INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

(3,5 puntos) Analizar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

B. [0,5 PUNTOS] Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior, analizar si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen o no tienen solución:

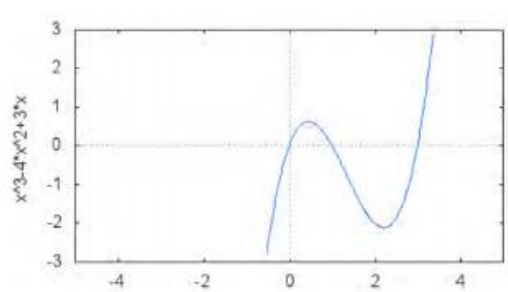
B1. [0,25 PUNTOS] $\begin{cases} \mathbf{x + 2y = -1} \\ \mathbf{-3y = 1} \\ \mathbf{-2x + 2y = 4} \end{cases}$ **B2. [0,25 PUNTOS]** $\begin{cases} \mathbf{x + 2y = -4} \\ \mathbf{-3y = 2} \\ \mathbf{-2x + 2y = 4} \end{cases}$

C. [0,5 PUNTOS] Resolver los casos compatibles del apartado B.

Ejercicio 2

A. [1,75 PUNTOS] Un agricultor cultiva árboles frutales. En concreto tiene a su cargo 10 limoneros y cada uno produce 70 frutos. Tiene pensado ampliar el huerto pero ha calculado que por cada nuevo árbol plantado, disminuye en 5 unidades el número de limones producido por cada ejemplar. ¿Cuántos árboles más debería plantar para obtener la producción total máxima?

B. [1,75 PUNTOS] Calcular el área total de la región delimitada por la curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje OX:



Ejercicio 3

[3 PUNTOS] Una fábrica de botones cuenta con tres máquinas, A, B y C, por las que pasan respectivamente el 45%, el 23% y el 32% de la producción total. El 2% de los botones que pasan por la máquina A salen defectuosos, en el caso de la B es el 1%, y en el de la C el 3%. Seleccionamos un botón al azar de entre todos los que han salido de la fábrica:

A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y haya pasado por la máquina B?

C. [1 PUNTO] Si es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina C?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [**3,5 PUNTOS]**

Un pastelero dispone de 125 kg de harina, 25 kg de azúcar y 30 kg de mantequilla para elaborar dos tipos de tarta: hojaldre y chocolate. Una docena de tartas de hojaldre requiere 2,5 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Para una docena de tartas de chocolate se necesitan 5 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Si el beneficio obtenido de cada docena de tartas de hojaldre es de 15 euros y de cada docena de tartas de chocolate es de 25 euros, ¿con cuántas docenas de cada tipo de dulce se obtendrán los máximos beneficios?

Ejercicio 2

A. (2,5 puntos) Dada la función f(x) = $\begin{cases} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} & x \neq -2 \ y \ x \neq 1 \\ ax \, , & x = -2 \end{cases}$

A1. [1,5 PUNTOS] Determinar los valores del parámetro a para los cuales f(x) es continua en x = –2.

A2. [1 PUNTO] Determinar las asíntotas verticales de f(x). Esbozar la posición de la gráfica de la función respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

B. [1 punto] Dada la función f(x)= x^3+ax+5**, calcular el valor de a para que** $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 60$

Ejercicio 3

La asistencia anual a espectáculos teatrales de los habitantes de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 2. Una muestra aleatoria de 850 personas da como resultado una media de 7 asistencias al año.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la asistencia media anual.
B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

El determinante de la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es $|A|$ = -12 – 4a + $6a^2$-2a = $6a^2$-6a -12

Se anula cuando $6a^2$-6a -12= 0 → $a^2 - a - 2 = 0$ → a= $\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ → $\begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$

1) Si a ≠ –1 y a≠ 2 se tendrá que rg(A) = 3, pues $|A| \neq 0$

2) Si a = -1 o a = 2 rg(A) = 2, pues el menor (de orden 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$ ≠0

B)

$\begin{cases} \mathbf{x + 2y = -1} \\ \mathbf{-3y = 1} \\ \mathbf{-2x + 2y = 4} \end{cases}$ Estamos ante un sistema en el que el valor de la a = 1 y por lo tanto estaríamos en el caso de a≠-1 y a≠ 2.

Por lo tanto el rg(A*) = 3 ≠ rg (A) = 2 → **Teorema de Rouché-Fröbenius**:

Como rg(A*) ≠ rg (A) → Se trataría de un Sistema Incompatible. El Sistema no tiene Solución.

$\begin{cases} \mathbf{x + 2y = -4} \\ \mathbf{-3y = 2} \\ \mathbf{-2x + 2y = 4} \end{cases}$ Estamos ante un sistema en el que el valor de la a = 2.

Por lo tanto el rg(A*) = 2 = rg (A) = 2 → **Teorema de Rouché-Fröbenius**:

Como rg(A*) = rg (A) = nº de incógnitas = 2 → Se trataría de un **Sistema Compatible Determinado**. (Una única solución)

Para resolver el sistema escogemos aquella menor que garantice que el rango de la matriz sea 2.

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ -3y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{8}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Ejercicio 2

A. [1,75 PUNTOS] Un agricultor cultiva árboles frutales. En concreto tiene a su cargo 10 limoneros y cada uno produce 70 frutos. Tiene pensado ampliar el huerto pero ha calculado que por cada nuevo árbol plantado, disminuye en 5 unidades el número de limones producido por cada ejemplar. ¿Cuántos árboles más debería plantar para obtener la producción total máxima?

Se trata de un ejercicio de Optimización.

Sea x→ número de árboles adicionales que plantamos

Vamos a calcular la función objetivo:

Producción → P(x)

Función Objetivo → Producción → P(x) = (10 + x)·(70-5x) = $\mathbf{-5x^2+20x+700}$

- Derivamos la función objetivo y lo igualamos a cero:

  P´(x) = - 10x + 20→ -10x +20 = 0 → x= $\frac{20}{10}=2$ árboles adicionales que debemos plantar.

- Vamos a comprobar que se trata de un máximo:

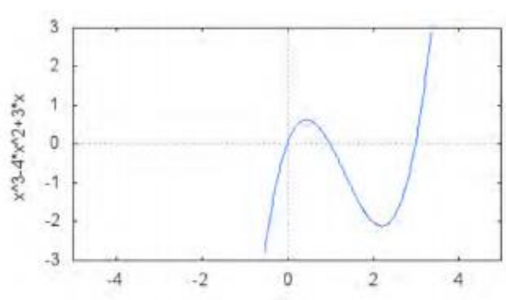
  P´´(x) = -10 → P´´(2)= -10 <0 → por lo tanto tendremos un máximo

- Calculamos la producción:

  P(x)= $-5x^2+20x+700$ → P(2)= $-5\cdot 2^2+20\cdot 2+700=720$ limones

Para maximizar la producción, deberíamos plantar 2 limoneros, ascendiendo la producción a 720 limones.

B. [1,75 PUNTOS] Calcular el área total de la región delimitada por la curva y = $x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje OX:



Observando la función vemos que corta con el eje OX en x=0, x= 1 y x=3

El área pedida es la del recinto sombreado:

$$S=\int_0^1[(x^3-4x^2+3x)-0]dx+\int_1^3[0-(x^3-4x^2+3x)]dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_1^3=\frac{5}{12}u^2+\frac{32}{12}u^2=\mathbf{\frac{37}{12}u^2}$$

Ejercicio 3

[3 PUNTOS] Una fábrica de botones cuenta con tres máquinas, A, B y C, por las que pasan respectivamente el 45%, el 23% y el 32% de la producción total. El 2% de los botones que pasan por la máquina A salen defectuosos, en el caso de la B es el 1%, y en el de la C el 3%. Seleccionamos un botón al azar de entre todos los que han salido de la fábrica:

A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

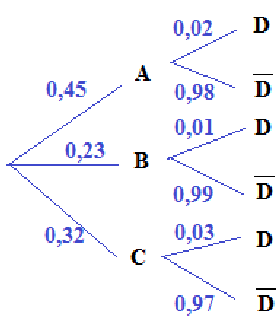
B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y haya pasado por la máquina B?

C. [1 PUNTO] Si es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina C?

Se designan:

D=" Botones Defectuosos"

$\overline{D}$=" Botones no Defectuosos"



a)Se trata de una Probabilidad Total

P($\overline{D}$) = P(A)·P($\overline{D}$/A)+ P(B)·P($\overline{D}$/B)+ P(C)·P($\overline{D}$/C) =

= 0,45·0,98 + 0,23·0,99 + 0,32·0,97 = 0,9791

El porcentaje será del 97,91 %

La probabilidad de que sea defectuoso: P(D) = 1 – P($\overline{D}$) = 1- 0,9791 = 0,0209

b) Se trata de una Probabilidad Compuesta

P(B∩ D) = P(B)·P(D/B) = 0,23·0,01 = **0,0023**

El Porcentaje será del 0,23%

c) Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes

P(C/D)= $\frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)\cdot P(D/C)}{P(D)} = \frac{0{,}32\cdot 0{,}03}{0{,}0209} = 0{,}4593$

El porcentaje será del 45,93%

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

<u>Ejercicio 1</u> [3,5 PUNTOS]

Un pastelero dispone de 125 kg de harina, 25 kg de azúcar y 30 kg de mantequilla para elaborar dos tipos de tarta: hojaldre y chocolate. Una docena de tartas de hojaldre requiere 2,5 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Para una docena de tartas de chocolate se necesitan 5 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Si el beneficio obtenido de cada docena de tartas de hojaldre es de 15 euros y de cada docena de tartas de chocolate es de 25 euros, ¿con cuántas docenas de cada tipo de dulce se obtendrán los máximos beneficios?

Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: $x \rightarrow$ número de docenas de tartas de hojaldre

$y \rightarrow$ número de docenas de tartas de chocolate.

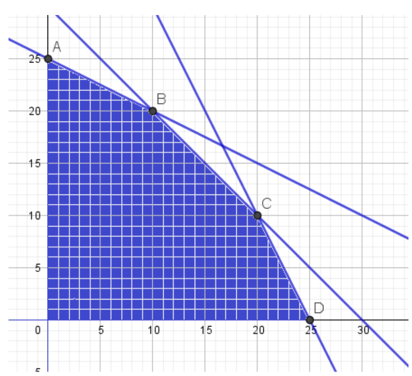
Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

	Cantidad	Harina	Azúcar	Mantequilla	Beneficio
Docenas de Hojaldre	x	2,5x	x	x	15x
Docenas de Chocolate	y	5y	0,5y	y	25y
Disponibilidad		125	25	30	

El objetivo es maximizar los beneficios: B(x,y) = 15x + 25y

Restricciones:

$$\begin{cases} 2{,}5x + 5y \leq 125 \\ x + 0{,}5y \leq 25 \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 50 \\ 2x + y \leq 50 \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima, los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos beneficios en cada uno de esos vértices son:

0 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ A(0,0) $\rightarrow I_0$= 15·0 + 25·0 = 0€

A$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 25 \end{cases} \rightarrow A(0{,}25) \rightarrow I_A$= 15·0 + 25·25 =625€

B$\begin{cases} x + 2y = 50 \\ x + y = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \end{cases} \rightarrow B(10{,}20) \rightarrow I_B$= 15·10 + 25·20 = 650€

C$\begin{cases} x + y = 30 \\ 2x + y = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases} \rightarrow$ C(20,10) $\rightarrow I_C$= 15·20+25·10 = 550€

D$\begin{cases} 2x + y = 50 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ D(25,0)$\rightarrow I_D$= 15·25 + 25·0 = 375€

Para obtener los máximos Beneficios deben preparar 10 docenas de tartas de hojaldre y 20 docenas de tartas de chocolate, siendo los beneficios de 650 €.

Ejercicio 2

A. (2,5 puntos) Dada la función f(x) = $\begin{cases} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} & x \neq -2 \text{ y } x \neq 1 \\ ax, & x = -2 \end{cases}$

A1. [1,5 PUNTOS] Determinar los valores del parámetro a para los cuales f(x) es continua en x= –2.

- Para x = -2

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to -2^-} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] \rightarrow \lim_{x\to -2^-} \frac{2(x+2)}{3(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{2}{3(x-1)} = -\frac{2}{9} \\ \lim_{x\to -2^+} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] \rightarrow \lim_{x\to -2^+} \frac{2(x+2)}{3(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{2}{3(x-1)} = -\frac{2}{9} \\ f(-2) = a(-2) = -2a \end{array}\right\} \rightarrow$$

Para que la función sea continua en x=-2, se tiene que cumplir que:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$$

-2a = - $\frac{2}{9} \rightarrow a = \frac{1}{9}$

A2. [1 PUNTO] Determinar las asíntotas verticales de f(x). Esbozar la posición de la gráfica de la función respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

Se trata de una función definida a trozos, donde tenemos una función racional y una función lineal. Para determinar las asíntotas verticales debemos encontrar aquellos puntos en los que la función no está definida. En el caso de la función Racional dichos puntos serán aquellos que anulen el denominador.

La función racional es: $f(x) = \frac{2x+4}{3x^2+3x-6}$ por lo tanto calcularemos los puntos que anulen el denominador.

$3x^2 + 3x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$ por lo tanto el dominio será: $D(f) = \forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-2,1\}$

Calculamos las posibles asíntotas verticales:

- Para x= -2

$\lim_{x\to -2} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] \rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{2(x+2)}{3(x+2)(x-1)} = -\frac{2}{9} \rightarrow$ La función **no** tendrá asíntota vertical en x= -2

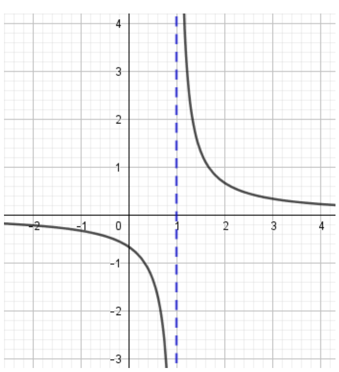
- Para x= 1

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} = \left[\frac{6}{0}\right] \rightarrow \left[\frac{k}{0}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} = \frac{+}{0^-} = -\infty$ $\rightarrow$ Tendremos una asíntota vertical en x = 1

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+4}{3x^2+3x-6} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$



B. [1 punto] Dada la función f(x)= x^3+ax+5, calcular el valor de a para que $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 60$

$$\int_{-1}^{3}(x^3 + \mathrm{ax} + 5)\mathrm{dx} = 60 \rightarrow \left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^2}{2} + 5x\right]_{-1}^{3} = 60 \rightarrow \left[\frac{3^4}{4} + \frac{a\cdot 3^2}{2} + 5\cdot 3\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{a\cdot(-1)^2}{2} + 5\cdot(-1)\right] = 60$$

$$\left[\frac{81}{4} + \frac{9a}{2} + 15\right] - \left[\frac{1}{4} + \frac{a}{2} - 5\right] = \left[\frac{81 + 18a + 60}{4}\right] - \left[\frac{1 + 2a - 20}{4}\right] = \frac{160 + 16a}{4} = 40 + 4a = 60$$

40 + 4a = 60 → 4a = 20 → **a = $\frac{20}{4}$ = 5**

Ejercicio 3

La asistencia anual a espectáculos teatrales de los habitantes de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 2. Una muestra aleatoria de 850 personas da como resultado una media de 7 asistencias al año.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la asistencia media anual.
B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

Sea X la variable aleatoria que mide la asistencia anual a espectáculos teatrales de los habitantes de una gran ciudad el sueldo mensual, donde X ~ N(μ, 2).

a) Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 850 personas
$\bar{x}$ = 7 asistencias

Para una confianza del 94%, α = 0,06,

P(Z≤ $Z_{\alpha/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,97 → por lo tanto $Z_{\alpha/2} = Z_{0,03}$= 1,88

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,94}(\mu) = \left(7 - 1{,}88\frac{2}{\sqrt{850}}\,;\,7 + 1{,}88\frac{2}{\sqrt{850}}\right) = (6{,}871\,;\,7{,}129)$$

b) Lo primero que tenemos que calcular el Error del apartado a)

E= $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ → E = $1{,}88\frac{2}{\sqrt{850}}$ → E= 0,129

Por lo tanto el error que nos piden en este apartado será: $\frac{E}{2} = 0{,}064$

Para una confianza del 97%, α = 0,03,

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,985 → por lo tanto $Z_{\propto/2}$= 2,17

E= $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0{,}064 \rightarrow n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{0{,}064}\right)^2 \rightarrow n > \left(\frac{2{,}17\cdot 2}{0{,}064}\right)^2 \rightarrow n > 4598{,}54$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **n= 4599**