INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

(3,5 puntos) Una frutería quiere dar salida esta semana a 50 kg de manzanas y 27 kg de naranjas que le han quedado por vender. Para ello prepara dos tipos de cajas: *A* y *B*. Cada caja del tipo *A* contiene 5 kg de manzanas y 2 kg de naranjas. Y cada caja del tipo *B*, 5 kg de manzanas y 3 kg de naranjas. El precio de venta de cada caja *A* es de 7,5 euros, y el precio de venta de cada caja *B* es de 8,5 euros ¿Cuántas cajas de cada tipo debe vender para maximizar sus ingresos?

Ejercicio 2

Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$:

a) **(0,1 puntos) Obtener los puntos de corte con los ejes *X* e *Y*.**

b) **(0,6 puntos) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.**

c) **(0,6 puntos) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.**

d) **(0,5 puntos) Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = 4x$.**

e) **(1,7 puntos) Calcular el área de la región anterior.**

Ejercicio 3

Las probabilidades de que tres tiradores con arco consigan hacer diana son, respectivamente, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$. Si los tres disparan simultáneamente:

a) **(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en el blanco uno solo?**

b) **(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres acierten?**

c) **(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos uno de ellos?**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

a) (3 puntos) Una empresa elabora dos modelos de un determinado producto. Un empleado necesita dos minutos para cada unidad del primer modelo y cuatro para cada unidad del segundo. Los costes unitarios de producción de cada modelo son de 4 y 6 euros respectivamente. Por otro lado, el número de unidades del primer modelo debe ser diariamente el doble que el número de unidades del segundo modelo. El sistema de ecuaciones lineales para calcular el número de unidades de cada modelo que puede acabar un empleado en una jornada de 8 horas si se invierten *k* euros diarios de presupuesto, es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x+4y=480 \\ 4x+6y=k \\ x-2y=0 \end{cases}$$

Determinar, según el presupuesto disponible (según los valores del parámetro *k*), los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución. Resuelve los casos en los que el sistema tenga solución.

b) (0,5 puntos) Dada la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & 840 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Tiene inversa? Justifica la respuesta basándote únicamente en los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Ejercicio 2

a) (1,75 puntos) Durante el anterior periodo de rebajas, una tienda ofreció un artículo a 50 euros la unidad y las ventas fueron de 20 unidades. Un estudio revela que por cada euro que disminuya el precio en las próximas rebajas, conseguirá vender 4 unidades más. Por otro lado, la tienda ha asumido un coste de 35 euros por cada unidad del producto. ¿Qué precio de venta por unidad debe fijar para maximizar los beneficios obtenidos durante el nuevo periodo de rebajas?

b) (1,75 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+5x-2 & \text{si } x\le -1 \\ \dfrac{x+3}{x^2+5} & \text{si } -1<x\le 7 \\ \dfrac{bx+1}{(x-5)^2} & \text{si } x>7 \end{cases}$, determinar los valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales es continua en $x=-1$ y $x=7$.

Ejercicio 3

El sueldo mensual de los trabajadores de una empresa sigue una distribución normal con desviación típica de 310 euros. Una muestra aleatoria de 1200 personas da como resultado un sueldo medio de 1545 euros.

a) (1,5 puntos) Obtener el intervalo de confianza del 97 % para el sueldo medio mensual.

b) (1,5 puntos) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

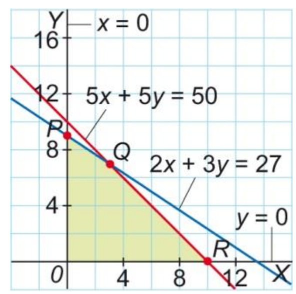
Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: x número de cajas de tipo A y número de cajas de tipo B

Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

	Manzanas	Naranjas	Ingresos
Caja tipo $A(x)$	$5x$	$2x$	$7,5x$
Caja tipo $B(y)$	$5y$	$3y$	$8,5y$
Disponibilidades	50 kg	27 kg	

El objetivo es maximizar los ingresos: $I(x,y) = 7,5x + 8,5y$



Sujeto a:

1. Se disponen de 50 kg de manzanas $\Rightarrow$ $5x + 5y \leq 50$.
2. Se disponen de 27 kg de naranjas $\Rightarrow$ $2x + 3y \leq 27$.

   $x \geq 0$; $y \geq 0$.

La región factible es la sombreada en la figura adjunta. Se obtiene representando las rectas asociadas a las inecuaciones:

$5x + 5y = 50$ $\qquad$ $2x + 3y = 27$

Las coordenadas de los vértices son: $O(0,0)$, $P(0,9)$, $Q(3,7)$, $R(10,0)$.

El punto Q es la solución del sistema $\begin{cases} 5x + 5y = 50 \\ 2x + 3y = 27 \end{cases} \Rightarrow Q(3,7)$.

Como se trata de una región cerrada, la solución óptima, los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de esos ingresos en cada uno de esos vértices son:

En P, $I(0,\ 9) = 9 \cdot 8,5 = 76,5$ €

En Q, $I(3,\ 7) = 3 \cdot 7,5 + 7 \cdot 8,5 = 82$ €.

En R, $I(10,\ 0) = 7,5 \cdot 10 = 75$ €.

Los ingresos máximos, que son 82 €, se consiguen vendiendo 3 cajas de tipo A y 7 de tipo B.

Ejercicio 2

a) La función dada es $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

Corte con el eje X: soluciones de $x^3 + x^2 - 2x = 0$.

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+2) = 0$$

Se obtiene $x = –2$, $x = 0$ y $x = 1$. Puntos (–2, 0), (0, 0) y (1, 0).

Corte con el eje Y: se hace $x = 0$. Punto (0, 0), ya indicado.

b) Crecimiento y decrecimiento.

Derivando e igualando a 0:

$$f´(x) = 3x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Si $x < \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $\frac{-1-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

Se deduce que en $x = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$ hay un máximo relativo.

Si $x > \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Se deduce que en $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$ hay un mínimo relativo.

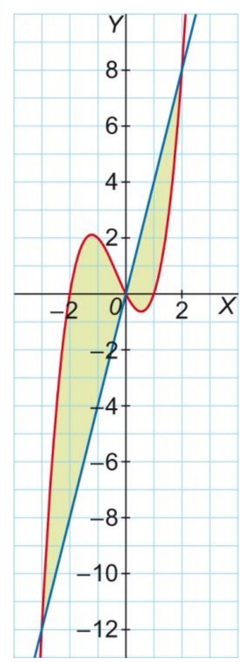
c) Concavidad y convexidad:

$$f´´(x) = 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}, \text{ punto de inflexión.}$$

Para $x < -\frac{1}{3}$, $f´´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).

Para $x > -\frac{1}{3}$, $f´´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).

d) Su representación gráfica es la adjunta.



Algunos puntos de la curva son:

(–3, –12); (2, 8)

Puntos de corte con los ejes de coordenadas: (–2, 0), (0, 0) y (1, 0)

Máximo relativo: $\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, 2{,}113\right)$,

Mínimo relativo: $\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, -0{,}631\right)$

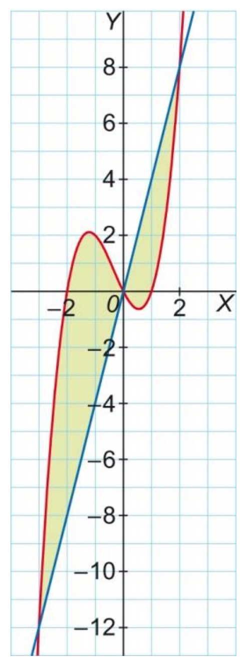
Punto de inflexión: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{20}{27}\right)$.

La curva y la recta se cortan en los puntos (–3, –12), (0, 0) y (2, 8).

Estos puntos se obtienen resolviendo la ecuación $x^3 + x^2 - 2x = 4x$.

$$x^3 + x^2 - 2x = 4x \Rightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 + x - 6x\right) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = -3,\ x = 2.$$

e) El área pedida es la del recinto sombreado:



$$S = \int_{-3}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x - 4x\right) dx + \int_{0}^{2} \left(4x - x^3 - x^2 + 2x\right) dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} \left(x^3 + x^2 - 6x\right) dx + \int_{0}^{2} \left(6x - x^3 - x^2\right) dx \Rightarrow$$

$$S = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{-3}^{0} + \left[3x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} =$$

$$= -\left(\frac{81}{4} - 9 - 27\right) + \left(12 - 4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \frac{253}{12} \text{ u}^2.$$

Ejercicio 3

Se designan por:

A = "Acierta el primer tirador" B= "Acierta el segundo tirador" C = "Acierta el tercer tirador"

$\overline{A}$= "Falla el primer tirador" $\overline{B}$= "Falla el segundo tirador" $\overline{C}$ = "Falla el tercer tirador"

$P(A) = \frac{3}{5}$ $P(\overline{A})=\frac{2}{5}$ $P(B) = \frac{2}{3}$ $P(\overline{B})=\frac{1}{3}$ $P(C) = \frac{5}{6}$ $P(\overline{C})=\frac{1}{6}$

Se trata de sucesos independientes.

a) Probabilidad de que acierte en el blanco uno solo:

$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{3}{90} + \frac{4}{90} + \frac{10}{90} = \frac{17}{90} \approx 0{,}1\hat{8}$$

b) La probabilidad de que los tres acierten es:

$$P(A \cap B \cap C)= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,\hat{3}$$

c) El suceso "acierte al menos uno de ellos" es el contrario de que fallen los tres.

El espacio muestral será el siguiente:

$E=\{ABC, AB\bar{C}, A\bar{B}C, A\bar{B}\bar{C}, \bar{A}BC, \bar{A}B\bar{C}, \bar{A}\bar{B}C, \bar{A}\bar{B}\bar{C}\}$

Nos dicen que **al menos uno de ellos acierta**, mirando los casos posibles observamos que lo cumplen todos los sucesos $ABC, AB\bar{C}, A\bar{B}C, A\bar{B}\bar{C}, \bar{A}BC, \bar{A}B\bar{C}, \bar{A}\bar{B}C$, menos el suceso $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ por eso la probabilidad es $P(A\cup B \cup C)$ = 1- $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$= la suma de todos los sucesos menos $P(\bar{J} \cap \bar{M} \cap \bar{E})$

$$P(A\cup B \cup C) = 1- P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})= 1 - (\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}) = 1 - \frac{2}{90} = \frac{88}{90} \approx 0{,}9\hat{7}$$

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

$$\begin{cases} 2x + 4y = 480 \\ 4x + 6y = k \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Lo primero vamos a calcular los valores de k, para ello calcularemos previamente la matriz A y la matriz A*(matriz ampliada).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & k \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular el parámetro K, debemos realizar el determinante de aquella matriz que sea cuadrada, en este caso escogeremos la matriz ampliada.

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & k \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3840 + 4k - 2880 - 0 + 4k = 6720 + 8k$$

$$|A^*| = 0 \rightarrow 6720 + 8k = 0 \rightarrow k = \frac{6720}{8} = 840$$

Teorema de Rouché-Fröbenius: Vamos a analizar los diferentes casos:

- Si k$\neq$ 840

  Como $|A^*| \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$

  El rango de la matriz A será:

  $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 16 = -4 \neq 0 \rightarrow$ rg(A)=2

  Como $\text{rg}(A^*) \neq \text{rg}(\text{A}) \rightarrow$ **Tendremos un Sistema Incompatible (S.I) (no hay solución)**

- Si k = 840

  Como $|A^*| = 0 \rightarrow \text{rg}(A^*) < 3$

  Tomamos una menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 16 = -4 \neq 0 \rightarrow$ rg(A^*)=2

$$\left.\begin{array}{r} rg(A^*) = 2 \\ rg(\text{A}) = 2 \\ nº\ de\ incógnitas = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Como } rg(A^*) = rg(\text{A}) = nº\ de\ incógnitas = 2$$

$\rightarrow$**Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D) (Una única solución)**

Vamos a calcular el valor del sistema para k = 840:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 480 \\ 4x + 6y = 840 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 120} \\ \boldsymbol{y = 60} \end{cases}$$

b) **Dada la siguiente matriz:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{480} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{840} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

¿Tiene inversa? Justifica la respuesta basándote únicamente en los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Como k = 840 → Observamos que dicha matriz coincide con la matriz ampliada del apartado a) . Como el determinante de esta matriz ampliada para el valor k=840 es igual a cero ($|A^*| = 0$) , la matriz del enunciado **no va a tener matriz inversa**.

Ejercicio 2 a)

Se trata de un ejercicio de Optimización.

Sea x→ número de euros que tendremos que disminuir el precio

Vamos a calcular la función objetivo:

Beneficio = Ingresos – Costes → B(x) = I(x) – C(x)

Ingresos = I(x) = (50-x)·(20+4x)

Costes = C(x) = 35·(20+4x)

Función Objetivo → B(x) = (50-x)·(20+4x) - 35·(20+4x) = 1000-20x+200x-$4x^2 - 700 - 140x$ = $-x^2$+40x+300

B(x)= $-4x^2$+40x+300

- Derivamos la función objetivo y lo igualaremos a cero:

  B´(x) = -8x+40 =0→ x= $\frac{40}{8} = 5$ euros vamos a reducir el precio de venta

- Vamos a comprobar que se trata de un máximo:

  B´´(x) = -8 → B´´(5)=-8<0 → por lo tanto tendremos un máximo

- Calculamos el beneficio:

  B(x)= $-4x^2$+40x+300 → B(5)=-4·5^2+40·5+300= 400 euros

Para maximizar el beneficio, el precio de venta deberá ser de 45 €/ unidad, ascendiendo el beneficio a 400 €.

Ejercicio 2 b)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+5x-2 & \text{si } x\le -1 \\ \dfrac{x+3}{x^2+5} & \text{si } -1<x\le 7 \\ \dfrac{bx+1}{(x-5)^2} & \text{si } x>7 \end{cases}$**, determinar los valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales es continua en $x=-1$ y $x=7$.**

- Para x = -1

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} ax^2+5x-2=a-7 \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{x+3}{x^2+5}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \\ f(-1)=a(-1)^2+5\cdot(-1)-2=a-7 \end{array}\right\}$$ → Para que la función sea continua en x=-1, se tiene que cumplir que:

$$\lim_{x\to -1^-} \boldsymbol{f(x)}=\lim_{x\to -1^+} \boldsymbol{f(x)}=\boldsymbol{f(-1)}$$

$$a-7=\frac{1}{3}\rightarrow \mathbf{a}=\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{3}}$$

- Para x = 7

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 7^-} \frac{x+3}{x^2+5}=\frac{10}{54}=\frac{5}{27} \\ \lim_{x\to 7^+} \frac{bx+1}{(x-5)^2}=\frac{7b+1}{2^2}=\frac{7b+1}{4} \\ f(7)=\frac{7+3}{7^2+5}=\frac{10}{54}=\frac{5}{27} \end{array}\right\}$$ → Para que la función sea continua en x=7, se tiene que cumplir:

$$\lim_{x\to -7^-} \boldsymbol{f(x)}=\lim_{x\to -7^+} \boldsymbol{f(x)}=\boldsymbol{f(7)}$$

$$\frac{7b+1}{4}=\frac{5}{27}\rightarrow \mathbf{b}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}}$$

Para que la función sea continua en x=-1 y x= 7 $\begin{cases} \mathbf{a}=\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{3}} \\ \mathbf{b}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}} \end{cases}$

Ejercicio 3

Sea X la variable aleatoria que mide el sueldo mensual de los trabajadores de una empresa, donde X ~ N(μ, 310).

a) Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1 - \alpha$.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 1200 personas
$\bar{x}$ = 1545 euros

Para una confianza del 97%, α = 0,03,

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,985 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,015}$= 2,17

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,97}(\mu) = \left(1545 - 2{,}17\frac{310}{\sqrt{1200}} ; 1545 + 2{,}17\frac{310}{\sqrt{1200}}\right) = (1525{,}58 ; 1564{,}42).$$

b) **¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?**

Lo primero que tenemos que calcular el Error del apartado a)

E= $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ → E = 2,17$\frac{310}{\sqrt{1200}}$ → E= 19,42

Por lo tanto el error que nos piden en este apartado será: $\frac{E}{2} = 9{,}71$

Para una confianza del 98%, α = 0,02,

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,99 → por lo tanto $Z_{\propto/2}$= 2,33

E= $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 9{,}71 \rightarrow n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{9{,}71}\right)^2 \rightarrow n > \left(\frac{2{,}33\cdot 310}{9{,}71}\right)^2 \rightarrow n > 5533{,}45$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **n= 5534**