OPCIÓN DE EXAMEN N.º 1

Ejercicio 1

(3,5 puntos) Una fábrica de productos navideños decide comercializar, con vistas a la próxima campaña de diciembre, dos surtidos diferentes con polvorones de limón y roscos de vino. En concreto, para los dos surtidos elabora 750 polvorones de limón y 600 roscos de vino. Cada caja del surtido A contendrá 15 polvorones de limón y 10 roscos de vino. Cada caja del surtido B, 15 polvorones de limón y 20 roscos de vino. Las cajas del surtido A las venderá a 8 euros la unidad, y las cajas del surtido B, a 10 euros la unidad. ¿Cuántas cajas de cada tipo se deben preparar y vender para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Ejercicio 2

a) **(1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x^2+2x-3}$, determinar el valor de a para que tenga una discontinuidad evitable en $x=-3$. Para el valor de a obtenido, definir de nuevo la función para que sea continua en $x=-3$.**

b) **(1,5 puntos) Si $a=2$, estudiar la continuidad de $f(x)$, analizando los distintos tipos de discontinuidad que existan.**

c) **(0,5 puntos) Determinar las asíntotas verticales de la función del apartado B. Esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.**

Ejercicio 3

a) **(1,5 puntos) La altura de los estudiantes de determinada ciudad sigue una distribución normal con desviación típica σ. Con una muestra aleatoria de 375 individuos se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza del 90 %, (169,3 cm, 170,7 cm), para la estatura media. Determinar la media muestral y la desviación típica.**

b) **(1,5 puntos) El peso de los estudiantes de la misma ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 4. Con una muestra aleatoria de 375 jóvenes se ha obtenido un peso medio de 65,3 kg. Determinar el intervalo de confianza del 93 % para el peso medio.**

OPCIÓN DE EXAMEN N.º 2

Ejercicio 1

a) A y B son dos matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes tienen como valor 4 y –5 respectivamente. Con estos datos, calcular:

a1) (0,5 puntos) $|B^{-1}|$.

a2) (0,5 puntos) El determinante del producto $A^t B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

a3) (0,5 puntos) El determinante del producto CB, siendo C la matriz resultante de multiplicar por 5 los elementos de la segunda fila de A.

b) (2 puntos) Resolver la ecuación matricial $AXB^{-1}+C=O$, donde

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

y O la matriz de dimensión 3×2 con todos sus elementos nulos.

Ejercicio 2

Dada la función $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+x-2}$, determinar:

a) (0,2 puntos) El dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.

b) (1,1 puntos) Las asíntotas.

c) (1,1 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

d) (1,1 puntos) Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Ejercicio 3

El finalista de un concurso televisivo debe realizar la siguiente prueba para llevarse el premio. Hay tres urnas A, B y C. La urna A contiene 3 bolas rojas y 5 azules; la urna B, 4 rojas y 7 azules; la urna C, 2 bolas rojas y 6 azules. Debe escoger una urna al azar y de ella extraer una bola. Si es roja, gana el premio.

a) (1 punto) ¿Qué probabilidad tiene de ganar el premio?

b) (1 punto) Si ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de haberlo conseguido con la urna B?

c) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la urna escogida sea la A y no consiga el premio?

Ejercicio 1

(3,5 puntos) Una fábrica de productos navideños decide comercializar, con vistas a la próxima campaña de diciembre, dos surtidos diferentes con polvorones de limón y roscos de vino. En concreto, para los dos surtidos elabora 750 polvorones de limón y 600 roscos de vino. Cada caja del surtido A contendrá 15 polvorones de limón y 10 roscos de vino. Cada caja del surtido B, 15 polvorones de limón y 20 roscos de vino. Las cajas del surtido A las venderá a 8 euros la unidad, y las cajas del surtido B, a 10 euros la unidad. ¿Cuántas cajas de cada tipo se deben preparar y vender para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Se trata de un ejercicio de programación lineal.

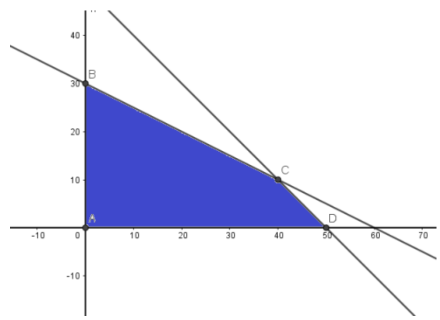
x→ Número de cajas de tipo A
y→ Número de cajas de tipo B

	Cantidad	Polvorones de Limón	Roscos de Vino	Precio
Cajas de Tipo A	x	15x	10x	8x
Cajas de Tipo B	y	15y	20y	10y
Disponibilidad		750	600	

El objetivo es maximizar los Ingresos: **I(x)= 8x+10y → Función Objetivo**

Restricciones:

$$\begin{cases} 15x+15y\le 750 \\ 10x+20y\le 600 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y\le 50 \\ x+2y\le 60 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima, los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de esos ingresos en cada uno de esos vértices son:

A$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ → A(0,0) → I_A= 8·0+10·0 = 0€

B$\begin{cases} x=0 \\ x+2y=60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=30 \end{cases} \rightarrow B(0{,}30) \rightarrow I_B$= 8·0+10·30 = 300€

C$\begin{cases} x+y=50 \\ x+2y=60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=40 \\ y=10 \end{cases}$ → C(40,10) → I_C= 8·40+10·10 = 420€

D$\begin{cases} x+y=50 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=50 \\ y=0 \end{cases}$ → D(50,0)→ I_D= 8·50 + 10·0 = 400€

Para obtener los máximos Ingresos deben preparar 40 cajas de tipo A y 10 cajas de tipo B, siendo los ingresos de 420 €.

Ejercicio 2

a) (1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x^2+2x-3}$, determinar el valor de *a* para que tenga una discontinuidad evitable en *x* = –3. Para el valor de *a* obtenido, definir de nuevo la función para que sea continua en *x* = –3.

Para que la función tenga una discontinuidad evitable en x= -3 se debe cumplir que exista el límite en ese punto (es decir que los límites laterales sean iguales) y que el valor de la función en ese punto sea distinto al de los límites o que la función no exista.

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} f(x) \to \exists \lim_{x\to -3} f(x) \neq f(-3) \text{ o } \nexists f(-3)$$

- Calculamos el límite de la función en el punto x= -3

$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-a}{x^2+2x-3} = \frac{6-a}{0}$ para que existe el límite debemos alcanzar una indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$

por ello el valor de a tiene que ser 6 **(a=6)**

$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-a}{x^2+2x-3} = \frac{6-6}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Factorizamos $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to -3}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to -3}\frac{x-2}{x-1} = \frac{-3-2}{-3-1} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$

- Redefinimos la función para que la función sea continua:

f(x) = $\begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-3} & \boldsymbol{si\ x \neq -3} \\ \frac{5}{4} & \boldsymbol{si\ x = -3} \end{cases}$

b) (1,5 puntos) Si *a* = 2, estudiar la continuidad de *f*(*x*), analizando los distintos tipos de discontinuidad que existan.

Si a= 2 → f(x) = $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

Calculamos el dominio → D(f) = $\forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-3,1\}$

- Si x= -3

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to -3}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to -3}\frac{x+2}{x+3} = \frac{-1}{0} \to \left[\frac{K}{0}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \frac{-}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \frac{-}{0^+} = -\infty$ → Como los límites laterales tienden a$\pm\infty$, tendremos en x=-3, una **Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito.**

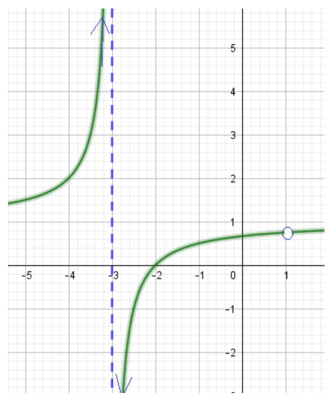
- Si x= 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{\boldsymbol{x^2+x-2}}{\boldsymbol{x^2+2x-3}} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+3} = \frac{3}{4}$$

Como $\exists \lim_{x\to 1} f(x)$ y ∄f(1) → Tendremos en x=1 una **Discontinuidad Evitable**

c) (0,5 puntos) Determinar las asíntotas verticales de la función del apartado B. Esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

Tendremos una asíntota vertical en x= -3 pero no en x= 1 (Discontinuidad Evitable)



Ejercicio 3

a) **(1,5 puntos) La altura de los estudiantes de determinada ciudad sigue una distribución normal con desviación típica σ. Con una muestra aleatoria de 375 individuos se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza del 90 %, (169,3 cm, 170,7 cm)I, para la estatura media. Determinar la media muestral y la desviación típica.**

b) **(1,5 puntos) El peso de los estudiantes de la misma ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 4. Con una muestra aleatoria de 375 jóvenes se ha obtenido un peso medio de 65,3 kg. Determinar el intervalo de confianza del 93 % para el peso medio.**

Sea X la variable aleatoria que mide la altura de los estudiantes de determinada ciudad, donde X ~ N(μ, $\boldsymbol{\sigma}$).

a) Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 375 individuos
$\bar{x}$ = desconocida

Para una confianza del 90%, α = 0,1

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,95 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,05}$= 1,645

IC=(169,3 cm; 170,7 cm) → Como IC =$(\bar{x} - E; \bar{x} + E)$ tendremos:

$$\begin{cases} \bar{x} - E = 169{,}3 \\ \bar{x} + E = 170{,}7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\bar{x} = 170\ cm} \\ E = 0{,}7 \end{cases}$$

El error viene definido por: E = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ → 0,7 = 1,645 $\frac{\sigma}{\sqrt{375}}$ → **$\boldsymbol{\sigma}$ = 8,24 cm**

b) Sea X la variable aleatoria que mide el peso de los estudiantes de la misma ciudad, donde X ~ N(μ, 4).

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 375 individuos
$\bar{x}$ = 65,3 kg

Para una confianza del 93%, α = 0,07

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,965 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,035}$= 1,81

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,93}(\mu) = \left(65{,}3 - 1{,}81\frac{4}{\sqrt{375}}\,;\,65{,}3 + 1{,}81\frac{4}{\sqrt{375}}\right) = (64{,}926\,;\,65{,}674).$$

OPCIÓN DE EXAMEN N.º 2

Ejercicio 1

a) *A* y *B* son dos matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes tienen como valor 4 y –5 respectivamente. Con estos datos, calcular:

a1) (0,5 puntos) $|B^{-1}|$.

a2) (0,5 puntos) El determinante del producto $A^t B$, donde A^t es la matriz traspuesta de *A*.

a3) (0,5 puntos) El determinante del producto *CB*, siendo *C* la matriz resultante de multiplicar por 5 los elementos de la segunda fila de *A*.

Tenemos que $|A| = 4$ y $|B|$ =-5

A1) $B\cdot B^{-1} = I \rightarrow |B \cdot B^{-1}| = |I| \rightarrow |B| \cdot |B^{-1}| = |I| \rightarrow (-5) \cdot |B^{-1}| = 1 \rightarrow \ |B^{-1}| = \frac{-1}{5}$

A2) $|A^t \cdot B| = |A^t| \cdot |B| \overset{|A| = |A^t|}{=} |A| \cdot |B| = 4 \cdot (-5) = -20$

A3) $|C| = 5 \cdot |A|$

$|C \cdot B| = |C| \cdot |B| = 5 \cdot |A| \cdot |B| = 5 \cdot 4 \cdot (-5) = -100$

b) (2 puntos) Resolver la ecuación matricial $AXB^{-1} + C = O$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y *O* la matriz de dimensión 3 × 2 con todos sus elementos nulos.

- Lo primero es despejar la ecuación matricial.

  $AXB^{-1} = -C \rightarrow A^{-1}AXB^{-1}B = A^{-1}(-C)B \rightarrow I \cdot X \cdot I = A^{-1}(-C)B \rightarrow \boldsymbol{X = A^{-1}(-C)B}$

- Calculamos la matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t$$

1. Calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8 + 2 = 10$$

2. Calculamos los adjuntos de A:

$A_{11} = -2 \quad A_{12} = -4 \quad A_{13} = -2$
$A_{21} = 0 \quad A_{22} = 0 \quad A_{23} = -10$
$A_{31} = 2 \quad A_{32} = -1 \quad A_{33} = 2$

3. Escribimos la matriz adjunta.

$$\mathrm{Adj(A)} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj(A)}^{t} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj(A)}^{t} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

- X= $A^{-1}(-C)B \rightarrow$ X = $\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 1/2 & 13/10 \\ -3 & 12/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6/5 \\ 1/2 & 49/10 \\ -3 & 6/5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Dada la función $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+x-2}$ **, determinar:**

a) (0,2 puntos) El dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.

b) (1,1 puntos) Las asíntotas.

c) (1,1 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

d) (1,1 puntos) Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

a) Calculamos el dominio de la función:

D(f) = $\forall x \epsilon \mathbb{R}-\{-2,1\}$

- Calculamos los puntos de corte con los ejes:
  - Con el eje X : f(x) = 0 → $\frac{x+3}{x^2+x-2}=0 \to x+3=0$ → x= -3 → (-3,0)
  - Con el eje Y: x=0 → f(0)= $\frac{3}{-2}$ → (0,- $\frac{3}{2}$)

- Calculamos las asíntotas:

  Asíntotas Verticales

  - Para x=-2

    $$\lim_{x\to -2}\frac{x+3}{x^2+x-2}=\frac{1}{0}\to\left[\frac{k}{o}\right]$$

    Calculamos los límites laterales:

    $$\lim_{x\to -2^-}\frac{x+3}{x^2+x-2}=\frac{+}{0^+}=+\infty$$

    $\lim_{x\to -2^+}\frac{x+3}{x^2+x-2}=\frac{+}{0^-}=-\infty$ → Tenemos una **Asíntota Vertical en x = -2**

  - Para x= 1

    $$\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x^2+x-2}=\frac{4}{0}\to\left[\frac{k}{0}\right]$$

    Calculamos los límites laterales:

    $$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+3}{x^2+x-2}=\frac{+}{0^-}=-\infty$$

    $\lim_{x\to 1^+}\frac{x+3}{x^2+x-2}=\frac{+}{0^+}=+\infty$ → Tenemos una **Asíntota Vertical en x = 1**

Como el grado del denominador es mayor que el grado del denominador, tendremos una Asíntota Horizontal.

Asíntota Horizontal

- $\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x^2+x-2}=0$
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x^2+x-2}=0$ → Tenemos una **Asíntota Horizontal en y=0**

- **Monotonía**

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

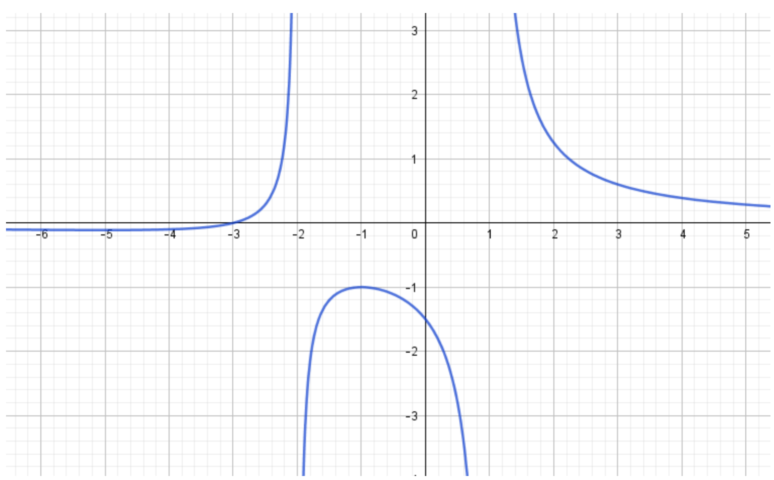
$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+x-2)-(2x+1)(x+3)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{(x^2+x-2)-(2x^2+x+6x+3)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{-x^2-6x-5}{(x^2+x-2)^2}$$

$$f'(x)=0\rightarrow f'(x)=\frac{-x^2-6x-5}{(x^2+x-2)^2}=0\rightarrow -x^2-6x-5=0\rightarrow\begin{cases}x=-5\\x=-1\end{cases}$$ → Posibles Máximos y Mínimos

	(-∞, −5)	(-5,-2)	(-2,-1)	(-1,1)	(1,∞)
Signo de f´(x)	-	+	+	-	-
Comportamiento de f(x)	↘	↗	↗	↘	↘

- Crecimiento: (-5,-2)∪(-2,-1)
- Decrecimiento: $(-\infty,-5)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$
- Mínimo en x= -5 : (-5, -1/9)
- Máximo en x=.-1: (-1,-1)

- Representación Gráfica:



Ejercicio 3

El finalista de un concurso televisivo debe realizar la siguiente prueba para llevarse el premio. Hay tres urnas A, B y C. La urna A contiene 3 bolas rojas y 5 azules; la urna B, 4 rojas y 7 azules; la urna C, 2 bolas rojas y 6 azules. Debe escoger una urna al azar y de ella extraer una bola. Si es roja, gana el premio.

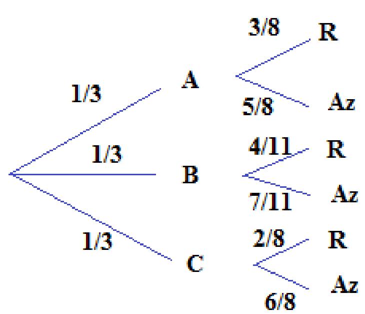
a) (1 punto) ¿Qué probabilidad tiene de ganar el premio?

b) (1 punto) Si ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de haberlo conseguido con la urna B?

c) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la urna escogida sea la A y no consiga el premio?

Se designan:

A=" Urna A "
B=" Urna B"
C=" Urna C"
R = " Bolas Rojas"
Az=" Bolas Azules"



a) Se trata de una Probabilidad Total

P(R)= P(A)·P(R/A) + P(B)·P(R/B) + P(C)·P(R/C)

P(R)= $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{11}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{8}+\frac{4}{33}+\frac{1}{12}=\frac{29}{88}\approx 0{,}3295$

El porcentaje será del 32,95%

b) Se trata de una Probabilidad Condicionada

P(B/R)= $\frac{P(B\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{11}}{\frac{29}{88}}=\frac{352}{957}\approx 0{,}3678$

El porcentaje será del 36,78%

c) Se trata de una Probabilidad Compuesta

P(A∩ $Az) =$ P(A)·P(Az/A) = $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{24}\approx 0{,}208\hat{3}$

El porcentaje será del 20,83%