UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.
No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
No se permite calculadora gráfica, ni programable. Está prohibido el uso de teléfonos móviles.

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. **[3 PUNTOS] Determinar, según los valores del parámetro *a*, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.**

$$\begin{cases} -x+y=2 \\ 2x+3y=-a \\ 6x+4y=2 \end{cases}$$

B. **[0,5 PUNTOS] Resolver los casos compatibles.**

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} ax-3 & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{x^2-6x+5}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

A1. **[1 PUNTO] Determinar el valor del parámetro *a* para el cual la función es continua en todo su dominio.**

A.2. **[0,75 PUNTOS] Considerando el valor de *a* obtenido en el apartado anterior: ¿Existe la función derivada en el punto $x = 1$? ¿Y en $x = 0$? Justificar las respuestas.**

B. **[1,75 PUNTOS] La gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax^2+bx-4}{x-3}$ tiene como asíntota oblicua a la recta $y=x$. Por tanto, ¿cuáles son los valores de *a* y *b*? ¿Existen más asíntotas? Justificar las respuestas.**

EJERCICIO 3 [3 PUNTOS]

En su primer año de carrera, las probabilidades que un alumno tiene de aprobar las tres asignaturas más difíciles, *A*, *B* y *C*, son de 2/7, 4/9 y 1/3 respectivamente.

a) **[1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad que tiene de suspender las tres?**

b) **[1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad que tiene de suspender solo una de las tres asignaturas?**

c) **[1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de aprobar al menos una?**

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [1,5 PUNTOS] Determinar para qué valores de a el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix}$ es 2.

B. [1.5 PUNTOS] Basándote en los resultados obtenidos en el apartado A, ¿Podrías afirmar si el siguiente sistema tiene solución?

$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 3 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$. ¿Y el siguiente? $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$.

C. [0,5 PUNTOS] En caso de existir soluciones en alguno de los dos sistemas anteriores, calcúlalas.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x-1}$, determinar:

A1. [0,2 PUNTOS] El dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.

A2. [0,7 PUNTOS] Las asíntotas.

A3. [0,7 PUNTOS] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos.

A4. [0,7 PUNTOS] Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

A5. [0,7 PUNTOS] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

B. [0,5 PUNTOS] Calcular la integral $\int x\left(2x^2 - 5\right)^3 dx$.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

A. [1,5 PUNTOS] La altura de los estudiantes de determinada ciudad sigue una distribución normal con desviación típica σ. Con una muestra aleatoria de 375 individuos se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza del 90 %, (169.3 cm, 170.7 cm), para la estatura media. Determinar la media muestral y la desviación típica.

B. [1,5 PUNTOS] El peso de los estudiantes de la misma ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 4. Con una muestra aleatoria de 375 jóvenes se ha obtenido un peso medio de 65.3 kg. Determinar el intervalo de confianza del 93 % para el peso medio.

Opción 1

Ejercicio 1

Se trata de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas.

Para que tenga solución única es necesario que rg(A) = rg(A*) = 2, siendo A la matriz de coeficientes y A* la matriz ampliada. Si rg(A*) = 3, el sistema será incompatible.

Las matrices son: $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -a \\ 6 & 4 & 2 \end{array}\right)$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

El determinante de A* vale:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -a \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 16 - 6a - 36 - 4 - 4a = -10a - 30 = 0$$

Este determinante vale 0 si a = - 3.

Por tanto:

- Si $a \neq -3 \Rightarrow$ rg(A^*) = 3 y rg(A) = 2. El sistema será incompatible.
- Si $a = -3$, rg(A) = rg(A^*) = 2. El sistema será compatible determinado.

b) Si a = 3 el sistema es: $\begin{cases} -x+y=2 \\ 2x+3y=3 \\ 6x+4y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=2 \\ 2x+3y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3}{5} \\ y = \dfrac{7}{5} \end{cases}$

Ejercicio 2

A1. La función dada, $f(x) = \begin{cases} ax-3 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{x^2-6x+5}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, está definida en todo ℝ (también en x = 1, pues para $x \le 1$ es $f(x) = ax-3$. No obstante, en x = 1 puede no ser continua.

Para que sea continua en x = 1 debe cumplirse que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = a-3$. Por tanto, es necesario que los límites laterales, en x = 1, existan y sean iguales.

Por la izquierda: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax-3) = a-3$.

Por la derecha: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-6x+5}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-5)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} (x-5) = -4$.

Luego: a -3 = -4 $\Rightarrow$ a = –1.

A2. La función continua es $f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x \le 1 \\ x-5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ (No hay inconveniente en simplificar la segunda función, pues el denominador no se anula en ningún punto de su dominio: $x > 1$.)

Su derivada, salvo en x = 1, es $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

No es derivable en x = 1, pues las derivadas laterales no son iguales: $f'(1^-) = -1$ y $f'(1^+) = 1$.

En cambio, sí es derivable en cualquier otro punto. En particular en x = 0, siendo $f'(0) = -1$.

B. La recta y= mx +n es asíntota oblicua de la curva f(x) cuando se cumple que:

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m$, $m\neq 0$ y ∞; $n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$, $n\neq\infty$.

En este caso: m = 1 y n = 0, pues la asíntota es la recta de ecuación y=x.

Por tanto debe cumplirse que:

- $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx-4}{x(x-3))}=1.$

  Como $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx-4}{x(x-3))}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx-4}{x^2-3x}=a$ (Basta con transformar la función dada dividiendo sus términos por x^2.) En consecuencia, a = 1.

- $\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+bx-4}{x-3}-x\right)=lím_{x\to\infty}\frac{bx+3x-4}{x-3}=b+3$ (Se ha dividido por x.)

  Luego, $b+3=0\Rightarrow b=-3$.

Por tanto, la función buscada es $f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x+1}$.

Esta función tiene otra asíntota vertical, la recta x = 3, pues $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x-4}{x-3}=\infty$.

Ejercicio 3

Si definimos los sucesos: A= "Aprueba la asignatura más difícil", B = "Aprueba la segunda prueba más difícil y C = "Aprueba la tercera prueba más difícil", las probabilidades de superar o no superar la prueba son:

La probabilidad de que apruebe la asignatura más difícil es P(A)= $\frac{2}{7}$ y de que no la supere P($\bar{A}$)=$\frac{5}{7}$

La probabilidad de que apruebe la segunda asignatura más difícil es P(B)= $\frac{4}{9}$ y de que suspenda P($\bar{B}$)=$\frac{5}{9}$.

La probabilidad de que apruebe la tercera asignatura más difícil P(C)=$\frac{1}{3}$ y de que suspenda P($\bar{C}$)=$\frac{2}{3}$.

En todos los casos los sucesos (aprobar o no aprobar) son independientes.

A. P(los tres suspenden) = P($\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$)= P($\bar{A}$) $\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})$ = $\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{3}$. = 0,2646 .

B. Para que sólo apruebe una de las asignaturas, pueden ocurrir tres situaciones en las que debe aprobar una y suspender las otras dos:

P($A\cap B\cap\bar{C}$) + P($A\cap\bar{B}\cap C$) + P($\bar{A}\cap B\cap C$)= $=\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}$ = 0,2434

C. El suceso de que, al menos, apruebe una asignatura, es el contrario al que suspendan las tres asignaturas:

P(al menos uno la supera) = 1– P(los tres suspenden) = 1- $\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{3}$. = 0,7354