número de incógnitas, que en este caso es 2, el sistema será determinado.

La matriz de coeficientes es A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2; la ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & a^2 \\ 0 & -2 & a \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

b1) El sistema será compatible determinado cuando ambos rangos sean iguales a 2. Esto sucede, como se ha visto en el apartado A, cuando $a = -2$ o $a = \frac{1}{3}$

b2) Si $a \neq -2$ y $a \neq \frac{1}{3}$, como rg(A*) = 3, el sistema será incompatible.

c) Para a = –2, el sistema es:

$$\begin{cases} -x+3y=4 \\ -2y=-2 \\ 3x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3+3F_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3+5F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+3y=4 \\ -2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+3y=4 \Rightarrow x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Para $a = \frac{1}{3}$, el sistema queda:

$$\begin{cases} -x+3y=\frac{1}{9} \\ -2y=\frac{1}{3} \\ 3x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & \frac{1}{9} \\ 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3+3F_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 3 & \frac{1}{9} \\ 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 10 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3+5F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 3 & \frac{1}{9} \\ 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+3y=\frac{1}{9} \\ -2y=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+3y=\frac{1}{9} \Rightarrow x=-\frac{11}{18} \\ y=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

Ejercicio 2

a) **(1,75 puntos) El coste de producción de x unidades mensuales de un determinado producto es $C(x) = \frac{x^2}{2} + 25x + 25$, y el precio de venta de cada unidad es $70 - \frac{x}{3}$ euros. Hallar el número de unidades que deben venderse mensualmente para que el beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Y los ingresos?**

b) **(1,75 puntos) Una función f(x) tiene como primera derivada $f'(x)=ax^2-4x+3$. Hallar el valor del parámetro a si f(x) pasa por los puntos (–1, 3) y (2, 1). Indicar también la expresión de la función f y calcular $\int_0^2 f(x)dx$.**

a) El beneficio es igual a los ingresos menos los gastos. Si el precio de venta de cada unidad es $70-\frac{x}{3}$, los ingresos por la venta de x unidades serán:

$$I(x) = x\left(70 - \frac{x}{3}\right) = 70x - \frac{x^2}{3}$$

Como la función de costes es $C(x)=\frac{x^2}{2} + 25x + 25$, entonces, la función de beneficios será:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 70x - \frac{x^2}{3} - \left(\frac{x^2}{2} + 25x + 25\right) \Rightarrow B(x) = -\frac{5}{6}x^2 + 45x - 25$$

El beneficio máximo se da en la solución de $B'(x) = 0$ que haga negativa a $B''(x)$:

$B'(x) = -\frac{5}{3}x + 45 = 0 \rightarrow x=27$ y como $B''(x) = -\frac{5}{3}$, para x = 27 se obtiene el beneficio máximo.

Ese beneficio máximo es $B(27) = -\frac{5}{6} \cdot 27^2 + 45 \cdot 27 - 25 = 582{,}5$€.

Los ingresos ascienden a $I(27) = 70 \cdot 27 - \frac{27^2}{3} = 1647$ €

b) Si $f'(x) = ax^2-4x+3 \Rightarrow f(x) = \int (ax^2 - 4x + 3)dx = \frac{ax^3}{3} - 2x^2 + 3x + C$

Como f(x) pasa por los puntos (–1, 3) y (2, 1) ⇒ f(-1) = 3 y f(2)=1, luego:

$$\frac{a}{3}(-1)^3 - 2(-1)^2 + 3(-1) + C = 3 \Rightarrow -\frac{a}{3} - 5 + C = 3 \Rightarrow -a + 3C = 24$$
$$\frac{a}{3}2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + C = 1 \Rightarrow \frac{8}{3}a - 8 + 6 + C = 1 \Rightarrow 8a + 3C = 9$$

Resolviendo $\begin{cases} -a + 3c = 24 \\ 8a + 3c = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ c = \frac{67}{9} \end{cases}$ y por tanto, $f(x) = -\frac{5}{9}x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{67}{9}$

Por último:

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(-\frac{5}{9}x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{67}{9}\right)dx = \left[-\frac{5}{36}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{67}{9}x\right]_0^2 = -\frac{5 \cdot 16}{36} - \frac{2 \cdot 8}{3} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{67 \cdot 2}{9} = -\frac{40}{9}$$

Ejercicio 3

Una organización de consumidores ha analizado el comportamiento de tres marcas de lavadoras durante todo un año. En concreto, se ha seguido la pista de 350 unidades: 125 de la marca A, 75 de la marca B y 150 de la marca C. En la siguiente tabla se indica cuáles de ellas han sufrido alguna avería durante el año:

	Marca A	**Marca B**	**Marca C**	**Total**
Avería	**35**	**15**	**20**	**70**
No avería	**90**	**60**	**130**	**280**
Total	**125**	**75**	**150**	**350**

a) **(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que una lavadora haya sufrido una avería?**

b) **(1 punto) Si se escoge una lavadora al azar y no ha sufrido ninguna avería, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?**

c) **(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que una lavadora de la marca A haya tenido una avería? ¿Qué marca crees que es más fiable? Justifica la respuesta.**

Los datos del problema son:

	Marca A	Marca B	Marca C	Total
Avería	35	15	20	70
No avería	90	60	130	280
Total	125	75	150	350

Pueden definirse los sucesos:

A = Avería; N = no avería; MA, MB y MC = marcas A, B y C, respectivamente.

a) P(A) = $\frac{70}{350}$ = 0,2 → P(N) = 0,8.

b) Por la probabilidad condicionada:

$$P(MB\,|\,N) = \frac{P(MB)\cdot P(N\,|\,MB)}{P(N)} = \frac{\frac{75}{350}\cdot\frac{60}{75}}{0{,}8} = 0{,}21429$$

c) P(A/MA)=$\frac{35}{125}$ = 0,28.

Igualmente, las probabilidades de que una lavadora de las marcas B y C hayan tenido una avería son:

P(A/MB)= $\frac{P(A\cap MB)}{P(MB)} = \frac{\frac{15}{350}}{\frac{75}{350}} = \frac{15}{75} = 0{,}2$ y P(A/MC)= $\frac{P(A\cap MC)}{P(MC)} = \frac{\frac{20}{350}}{\frac{150}{350}} = \frac{20}{150} = 0{,}1\hat{3}$

La marca más fiable es la C porque es la que tiene la menor probabilidad de averiarse.

OPCIÓN DE EXAMEN N.° 2

Ejercicio 1

a1) (0,5 puntos) Sea la matriz A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$**. Calcula su determinante.**

a2) (0,5 puntos) Dada la matriz B = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -9 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$**, ¿podrías determinar el valor de su determinante con una sola operación aritmética? Justifica la respuesta.**

a3) (0,5 puntos) Dada la matriz C = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$**, ¿podrías determinar el valor de su determinante con una sola operación aritmética? Justifica la respuesta.**

b) (2 puntos) Resolver la ecuación matricial B(A^t + X) = C, donde A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$**, B =** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$**,**
C=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$**, y A^t es la matriz traspuesta de A.**

a1) Calculamos el determinante de A.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = -6 -3 -4 = -13

a2) Dada la matriz B = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -9 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -9 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3\cdot(-1) & -3\cdot 3 & -3\cdot 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = -3·$|A|$ = -3·(-13) = 39

a3) Dada la matriz C = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=}$ Al cambiar dos filas o columnas el signo del determinante cambia (-1)· $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

= (-1)·$|A|$ = (-1)· (-13) = 13

Ejercicio 2

Resolver la ecuación matricial B(A^t + X) = C, donde A= $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$**, B =** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**, C=**$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$**, y A^t es la matriz traspuesta de A.**

Despejamos X:

B(A^t + X) = C → B^{-1} · B ·(A^t + X) = B^{-1} ·C → I · (A^t + X) = B^{-1} ·C → (A^t + X) = B^{-1} ·C → X=B^{-1} ·C - A^t

- Calculamos la matriz traspuesta de A.

  $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Calculamos la matriz inversa de B.

  $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \mathrm{Adj}(B)^t$

  Calculamos el determinante de B:

  $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$

  Calculamos los Adjuntos de B:

  $B_{11} = -2 \quad B_{12} = -2 \quad B_{13} = 4$
  $B_{21} = 0 \quad B_{22} = 2 \quad B_{23} = -6$
  $B_{31} = 0 \quad B_{32} = -2 \quad B_{33} = 2$

  Escribimos la matriz adjunta.

  $\mathrm{Adj}(B) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}(B)^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

  $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \mathrm{Adj}(B)^t \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

  X=B^{-1} ·C - A^t → $X = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -8 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$

  $X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 5/2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3/2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7/2} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

Ejercicio 2

a) **(1,75 puntos) Dada la función f(x) =** $\begin{cases} \boldsymbol{3x - a} & \boldsymbol{si\ x \leq -2} \\ \boldsymbol{x^2 + 3x - 2} & \boldsymbol{si - 2 < x \leq 3} \\ \boldsymbol{\frac{2bx+10}{x^2+x-2}} & \boldsymbol{si\ x > 3} \end{cases}$ **, determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales es continua en todo su dominio.**

b) (1,75 puntos) Consideremos la función g(x) = $\boldsymbol{\frac{x^2+1}{x^2+x-12}}$ **. Determinar sus asíntotas.**

Si existen asíntotas verticales, esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

a) Observamos que:

- f(x) = 3x –a → se trata de una función lineal por lo tanto está definida en todo su dominio.
- f(x) = x^2 +3x -2 → se trata de una función cuadrática por lo tanto está definida en todo su dominio.
- f(x) = $\frac{2bx+10}{x^2+x-2}$ → se trata de una función racional y no está definida en los puntos -2 y 1, que son los puntos que anulan el denominador. Pero ninguno de ellos está dentro del dominio de la función en este caso (3,∞)

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos -2 y 3.

X= -2

Para que la función sea continua en x=-1, se tiene que cumplir que $\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2)$

$$\begin{cases} \lim_{x\to -2^-} 3x - a = -6 - a \\ \lim_{x\to -2^+} x^2 + 3x - 2 = -4 \\ f(-2) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 2 = -4 \end{cases}$$

Para que la función sea continua en x=-1, se tiene que cumplir que $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$

-6 – a = -4 → a= -2

X= 3

Para que la función sea continua en x=3, se tiene que cumplir que $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

$$\begin{cases} \mathrm{Lim}_{x\to 3^-} x^2 + 3x - 2 = 16 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{2bx+10}{x^2+x-2} = \frac{6b+10}{10} \\ f(3) = 3^2 + 3 \cdot 3 - 2 = 16 \end{cases}$$

Para que la función sea continua en x= 3, se tiene que cumplir que $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

$\frac{6b+10}{10} = 16 \to$ b= 25

Para que la función sea continua en todo su dominio a =-2 y b=25

Consideremos la función g(x) = $\frac{x^2+1}{x^2+x-12}$. Determinar sus asíntotas.

Si existen asíntotas verticales, esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

- Calculamos el dominio de la función:

  D(f) = ∀ x∈ℝ - {−4,3}

  Son en los puntos -4 y 3 donde estudiaremos las asíntotas verticales.

- **Asíntotas verticales**

  X= -4

  $$\lim_{x\to -4} \frac{x^2+1}{x^2+x-12} = \frac{17}{0} \to \left[\frac{k}{0}\right]$$

  Calculamos los límites laterales:

  $\lim_{x\to -4^-} \frac{x^2+1}{x^2+x-12} = \frac{+}{0^+} = \infty$ → Tendremos una asíntota vertical en x = -4

  $$\lim_{x\to -4^+} \frac{x^2+1}{x^2+x-12} = \frac{+}{0^-} = -\infty$$

  X= 3

  $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+1}{x^2+x-12} = \frac{10}{0} \to \left[\frac{k}{0}\right]$$

  Calculamos los límites laterales:

  $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+1}{x^2+x-12} = \frac{+}{0^-} = -\infty$ → Tendremos una asíntota vertical en x = 3

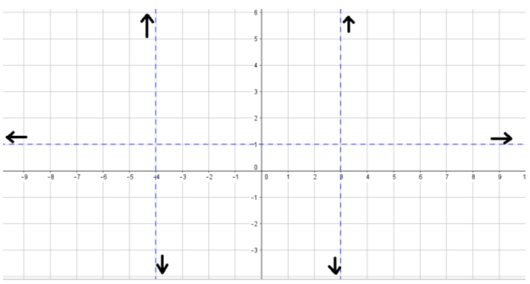
  $$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+1}{x^2+x-12} = \frac{+}{0^+} = \infty$$

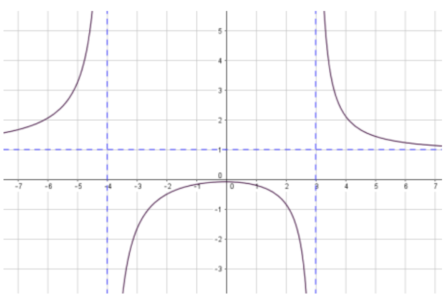
- Observamos que el grado del numerador es igual al grado del denominador por lo tanto tendremos una asíntota horizontal.

  $$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{x^2+x-12} = 1$$

  → Tendremos una asíntota horizontal en y = 1

  $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x-12} = 1$





Ejercicio 3

La asistencia anual al cine de los habitantes de determinada ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 3. Una muestra aleatoria de 375 personas da como resultado una cifra media de 15 asistencias al año.

a) (1,5 puntos) Obtener el intervalo de confianza del 98 % para la asistencia media anual.

b) (1,5 puntos) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 92 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

A. La variable aleatoria X: "la asistencia anual al cine ". La distribución de la variable x es normal, de media desconocida y desviación típica 3.

Una muestra aleatoria de n= 375 personas, proporciona una media muestral de $\bar{x}$ = 15 asistencias/año. A un nivel de confianza del 98% se tiene que:

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01 \rightarrow Z_{0,01} = 2,33$$

De manera que el intervalo de confianza al 98%, para la media μ, de la asistencia anual al cine es:

$$IC = \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

$$IC_{0,98}(\mu) = \left(15 - 2,33\frac{3}{\sqrt{375}}; 15 + 2,33\frac{3}{\sqrt{375}}\right) = (14,64\ ;\ 15,36)$$

El error cometido es $E = 2,33\frac{3}{\sqrt{375}} = 0,36$

B. El error cometido debe ser un cuarto del obtenido en el apartado anterior. Por lo tanto el error cometido en este apartado debe ser menor de :

$$\frac{0,36}{4} = 0,09 \rightarrow E < 0,09$$

A un nivel de confianza del 92% se tiene que: $1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,04 \rightarrow Z_{0,04} = 1,75$

Y como el error E para estimar el número de asistentes anuales al cine debe ser menor que 0,09; entonces

$$E = Z_{0,04} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0,09 \rightarrow 1,75\frac{3}{\sqrt{n}} < 0,09 \rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,75 \cdot 3}{0,09} \rightarrow n = \left(\frac{1,75 \cdot 3}{0,09}\right)^2 = 3402,78$$

Con las condiciones requeridas, se requiere un tamaño muestral de, al menos 3403 personas para estimar la asistencia anual al cine.