OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

EJERCICIO 1

[3,5 PUNTOS] Una empresa discográfica quiere sacar al mercado los discos de dos nuevos grupos. Estima que por cada disco producido del primer grupo obtendrá unos beneficios de
2 euros, mientras que cada disco del segundo grupo le reportará unos beneficios de 3,5 euros.

El proceso de producción de los discos requiere de su paso por un departamento de edición y otro de estampación. Cada disco del primer grupo necesita 2 horas de edición y 1 hora de estampación, mientras que cada disco del segundo grupo necesita 3 horas de edición y 3 horas de estampación. La empresa, con los recursos disponibles, puede utilizar un máximo de
6 000 horas de edición y 4 500 horas de estampación.

Con todos estos datos, determinar las unidades a producir de cada disco para maximizar los beneficios de la empresa. ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

EJERCICIO 2

a) [1,75 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\frac{ax^2+bx-2}{x^2+2x-8}$, determina los valores de los parámetros a y b sabiendo que su gráfica tiene un extremo relativo en el punto (–2,1/2).

b) [0,75 PUNTOS] Si a = 1 y b = 3, estudiar la continuidad de f(x), analizando los distintos tipos de discontinuidad que existan.

c) [1 PUNTO] ¿La función del apartado anterior posee asíntotas verticales? En caso afirmativo, dibujar la posición de su gráfica respecto a las mismas.

EJERCICIO 3

Una empresa ha comercializado un determinado artículo. Cuenta con un departamento de revisión por el que han pasado todos los artículos antes de su salida al mercado. Los operarios A, B y C se encargaron de examinar respectivamente el 40%, el 35% y el 25% del total de artículos que pasaron por el departamento. El operario A ha dejado escapar errores en un 1% de las unidades revisadas; el operario B en un 3% y el C en un 2%.

a) [1 PUNTO] Calcular la probabilidad de que escogido un artículo al azar de entre todos los que ya han salido a la venta, este tenga errores en su acabado.

b) [1 PUNTO] Calcular la probabilidad de que un artículo que ya ha salido al mercado, no tenga ningún error y haya sido revisado por el operario A.

c) [1 PUNTO] Si un artículo destinado ya a la venta tiene todavía algún error en su acabado, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya revisado el operario C?

OPCIÓN DE EXAMEN N° 2

EJERCICIO 1

a) **[1,75 PUNTOS] Calcular los valores del parámetro *a* para los cuales la matriz** $A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **tiene inversa.**

b) **[1,75 PUNTOS] Consideremos la matriz *A* del apartado anterior para *a* = 1 y las matrices** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. **Resolver la ecuación matricial $AX + BX = -C$.**

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{ax}{x^2+4}, & \text{si } -2 \le x < 1 \\ x^2 - bx + 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) **[1,75 PUNTOS] Determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.**

b) **[1,75 PUNTOS] Considerados los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior:**

¿Existe la función derivada en el punto x = –2? Justifica la respuesta.

¿Y en x = 0? En caso afirmativo, calcúlala.

EJERCICIO 3

La edad de los simpatizantes de un partido político sigue una distribución normal con desviación típica de 4 años. Una muestra aleatoria de 450 simpatizantes ha dado como resultado una edad media de 42,6 años.

a) **[1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 93% para la edad media de los simpatizantes.**

b) **[1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97% sea de 0,4?**

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

EJERCICIO 1

Se trata de un problema de programación lineal.

Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

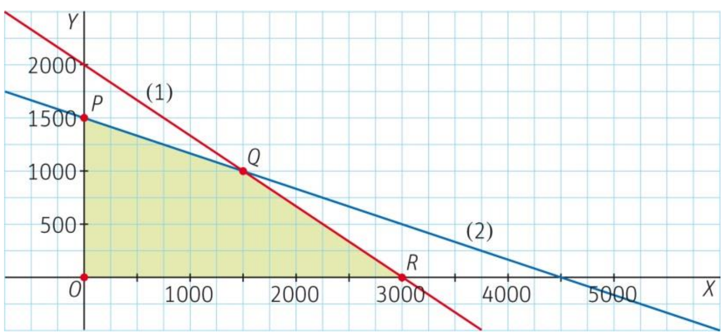
Grupo	Cantidad	Edición	Estampación	Beneficio
I	x	2x	x	2x
II	y	3y	3y	3,5y
Disponibilidades		6 000 h	4 500 h	

El objetivo es maximizar los beneficios: **B(x,y) = 2x + 3,5y**

Restringido por:

$$2x + 3y \leq 6\,000 \quad \textbf{(1)}$$
$$x + 3y \leq 4\,500 \quad \textbf{(2)}$$
$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

La región factible es la sombreada en la siguiente figura adjunta. Se obtiene representando las rectas asociadas a las inecuaciones.



Las coordenadas de los vértices son las que se indican a continuación:

O: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ O = (0, 0);

P: $\begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = 4\,500 \end{cases} \Rightarrow$ P = (0, 1 500);

Q: $\begin{cases} 2x + 3y = 6\,000 \\ x + 3y = 4\,500 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (1 500, 1 000);

R: $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 6\,000 \end{cases} \Rightarrow$ R = (3000, 0).

Como se trata de una región cerrada, la solución óptima, el beneficio máximo, se da en alguno de los vértices anteriores. Los valores de ese beneficio en cada uno de ellos es:

- En O, B(0,0) = 0 €.
- En P, B(0,1500) 3,5· 1500 =5250 €.
- En Q, B(1500,1000) = 2·1500 + 3,5· 1000 = 6500 €.
- En R, B(3000,0) 2·3000= 6000 €.

El máximo beneficio será de 6 500 euros. Se obtiene cuando se producen 1 500 discos del Grupo I y 1 000 discos del Grupo II.

EJERCICIO 2

a) $f(x)=\dfrac{ax^2+bx-2}{x^2+2x-8} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2ax+b)\cdot(x^2+2x-8)-(ax^2+bx-2)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x-8)^2}$

Como en (–2, $\frac{1}{2}$) tiene un extremo relativo $\Rightarrow f(-2)=\frac{1}{2}$, $f'(-2)=0$.

Por tanto:

$$\frac{4a-2b-2}{-8}=\frac{1}{2} \text{ y } \frac{(-4a+b)\cdot(-8)-(4a-2b-2)\cdot(-2)}{(-8)^2}=0 \Rightarrow \begin{cases}4a-2b-2=-4\\40a-12b-4=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2a-b=-1\\10a-3b=1\end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ y } b = 3.$$

b) Si a = 1 y b = 3, la función es $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+2x-8}$.

La función no es continua en los "ceros" del denominador:

$$x^2+2x-8=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot(-8)}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases}-4\\2\end{cases}$$

- En x = –4, como $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+2x-8}=\left[\dfrac{2}{0}\right]=\infty$ Presenta una discontinuidad Inevitable de salto Infinito
- En x = 2, como $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+2x-8}=\left[\dfrac{8}{0}\right]=\infty$ Presenta una discontinuidad Inevitable de salto Infinito

c) En x = 4 la función tiene una asíntota vertical.

Si $x \to -4^{-}$, $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{x^2+3x-2}{x^2+2x-8} = \lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{x^2+3x-2}{(x+4)(x-2)} = \left[\dfrac{2}{0^+}\right] = +\infty$.

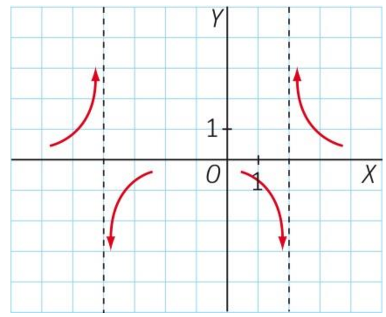
Si $x \to -4^{+}$, $\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{x^2+3x-2}{x^2+2x-8} = \lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{x^2+3x-2}{(x+4)(x-2)} = \left[\dfrac{2}{0^-}\right] = -\infty$.

En x = 2 la función tiene una asíntota vertical.

Si $x \to 2^{-}$, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+3x-2}{x^2+2x-8} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+3x-2}{(x+4)(x-2)} = \left[\dfrac{8}{0^-}\right] = -\infty$.

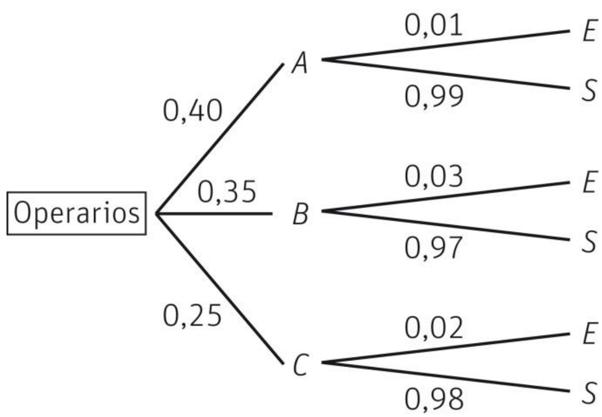
Si $x \to 2^{+}$, $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+3x-2}{x^2+2x-8} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+3x-2}{(x+4)(x-2)} = \left[\dfrac{8}{0^+}\right] = +\infty$.

La situación es la que se indica en el dibujo adjunto.



EJERCICIO 3

El diagrama de árbol correspondiente es el siguiente. En él, E indica el suceso “Artículo con errores” y S el suceso “artículo bueno”.



a) Por el Teorema de la Probabilidad Total:

P(E) = P(A) · P(E/A) + P(B) · P(E/B) + P(C) · P(E/C) =

= 0,40 · 0,01 + 0,35 · 0,03 + 0,25 · 0,02 = 0,019 5

b) Por la probabilidad de la intersección:

$$P(A \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) = 0,40 \cdot 0,99 = 0,396$$

c) Por el Teorema de Bayes:

$$P(C/E) = \frac{P(C)\cdot P(E/C)}{P(E)} = \frac{0,25 \cdot 0,02}{0,019\,5} = \frac{0,005}{0,019\,5} = \frac{50}{195} \approx 0,256$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

EJERCICIO 1

a) [1,75 PUNTOS] Calcular los valores del parámetro *a* para los cuales la matriz $A=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **tiene inversa.**

Para que la matriz A tenga inversa, el determinante de A tiene que ser distinto de cero ($|A| \neq 0$)

$$|A| = \begin{vmatrix} a-3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = a - 3 + 6 + 3 - 4a + 12 = -3a + 18 = 0 \rightarrow a = 6$$

- Si a = 6

  Como $|A| = 0 \rightarrow$ La matriz A no tendrá inversa

- Si a ≠ 6

  Como $|A| \neq 0 \rightarrow$ La matriz A tendrá inversa

b) [1,75 PUNTOS] Consideremos la matriz *A* del apartado anterior para *a* = 1 y las matrices $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$**. Resolver la ecuación matricial *AX* + *BX* = –*C*.**

- Calculamos el valor de la matriz A= $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
- Despejamos la ecuación matricial → $\mathrm{AX} + \mathrm{BX} = -\mathrm{C} \rightarrow$

  (A+B)X =(-C)→ $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{-1} \cdot (\mathrm{A}+\mathrm{B}) \cdot \mathrm{I} = (\mathrm{A}+\mathrm{B})^{-1}(-\mathrm{C}) \rightarrow$ **X=** $\mathbf{(A+B)^{-1}(-C)}$

- Calculamos la suma de la matriz A y B.

  Z= $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- Calculamos la matriz inversa de Z:

  $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot \mathrm{Adj}(Z)^t$

1. Calculamos el determinante de Z:

$$|Z| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 3 = -12$$

2. Calculamos los adjuntos de B:

$$\begin{array}{lll} Z_{11} = 0 & Z_{12} = 3 & Z_{13} = -3 \\ Z_{21} = -4 & Z_{22} = -2 & Z_{23} = -2 \\ Z_{31} = 0 & Z_{32} = 9 & Z_{33} = 3 \end{array}$$

3. Escribimos la matriz adjunta.

$$\mathrm{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}(Z)^t = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 9 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot \mathrm{Adj}(Z)^t \rightarrow Z^{-1} = \frac{1}{-12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 9 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- **X=** $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}(-\mathbf{C}) \rightarrow X = \frac{1}{-12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 9 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -44 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{ax}{x^2+4}, & \text{si } -2 \le x < 1 \\ x^2 - bx + 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) **[1,75 PUNTOS] Determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.**

Calculamos el dominio de cada una de las funciones y observamos que son continuas en el intervalo en el que están definidas.

Vamos a estudiar la continuidad en los puntos de ruptura, es decir en los puntos x= -2 y x=1

- Para x = -2

$$\lim_{x\to -2^-} 2x+3 = -4+3 = -1$$
$$\lim_{x\to -2^+} \frac{ax}{x^2+4} = \frac{-2a}{8}$$
$$f(-2) = \frac{-2a}{8}$$

Para que la función sea continua en x=-2 se tiene que cumplir que:

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) \to -\frac{a}{4} = -1 \to$ a= 4

- Para x = 1

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{ax}{x^2+4} = \frac{a}{5} = \frac{4}{5}$$

$\lim_{x\to 1^+} x^2 - bx + 2 = 1^2 - b + 2 =$ 3 - b

$\nexists f(1)$

Para que la función sea continua en x=1 se tiene que cumplir que:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \to 3 - b = \frac{4}{5} \to b = \frac{11}{5}$

Observamos que para a= 4 y b= $\frac{11}{5}$ la función será continua en todos los puntos exceptuando en el punto x=1 donde tendremos una <u>Discontinuidad Evitable</u> ya que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ y $\nexists f(1)$

b) [1,75 PUNTOS] Considerados los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior:
¿Existe la función derivada en el punto x = –2? Justifica la respuesta.
¿Y en x = 0? En caso afirmativo, calcúlala.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{ax}{x^2+4}, & \text{si } -2 \le x < 1 \\ x^2 - bx + 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua en todo el dominio exceptuando en x=1.

Su derivada, es $f'(x)=\begin{cases} 2 & x<-2 \\ \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2} & -2<x<1 \\ 2x-\frac{11}{5} & x>1 \end{cases}$

No es derivable en x = -2, pues las derivadas laterales no son iguales: $f'(-2^-)=2$ y $f'(-2^+)=0$

Tampoco será derivable en x=1, ya que la función no es continua en dicho punto.

En cambio, sí es derivable en cualquier otro punto. En particular en x = 0, siendo $f'(0)=1$

EJERCICIO 3

La edad de los simpatizantes de un partido político sigue una distribución normal con desviación típica de 4 años. Una muestra aleatoria de 450 simpatizantes ha dado como resultado una edad media de 42,6 años.

a) [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 93% para la edad media de los simpatizantes.

b) [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97% sea de 0,4?

a) Sea X la variable aleatoria que mide la edad de los simpatizantes de un partido político donde X ~ N(μ; 4).

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 450 simpatizantes
$\bar{x}$ = 42,6 años

Para una confianza del 93%, α = 0,07

P(Z≤ $Z_{\alpha/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,965 → por lo tanto $Z_{\alpha/2}=Z_{0,035}$= 1,81

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,93}(\mu)=\left(42,6-1,81\frac{4}{\sqrt{450}};\ 42,6+1,81\frac{4}{\sqrt{450}}\right)=(42,259\ ;\ 42,941)$$

b) Para una confianza del 97%, α = 0,03

P(Z≤ $Z_{\alpha/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,985 → por lo tanto $Z_{\alpha/2}=Z_{0,015}$= 2,17

E = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ →E = 0,4 → $2,17\frac{4}{\sqrt{n}}<0,4$ → n = $\left(\frac{2,17\cdot 4}{0,4}\right)^2$ → $n>470,89$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error sea menor de 0,4 debe ser de **n= 471**