OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

a) (3 puntos) Resolver la ecuación matricial $(A+X)B=C$ **con** $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

b) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ **con determinante** $|M|=8$**, calcular:**

b1) (0,25 puntos) $\begin{vmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{vmatrix}$.

b2) (0,25 puntos) $\begin{vmatrix}4a & -3b & c\\ 4d & -3e & f\\ 4g & -3h & i\end{vmatrix}$.

Ejercicio 2

a) (1,75 puntos) El representante de una firma de perfumes tiene un sueldo fijo mensual de 1500 euros. También recibe una comisión, $-0,05x^2+0,7x+30$**, que depende del número de tiendas,** x**, que incluye al mes en su cartera de clientes. Por otro lado, sus gastos fijos mensuales ascienden a 425 euros. ¿Cuántas tiendas debería incorporar al mes para obtener una ganancia máxima?**

b) (1,75 puntos) La gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+5}{2x-7}$ **tiene como asíntota la recta** $y=2x-3$**. Determinar los valores de los parámetros** a **y** b**.**

Ejercicio 3

El peso de las manzanas de un agricultor cosecha sigue unan distribución normal con desviación típica 25 gramos. Una muestra aleatoria de 150 manzanas da como resultado un peso medio de 227 gramos.

a) (1,5 puntos) Obtener el intervalo de confianza del 92 % para el peso medio.

b) (1,5 puntos) Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

(3,5 puntos) Considérese una pequeña empresa dedicada a la fabricación de mobiliario. En concreto, produce dos modelos de armario: *A* y *B*. Se dispone de 12 carpinteros para ensamblar los muebles, cada uno de ellos con una jornada laboral de 8 horas diarias.

El tiempo de ensamblado de cada tipo de mueble y los beneficios obtenidos por la venta de cada unidad se muestran en la tabla adjunta:

	Tiempo de ensamblado	Beneficios
Una unidad del modelo *A*	3 horas	70 euros
Una unidad del modelo *B*	6 horas	160 euros

La producción diaria total debe ser de 15 unidades como mínimo, con la condición de que el número de unidades del modelo *B* debe ser como máximo la mitad del número de muebles del modelo *A*.

Si la empresa vende todo lo que fabrica, ¿cuántos armarios de cada modelo deben producirse al día para obtener los máximos beneficios diarios?

Ejercicio 2

a1) (1,75 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+ax+b}$ determinar los valores de *a* y *b* sabiendo que su gráfica posee un extremo relativo en el punto $\left(-3,\dfrac{9}{4}\right)$.

a2) (1 punto) Para $a=-2$ y $b=-3$, determinar las asíntotas verticales de la función resultante $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-2x-3}$. Esbozar la posición de la gráfica respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

b) (0,75 puntos) Sea ahora la función $f(x)=\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3}$. ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

Ejercicio 3

El último curso 2016/2017, el 45 % de los alumnos de nuevo ingreso en el Grado de Economía es de Santander, el 40 % proviene de otras localidades de Cantabria y el 15 % restante viene de fuera de la región. De los alumnos de nuevo ingreso procedentes de Santander, superaron la Selectividad en junio de 2016 el 70 %; de los procedentes de otras localidades de Cantabria, el 75 %, y de los provenientes de fuera de Cantabria, el 73 %. Si elegimos un alumno de nuevo ingreso al azar,

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Santander y haya superado la Selectividad en junio de 2016?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que haya superado la Selectividad en junio de 2016?

c) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Cantabria pero de fuera de la capital, sabiendo que no superó la selectividad en junio de 2016?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

a) (3 puntos) Resolver la ecuación matricial $(A+X)B=C$ con $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

- Lo primero es despejar la ecuación matricial.

  (A+X)B = C→ (A+X) = C·B^{-1} → **X = C·B^{-1} – A**

- Calculamos la matriz inversa de B:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot \text{Adj}(B)^t$$

1. Calculamos el determinante de B:

$$|B| = \begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix} = 3+6-2=7$$

2. Calculamos los adjuntos de B:

$$\begin{matrix} B_{11} = 1 & B_{12} = -3 & B_{13} = 1\\ B_{21} = 6 & B_{22} = 3 & B_{23} = -1\\ B_{31} = -4 & B_{32} = -2 & B_{33} = 3\end{matrix}$$

3. Escribimos la matriz adjunta.

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 6 & 3 & -1\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(B)^t = \begin{pmatrix}1 & 6 & -4\\ -3 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot \text{Adj}(B)^t \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}1 & 6 & -4\\ -3 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

- **X = C·B^{-1} – A**→ **X=** $\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 6 & -4\\ -3 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}$$

b) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ **con determinante** $|M|=8$**, calcular:**

b1) (0,25 puntos) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$.

b2) (0,25 puntos) $\begin{vmatrix} 4a & -3b & c \\ 4d & -3e & f \\ 4g & -3h & i \end{vmatrix}$.

b1) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \xrightarrow{|M^t| = |M|} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ **= 8**

b2) $\begin{vmatrix} 4a & -3b & c \\ 4d & -3e & f \\ 4g & -3h & i \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} a & -3b & c \\ d & -3e & f \\ g & -3h & i \end{vmatrix} = 4\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = (-12)·$|M|$ = (-12)·8 = **-96**

Ejercicio 2

a) El representante de una firma de perfumes tiene un sueldo fijo mensual de 1500 euros. También recibe una comisión, $-0{,}05x^2+0{,}7x+30$ **, que depende del número de tiendas, *x*, que incluye al mes en su cartera de clientes. Por otro lado, sus gastos fijos mensuales ascienden a 425 euros. ¿Cuántas tiendas debería incorporar al mes para obtener una ganancia máxima?**

x→ número de tiendas

Ganancias → G(x) = I(x) – Ga(x) → Ganancias = Ingresos - Gastos

G(x) = (1500 - 0,05x^2 + 0,7 x +30) – 425 = **-0,05x^2+ 0,7x + 1105** → **Función Objetivo**

- Derivamos la función objetivo y lo igualamos a cero:

  G´(x) = - 0,1x + 0,7 = 0 → x = $\frac{0{,}7}{0{,}1}$ = 7 tiendas

- Comprobación de que la ganancia sea máxima:

  G´´(x) = -0,1 <0 → Se trata de un máximo

- Calculamos la ganancia:

  x = 7

  G(x)= -0,05x^2+ 0,7x + 1105 → G(7) = -0,05·7^2 + 0,7·7 + 1105 = **1107,45 €**

b) La gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+5}{2x-7}$ tiene como asíntota la recta $y=2x-3$. Determinar los valores de los parámetros *a* y *b*.

Tenemos una asíntota oblicua y= 2x-3

Se trata de una función lineal definida por y = mx +n, por lo tanto $\begin{cases} m=2 \\ n=-3 \end{cases}$

m = $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+5}{\frac{2x-7}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+5}{2x^2-7x}=\frac{a}{2}$ → Como m=2 → $\frac{a}{2}$ = 2→ **a=4**

n= $\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$ = $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{ax^2+bx+5}{2x-7}-2x\right]$ = $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+bx+5-4x^2+14x}{2x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{bx+14x+5}{2x-7}=\frac{b+14}{2}$

Como n= -3 → $\frac{b+14}{2}=-3$ → b+14=-6→ **b= -20**

La función resultante será: **f(x) = $\frac{4x^2-20x+5}{2x-7}$**

Ejercicio 3

El peso de las manzanas de un agricultor cosecha sigue unan distribución normal con desviación típica 25 gramos. Una muestra aleatoria de 150 manzanas da como resultado un peso medio de 227 gramos.

a) (1,5 puntos) Obtener el intervalo de confianza del 92 % para el peso medio.

b) (1,5 puntos) Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior.

Sea X la variable aleatoria que mide el peso de las manzanas que un agricultor cosecha, donde X ~ N(μ, 25).

a) Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1-\alpha$.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 150 manzanas
$\bar{x}$ = 227 gramos

Para una confianza del 92%, α = 0,08,

P(Z≤ $Z_{\alpha/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,96 → por lo tanto $Z_{\alpha/2}=Z_{0,04}$= 1,75

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,92}(\mu) = \left(227 - 1{,}75\frac{25}{\sqrt{150}}\,;\,227 + 1{,}75\frac{25}{\sqrt{150}}\right) = (223{,}43\,;\,230{,}57).$$

b) Lo primero que tenemos que calcular el Error del apartado a)

E= $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to$ E = 1,75$\frac{25}{\sqrt{150}}$ → E= 3,57

Por lo tanto el error que nos piden en este apartado será: $\frac{E}{3} = 1{,}19$

Para una confianza del 98%, α = 0,02,

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,99 → por lo tanto $Z_{\propto/2}$= $Z_{0,01}$= 2,33

E= $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1{,}19 \to n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{1{,}19}\right)^2 \to n > \left(\frac{2{,}33\cdot 25}{1{,}19}\right)^2 \to n > 2396{,}06$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **n= 2397**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Se trata de un ejercicio de programación lineal.

x→ número de armarios de tipo A.

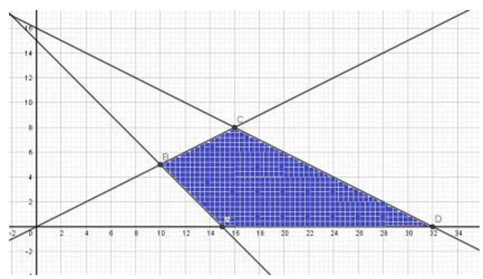
y→ número de armarios de tipo B

	Cantidad	Tiempo de ensamblado	Beneficios
Armarios modelo *A*	**X**	**3x**	**70x**
Armarios modelo *B*	**Y**	**6y**	**160y**
Disponibilidad		**12 carpinteros·8 = 96 horas**	

El objetivo es maximizar los beneficios: **B(x)= 70x+160y**

Restricciones:

$$\begin{cases} x+y \geq 15 \\ y \leq \frac{x}{2} \\ 3x+6y \leq 96 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y \geq 15 \\ x \geq 2y \\ x+2y \leq 32 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima, los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de esos ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x+y=15 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=0 \end{cases}$ → A(15,0) → B_A=70·15+160·0 = 1050 €

B$\begin{cases} x=2y \\ x+y=15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=5 \end{cases} \rightarrow B(10,5) \rightarrow B_B$= 70·10+160·5 = 1500€

C$\begin{cases} x=2y \\ x+2y=32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=8 \end{cases}$ → C(16,8) → B_C= 70·16+160·8 = 2400€

D$\begin{cases} y=0 \\ x+2y=32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=32 \\ y=0 \end{cases}$ → D(32,0) → B_D= 70·32+160·0 = 2240€

Para obtener el máximo beneficio deben fabricar 16 armarios de tipo A y 8 armarios de tipo B, siendo el beneficio de 2400 €.

Ejercicio 2

a1) (1,75 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+ax+b}$ determinar los valores de *a* y *b* sabiendo que su gráfica posee un extremo relativo en el punto $\left(-3,\dfrac{9}{4}\right)$.

- El enunciado nos dice que posee un extremo relativo en $x=-3$:

  f´(-3)=0

- Nos dan también la coordenada de la función, que pasa por el punto $\left(-3,\frac{9}{4}\right)$

  f(-3) = $\frac{9}{4}$

  - f´(x) = $\frac{6x\cdot(x^2+ax+b)-(2x+a)\cdot 3x^2}{(x^2+ax+b)^2}=\frac{6x^3+6ax^2+6bx-6x^3-3ax^2}{(x^2+ax+b)^2}=\frac{3ax^2+6bx}{(x^2+ax+b)^2}$

    f´(-3) = 0 → f´(-3) = $\frac{3a(-3)^2+6b(-3)}{((-3)^2+a(-3)+b)^2}=0$ → 27a-18b =0 → 3a-2b=0

  - f(-3) = $\frac{27}{9-3a+b}=\frac{9}{4}$ → 3a –b =-3

Calculamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}3a-2b=0\\3a-b=-3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-3\end{cases}$$

La función resultante será : **f(x) = $\frac{3x^2}{x^2-2x-3}$**

A2) Para *a* = –2 y *b* = –3, determinar las asíntotas verticales de la función resultante $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-2x-3}$. Esbozar la posición de la gráfica respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

- Calculamos el dominio de la función:

$x^2-2x-3\neq 0 \rightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq 3 \end{cases}$ Dominio → D(f) = ∀xϵℝ - $\{-1,3\}$

- Calculamos las Asíntotas Verticales:
  - Para x =-1

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{3}{0}\rightarrow \left[\frac{k}{0}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\frac{+}{0^+}=+\infty$ → Tendremos una Asíntota Vertical en x= -1

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\frac{+}{0^-}=-\infty$$

  - Para x = 3

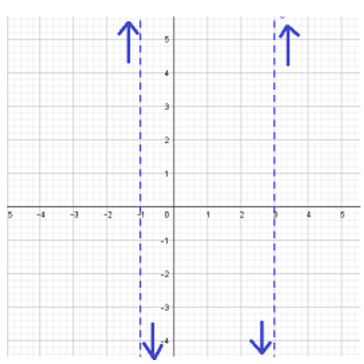
$$\lim_{x\to 3} f(x)=\frac{27}{0}\rightarrow \left[\frac{k}{0}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\frac{+}{0^-}=-\infty$ → Tendremos una Asíntota Vertical en x= 3

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\frac{+}{0^+}=+\infty$$

Esbozamos la posición de la función con respecto a las asíntotas:



b) (0,75 puntos) Sea ahora la función $f(x)=\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3}$. ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

- Calculamos el dominio de la función:

$x^2-2x-3\neq 0 \rightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq 3 \end{cases}$ Dominio → D(f) = ∀x∈ℝ - $\{-1,3\}$

- Estudiamos la continuidad para x =-1

$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{3\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-6}{(-1)^2-2\cdot(-1)-3} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to -1}\frac{3(x-2)}{(x-3)} = \frac{3\cdot(-3)}{(-1-3)} = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}$$

Como $\exists \lim_{x\to -1} f(x)\ y\ \nexists f(-1)$ → Tendremos en x=-1 una **Discontinuidad Evitable**

Para evitar dicha discontinuidad definiremos de nuevo la función:

f(x) = $\begin{cases} \frac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3} & \boldsymbol{si\ x\neq -1} \\ \frac{9}{4} & \boldsymbol{si\ x=-1} \end{cases}$

- Estudiamos la continuidad para x =3

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{3\cdot(3)^2-3\cdot(3)-6}{(3)^2-2\cdot(3)-3} = \frac{12}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{+}{0^-} = -\infty$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

→ Como los límites laterales tienden a $\pm\infty$ → **En x=3 tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito**

Ejercicio 3

El último curso 2016/2017, el 45 % de los alumnos de nuevo ingreso en el Grado de Economía es de Santander, el 40 % proviene de otras localidades de Cantabria y el 15 % restante viene de fuera de la región. De los alumnos de nuevo ingreso procedentes de Santander, superaron la Selectividad en junio de 2016 el 70 %; de los procedentes de otras localidades de Cantabria, el 75 %, y de los provenientes de fuera de Cantabria, el 73 %. Si elegimos un alumno de nuevo ingreso al azar,

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Santander y haya superado la Selectividad en junio de 2016?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que haya superado la Selectividad en junio de 2016?

c) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Cantabria pero de fuera de la capital, sabiendo que no superó la selectividad en junio de 2016?

Se designan:

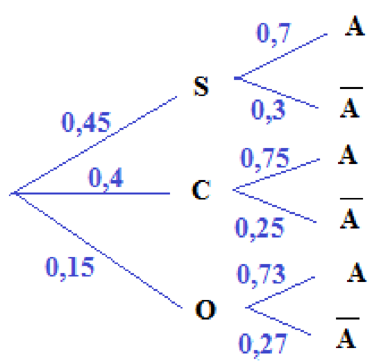
S=" Estudiantes procedentes de Santander"

C=" Estudiantes que vienen de otras localidades de Cantabria"

O="Estudiantes que vienen de fuera de la región"

A= " Aprueban la selectividad"

$\bar{A}$=" Suspenden la selectividad"



a) Se trata de una Probabilidad Compuesta

P(S∩ A) = P(S)·P(A/S) = 0,45·0,7 = **0,315**

El Porcentaje será del 31,5%

b) Se trata de una Probabilidad Total

P(A) = P(S)·P(A/S)+ P(C)·P(A/C)+ P(O)·P(A/O)

P(A) = 0,45·0,7+0,4·0,75+0,15·0,73 = 0,7245

El Porcentaje será del 72,45%

P($\bar{A}$) = 1 –P(A) = 1 -0,7245 = 0,2755

c) Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes

P(C/$\bar{A}$)= $\frac{P(C\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(C)\cdot P(\bar{A}/C)}{P(\bar{A})} = \frac{0,4\cdot 0,25}{0,2755} = 0,363$

El porcentaje será del 36,3%