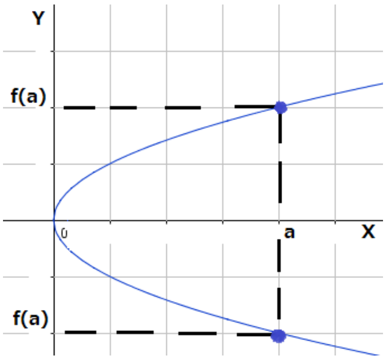
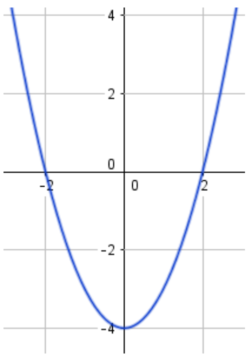
1) **Teoría de funciones**

- Una función (f) es la relación entre un conjunto de elementos dado X (llamado dominio) y otro conjunto de elementos Y (llamado recorrido o imagen) de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento y (f(x)) del recorrido.
- El subconjunto de números reales x para los que la función está definida se denomina Dominio. D(f)
- El subconjunto de número reales formado por todos los valores de y que toma la función se denomina Imagen o recorrido. Im(f) o R(f)
- El número real x toma el nombre de variable independiente y el número real y toma el nombre de variable dependiente.



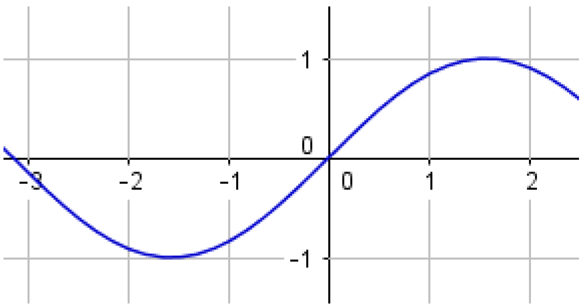
Esta gráfica **no corresponde con una función**. Si nos vamos a la definición nos dice que a cada elemento de x le corresponde un **único** valor de y. Si observamos la gráfica para un valor de x le corresponde varios valores de y.

Ejemplo: Vamos a calcular el dominio y la imagen o recorrido de las siguientes funciones:



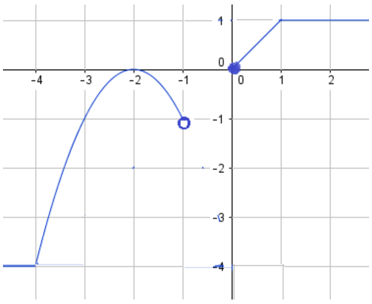
D(f) = $\forall x \in \mathbb{R}$

Im(f) o R(f) = [-4, ∞)



D(f) = $\forall x \in \mathbb{R}$

Im(f) o R(f) = [-1,1]



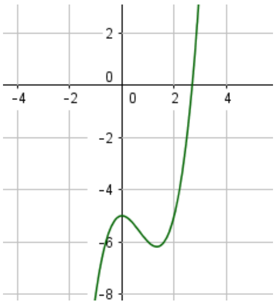
Dominio → D(f) = xϵ $(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$

Imagen → Im(f) = R(f) = $(-\infty,1]$

2) **<u>Cálculo del dominio de una función a partir de la expresión analítica</u>**

- **Dominio de la función polinómica.**

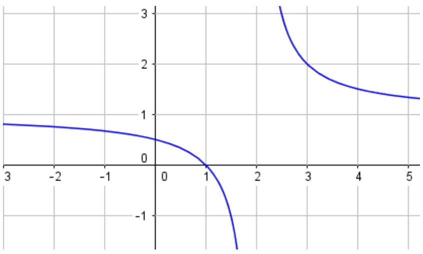
  El dominio de una función polinómica está fomado por todos los valores reales ($\mathbb{R}$). D(f)= $\forall$ x$\in \mathbb{R}$



Ejemplo: $\mathbf{f(x) = x^3\text{-}2x^2\text{-}5}$ → D(f) = $\forall$ x$\in \mathbb{R}$

- **Dominio de una función racional.**

  El dominio de una función racional está formado por todos los valores reales ($\mathbb{R}$)., exceptuando los que anulan el denominador.



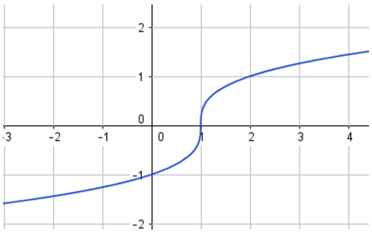
Ejemplo: f(x) = $\frac{x-1}{x-2}$

Condición: x-2≠0 → x≠2 →D(f) = $\forall$ x$\in \mathbb{R} - \{2\}$

- **Dominio de la función radical**

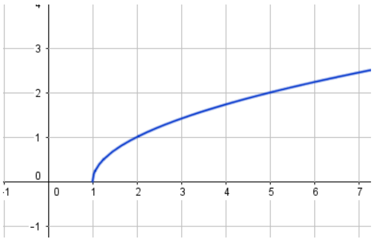
f(x)= $\sqrt[n]{g(x)} \rightarrow \begin{cases} n\ par \rightarrow D(f) = \{x \in D(g) / g(x) \geq 0\} \\ n\ impar \rightarrow D(f) = D(g) \end{cases}$

- El dominio de una función radical de índice impar está formado por todos los valores reales (ℝ). D(f)= ∀ x∈ ℝ



Ejemplo: f(x) = $\sqrt[3]{x-1}$ → D(f)= ∀ x∈ ℝ

- El dominio de una función radical de índice par está formado por todos los valores del dominio del radicando que hacen que éste sea mayor o igual que cero.



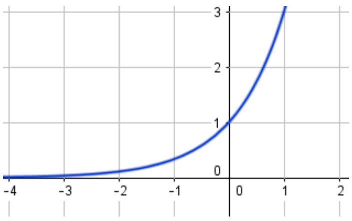
Ejemplo:

f(x) = $\sqrt{x-1}$

Condición: x-1≥ 0 → $x \geq 1$ D(f) = ∀x∈ $[1, \infty)$

- **Dominio de una función exponencial**

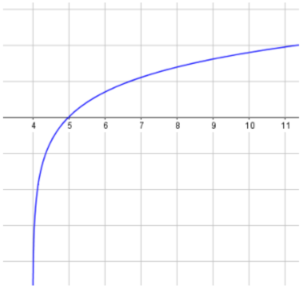
El dominio de una función exponencial está formado por todos los valores reales (ℝ). D(f)= ∀ x∈ ℝ



Ejemplo: f(x) = 3^x → D(f)= ∀ x∈ ℝ

- **Dominio de una función logarítmica**

  El dominio de una función logarítmica está formado por todos los valores que hacen que la función que se encuentra dentro del logaritmo sea mayor que 0.



Ejemplo: f(x)= $\log(x-4)$

Condición: x - 4 > 0 → x > 4 → D(f)= ∀ x∈ $\mathbb{R}/x\epsilon(4,\infty)$

3) Cálculo de la imagen o recorrido de una función a partir de la expresión analítica

Se llama función inversa o reciproca de f a otra función f^{-1} que cumple que: Si f(a) = b, entonces $f^{-1}(b)$ = a. La notación f^{-1} se refiere a la inversa de la función f y no al exponente −1 usado para números reales.

- **Imagen o recorrido de una función racional.**

Dada la siguiente función racional → **f(x)=** $\frac{2-x^2}{x^2-9}$ → **y=**$\frac{2-x^2}{x^2-9}$

Vamos a calcular la imagen o recorrido, para ello debemos hallar previamente su función recíproca o inversa

- Cálculo de la función recíproca o inversa.

  $y\cdot(x^2-9)=2-x^2 \rightarrow y\cdot x^2- 9y = 2-x^2 \rightarrow$

  Pasamos todo lo que tenga x hacia un lado de la ecuación y sacamos factor común.

  $y\cdot x^2 + x^2 = 2 + 9y \rightarrow x^2 (y+1) = 2+9y \rightarrow x^2 = \frac{2+9y}{y+1} \rightarrow x=\mp\sqrt{\frac{2+9y}{y+1}}$ Cogemos la parte positiva ya que si no la función resultante no sería una función.

  Por último sustituimos las x por las y y las y por x

  $f^{-1}(x)= \sqrt{\frac{2+9x}{x+1}}$

- Cálculo de la imagen o recorrido de una función.

  El dominio de la función inversa es igual al recorrido o imagen de la función.

  Dom (f^{-1}) = Im (f) ó R(f)

  $f^{-1}(x)= \sqrt{\frac{2+9x}{x+1}}$ Condición: $\frac{2+9x}{x+1} \geq 0$ → D(f^{-1}) = Im (f) = (-∞, $-1)\text{U}[-2/9,\infty)$

- **Imagen o recorrido de una función radical.**

Dada la siguiente función logarítmica → f(x)= y = $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ → y = $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

Vamos a calcular la imagen o recorrido, para ello debemos hallar previamente su función recíproca o inversa

- Cálculo de la función recíproca o inversa.

  y = $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$
  y· $\sqrt{x^2-4}$ = x → elevamos ambas partes al cuadrado → $\left(y \cdot \sqrt{x^2-4}\right)^2 = x^2$ →

  $y^2(x^2-4) = x^2$ → $y^2 \cdot x^2 - 4y^2 = x^2$

  Pasamos todo lo que tenga x hacia un lado de la ecuación y sacamos factor común.

  $y^2 \cdot x^2 - x^2 = 4y^2$ → $x^2 (y^2 -1) = 4y^2$ → $x = \pm\sqrt{\frac{4y^2}{y^2-1}}$ Cogemos la parte positiva ya que si no la función resultante no sería una función.

  Por último sustituimos las x por las y y las y por x.

  $f^{-1}(x)= \sqrt{\frac{4x^2}{x^2-1}}$

- Cálculo de la imagen o recorrido de una función.

  El dominio de la función inversa es igual al recorrido o imagen de la función.

  Dom (f^{-1}) = Im (f) ó R(f)

  $f^{-1}(x)= \sqrt{\frac{4x^2}{x^2-1}}$ Condición: $\frac{4x^2}{x^2-1} \geq 0$ → D(f^{-1}) = Im (f) = $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

- **Imagen o recorrido de una función logarítmica.**

Dada la siguiente función logarítmica → f(x)= y = $\ln\left(\frac{x-3}{x-1}\right)$ → $y = \log_e \frac{x-3}{x-1}$

Vamos a calcular la imagen o recorrido, para ello debemos hallar previamente su función recíproca o inversa

- Cálculo de la función recíproca o inversa.

  $$y = \log_e \frac{x-3}{x-1}$$

  Aplicamos la propiedad de los logaritmos $\log_a N = x \rightarrow a^x = N$

  $e^y = \frac{x-3}{x-1} \rightarrow e^y(x-1) = x-3 \rightarrow e^y x - e^y = x - 3 \rightarrow e^y x - x = e^y - 3$

  Pasamos todo lo que tenga x hacia un lado de la ecuación y sacamos factor común.

  $x(e^y - 1) = e^y - 3 \rightarrow x = \frac{e^y-3}{e^y-1}$ Por último sustituimos las x por las y y las y por x. $f^{-1}(x)= \frac{e^x-3}{e^x-1}$

- Cálculo de la imagen o recorrido de una función.

  El dominio de la función inversa es igual al recorrido o imagen de la función.

  Dom (f^{-1}) = Im (f) ó R(f)

  $f^{-1}(x)=\frac{\mathbf{e^x-3}}{\mathbf{e^x-1}}$ Condición: $\mathbf{e^x-1\neq 0}$ → $D(f^{-1})$ = Im (f) = $\mathbb{R}$ - {0}

- **Imagen o recorrido de una función exponencial.**

Dada la siguiente función logarítmica → $f(x)=e^{\frac{x-4}{x+5}} \rightarrow y=e^{\frac{x-4}{x+5}}$

Vamos a calcular la imagen o recorrido, para ello debemos hallar previamente su función recíproca o inversa

- Cálculo de la función recíproca o inversa.

  $f(x)=e^{\frac{x-4}{x+5}} \rightarrow y=e^{\frac{x-4}{x+5}}$

  Aplicamos logaritmos en ambas partes de la igualdad: $\ln y = \ln e^{\frac{x-4}{x+5}}$

  Aplicamos una de las propiedades de los logaritmos. Bajamos el exponente

  $\text{Lny} =\frac{x-4}{x+5}\ \text{lne} \rightarrow \ln y = \frac{x-4}{x+5} \rightarrow (x+5)\ \text{lny} = x-4$

  Pasamos todo lo que tenga x hacia un lado de la ecuación y sacamos factor común.

  $x\text{lny} + 5\text{lny} = x-4 \rightarrow x- x\text{lny}= 5\text{lny}+4 \rightarrow x(1-\text{lny})=5\text{lny}+4 \rightarrow x=\frac{5\text{lny}+4}{1-\text{lny}}$

  Por último sustituimos las x por las y y las y por x.

  $f^{-1}(x)=\frac{5\text{lnx}+4}{1-\text{lnx}}$

- Cálculo de la imagen o recorrido de una función.

  El dominio de la función inversa es igual al recorrido o imagen de la función.

  Dom (f^{-1}) = Im (f) ó R(f)

  $f^{-1}(x)=\frac{\mathbf{5\mathit{lnx}+4}}{\mathbf{1-\mathit{lnx}}}$ Condiciones: $\begin{cases} x>0 \\ 1-lnx\neq 0 \end{cases}$ → $D(f^{-1})$ = Im (f) = (0,e)U(e,∞)

4) Operaciones con funciones

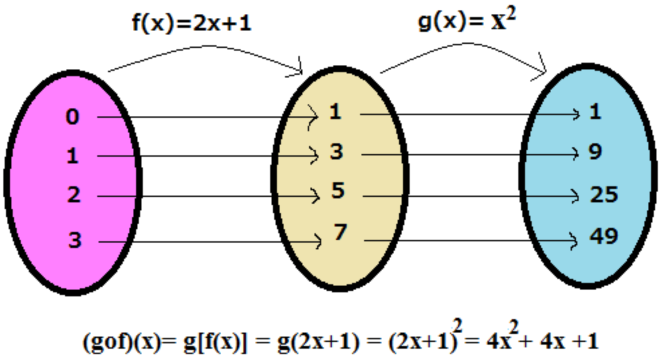
Composición de funciones

Dadas dos funciones f(x) y g(x) $\begin{cases} \text{designaremos como f o g, a la función } (f \circ g)(x) = f[g(x)] \\ \text{designaremos como g o f, a la función } (g \circ f)(x) = g[f(x)] \end{cases}$

La expresión f [g(x)] se lee como g compuesta con f. Nombramos siempre en primer lugar a la función que se encuentra más a la derecha debido a que es la primera función en actuar sobre la variable independiente x.

La composición de funciones por lo general no admite la propiedad conmutativa. $(\mathbf{f\ o\ g})(\mathbf{x}) \neq (\mathbf{g\ o\ f})(\mathbf{x})$

Si tenemos dos funciones f(x) = 2x+1 y g(x) = x^2



Para calcular el **dominio** de una composición de funciones:

$D_{f\ o\ g} = \{x \epsilon\ D_f /\ f(x) \epsilon\ D_g\}$

Debemos calcular lo siguiente:

- Dominio de la función g(x)
- Dominio de la función resultante.

$D_{g\ o\ f} = \{x \epsilon\ D_g /\ g(x) \epsilon\ D_f\}$

Debemos calcular lo siguiente:

- Dominio de la función f(x)
- Dominio de la función resultante.

Ejemplo: sean la función f(x)=$\frac{1}{x-1}$ y g(x)= $\frac{3}{x-5}$

- g compuesta con f → (fog)(x) = f [g(x)] = f $\left(\frac{3}{x-5}\right) = \frac{1}{\frac{3}{x-5}-1} = \frac{x-5}{8-x}$

  Calculamos el dominio.

  - Calculamos el dominio de g(x) → D(g) = $\forall x \in \mathbb{R} - \{5\}$
  - Calculamos el dominio de la función f [g(x)] → $D_($f [g(x)]) = $\forall x \in \mathbb{R} - \{8\}$
  - El dominio resultante será: $D_{f\ o\ g} = \forall x \in \mathbb{R} - \{5,8\}$

- f compuesta con g → (gof)(x) = g[f(x)] = $g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{3}{\frac{1}{x-1}-5} = \frac{3x-3}{6-5x}$

  Calculamos el dominio.

  - Calculamos el dominio de f(x) → D(g) = $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$
  - Calculamos el dominio de la función g [f(x)] → D(g [f(x)]) = $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{6}{5}\right\}$
  - El dominio resultante será: $D_{g\ o\ f} = \forall x \in \mathbb{R} - \left\{1, \frac{6}{5}\right\}$

5) Función Inversa y composición de Funciones

Cálculo de la función recíproca y demostración que:

- $(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = i(x) = x$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = i(x) = x$

Ejemplo 1: Dadas $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-9}$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2+9x}{x+1}}$

$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left[\sqrt{\frac{2+9x}{x+1}}\right] = \frac{2-\left(\sqrt{\frac{2+9x}{x+1}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2+9x}{x+1}}\right)^2-9} = \frac{2-\frac{2+9x}{x+1}}{\frac{2+9x}{x+1}-9} = \frac{\frac{2x+2-2-9x}{x+1}}{\frac{2+9x-9x-9}{x+1}} = \frac{-7x}{-7} = x$

Ejemplo 2: Dadas $f(x) = e^{\frac{x-4}{x+5}}$ y $f^{-1}(x) = \frac{5\ln x+4}{1-\ln x}$

$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left[\frac{5\ln x+4}{1-\ln x}\right] = e^{\frac{\frac{5\ln x+4}{1-\ln x}-4}{\frac{5\ln x+4}{1-\ln x}+5}} = e^{\frac{\frac{5\ln x+4-4+4\ln x}{1-\ln x}}{\frac{5\ln x+4+5-5\ln x}{1-\ln x}}} = e^{\frac{5\ln x+4\ln x}{9}} = e^{\frac{9\ln x}{9}} = e^{\ln x} \rightarrow y=e^{\ln x} \rightarrow$

Aplicamos logaritmos $\ln y = \ln e^{\ln x} \rightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln e \rightarrow \ln y = \ln x \rightarrow y = x$

Ejemplo 3: Dadas $f(x) = y = \ln\left(\frac{x-3}{x-1}\right)$ y $f^{-1}(x) = \frac{\mathbf{e^x-3}}{\mathbf{e^x-1}}$

$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left[\frac{e^x-3}{e^x-1}\right] = \ln\left(\frac{\frac{e^x-3}{e^x-1}-3}{\frac{e^x-3}{e^x-1}-1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{e^x-3-3e^x+3}{e^x-1}}{\frac{e^x-3-e^x+1}{e^x-1}}\right) = \ln\left(\frac{-2e^x}{-2}\right) = \ln(e^x)$ → Aplicamos una de las propiedades de los logaritmos. Bajamos el exponente

$(f \circ f^{-1})(x) = x \ln e = x$

Suma o diferencia

Los dominios de la función suma y diferencia estarán formados por los números que pertenecen a la vez a los dos dominios de f y de g.

Dadas las siguientes funciones: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{x-3}{x+5}$ D(f) $= \forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-1\}$ D(g) $= \forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-5\}$

Suma → $s(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x-3}{x+5} = \frac{x^2-x+2}{x^2+6x+5}$ D(s) $= \forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-5, -1\}$

Diferencia → $d(x) = (f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x-3}{x+5} = \frac{-x^2+3x+8}{x^2+6x+5}$ D(d) $= \forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-5, -1\}$

Producto o Cociente

El dominio de la función producto estará formado por los números que pertenecen a la vez a los dos dominios de f y de g.

Dadas las siguientes funciones: f(x)= $\frac{1}{x+1}$ y g(x) = $\frac{x-3}{x+5}$ D(f) =$\forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-1\}$ D(g) =$\forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-5\}$

Producto → p(x) = (f·g)(x) = f(x)·g(x) = $\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x-3}{x+5} = \frac{x-3}{x^2+6x+5}$ D(p) = $\forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-5, -1\}$

El dominio de la función cociente estará formado por los números que pertenecen a la vez a los dos dominios de f y de g, aunque debemos excluir los valores de la función que se encuentra en el denominador.

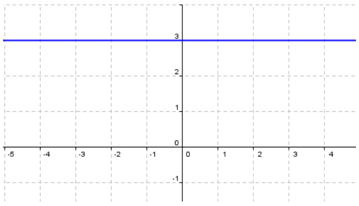
Cociente → c(x) = $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x-3}{x+5}} = \frac{x+5}{x^2-2x-3}$ $siendo\ g(x) \neq 0$ D(c)= $\forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-5, -1{,}3\}$

<u>Tipo de Funciones. Funciones definidas a trozos</u>

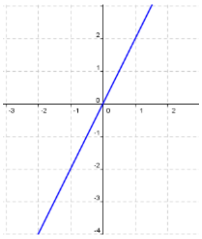
Funciones constantes, lineales y afines.

Observamos que las gráficas de las siguientes funciones son líneas rectas. Estas gráficas se corresponden con funciones polinómicas de grado cero o uno. $y = mx + n$

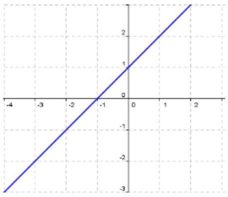
Función constante $m=0$ Funciones lineales $n=0$ y $m \neq 0$ Funciones afines $m \neq 0$ y $b \neq 0$



$y = 2$



$y = 2x$



$y = x+1$

Las funciones polinómicas de grado cero o uno tienen por gráfica una línea recta. Estas funciones pueden ser de tres tipos:

- Función constante: su gráfica es una línea recta paralela al eje de abscisas y su ecuación es $y = b$.
- Función lineal: su gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas y su ecuación es $y = mx$ -> donde $m \neq 0$

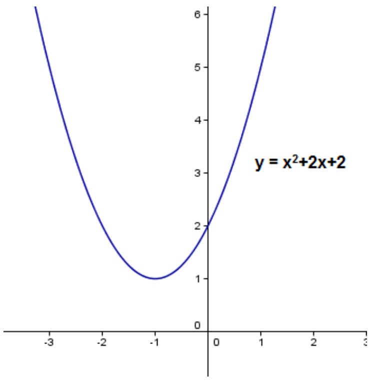
  El parámetro m recibe el nombre de pendiente de la recta o constante de proporcionalidad de la función.
- Función Afín: Su gráfica es una recta que no pasa por el origen de coordenadas y su ecuación es $y = mx + b$ donde $m \neq 0$

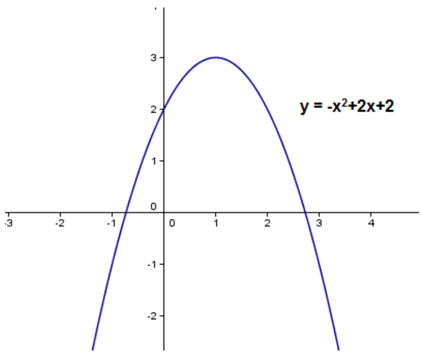
  El parámetro m es la pendiente de la recta, y el parámetro b se denomina ordenada en el origen.

  Si $m > 0$ la pendiente de la recta es positiva (creciente) y si $m < 0$ la pendiente es negativa (decreciente).

Funciones Cuadráticas

- La expresión algebraica de las funciones polinómicas de segundo grado o funciones cuadráticas es : $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a \neq 0$
- Se representan mediante parábolas.
- Si $a>0$ Las ramas van hacia arriba Si $a<0$ Las ramas van hacia abajo





- El vértice de la parábola viene determinado por Vx = - $\frac{b}{2a}$
- Para calcular Vy debemos sustituir Vx en la función.
- La parábola posee simetría par respecto al vértice.

- Para representarla:

  - Observamos si el término cuadrático (a) es mayor o menor que 0. De ello dependerá si la parábola sea cóncava hacia arriba o hacia abajo.
  - Calculamos el vértice.
  - Calculamos los puntos de corte con los ejes.
  - El eje de simetría es la recta vertical que pasa por el vértice.
  - Calculamos la tabla de valores alrededor del vértice.

<u>Función definida a trozos</u>

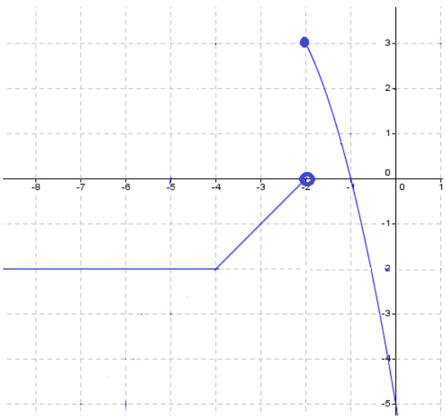
Una función está definida a trozos cuando su expresión es distinta dependiendo de la zona del dominio que estemos analizando.

Ejemplo 1: Dadas las siguientes funciones:

a) Representa gráficamente cada una de las funciones.
b) ¿Es continua la función? Si es discontinua indica el punto de discontinuidad.
c) Una vez representadas calcula su dominio y su recorrido.
d) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e) Calcula si los tienen sus máximos y mínimos.
f) Comportamiento de la función en el ∞ y -∞.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x < -4 \\ x + 2 & -4 \le x < -2 \\ -x^2 - 6x - 5 & x \ge -2 \end{cases}$$

a)



b) La función es discontinua en x= -2 (Discontinuidad Inevitable de salto finito)

c) D(f) = ℝ , Im(f) = $(-\infty, 3]$

d) Crecimiento → $(-4, -2)$

Decrecimiento → $(-2, \infty)$

Continua→ $(-\infty, -4)$

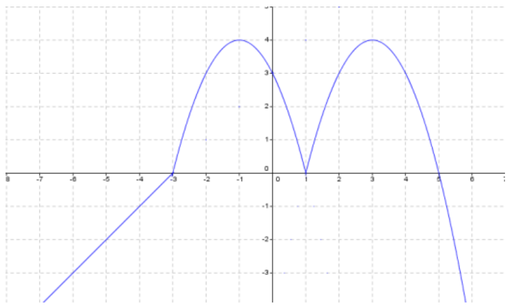
e) No hay máximos ni mínimos

f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Ejemplo 2: f(x) = $\begin{cases} x+3 & x \le -3 \\ -x^2-2x+3 & -3 \le x < 1 \\ -x^2+6x-5 & x \ge 1 \end{cases}$

a)



b) La función es continua.

c) D(f) = ℝ , Im(f) = (-∞, 4]

d) Crecimiento → (-∞, , $-1)$U$(1,3)$

Decrecimiento → $(-1,1)$U$(3,\infty)$

e) Máximo (-1,4) y (3,4)

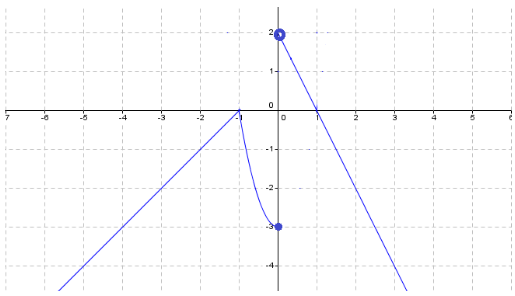
Mínimo (1,0)

f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Ejemplo 3: f(x) = $\begin{cases} x+1 & x \le 1 \\ 3x^2-3 & -1 < x \le 0 \\ -2x+2 & x > 0 \end{cases}$

a)



b) La función es discontinua en x=0 (Discontinuidad Inevitable de salto finito)

c) D(f) = ℝ , Im(f) = (-∞, 2)

d) Crecimiento → (-∞, $-1)$

Decrecimiento → $(-1,0)$U$(0,\infty)$

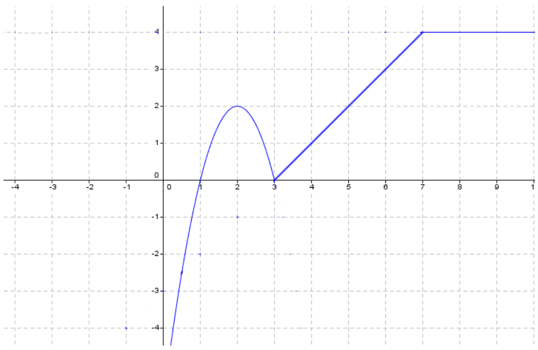
e) Máximo (-1,0)

f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Ejemplo 4: f(x) = $\begin{cases} -2x^2+8x-6 & x \le 3 \\ x-3 & 3 < x < 7 \\ 4 & x \ge 7 \end{cases}$

a)



b) La función es continua.

c) D(f) = ℝ , Im(f) = ℝ

d) Crecimiento → (-∞, 2)U$(3,7)$

Decrecimiento → (2,3)

Continua→ $(7,\infty)$

e) Máximo (2,2)

Mínimo (3,0)

f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

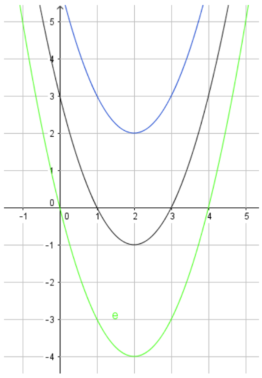
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$

6) <u>Traslaciones y Contracciones de funciones</u>

La traslación y dilatación permite realizar diferentes funciones a partir de una función.

Traslación Vertical

- Traslación hacia arriba 3 unidades : g(x) = f(x) + 3
- Traslación hacia abajo 3 unidades : g(x) = f(x) – 3

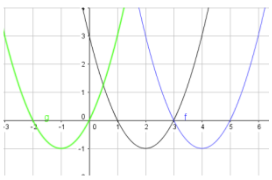


Dada la función: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (dibujada en negro)

- Trasladamos hacia arriba 3 unidades : $g(x) = x^2 - 4x + 3 + \mathbf{3} = x^2 - 4x + 6$
- Trasladamos hacia abajo 2 unidades: $g(x) = x^2 - 4x + 3\ \mathbf{-3} = x^2 - 4x$

Traslación Horizontal

- Traslación hacia la derecha 2 unidades: g(x) = f(x-2)
- Traslación hacia la izquierda 3 unidades: g(x) = f(x+3)

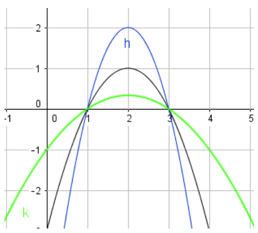


Dada la función: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (dibujada en negro)

- Trasladamos hacia la derecha 3 unidades : $g(x) = (x-2)^2 - 4(x-2) + 3 = x^2 - 8x + 15$
- Trasladamos hacia la izquierda 3 unidades: $g(x) = (x+3)^2 - 4(x+3) + 3 = x^2 + 2x$

Dilatación Vertical

- Dilatación verticalmente al doble : $g(x) = 2 \cdot f(x)$
- Contracción verticalmente al triple : $g(x) = \frac{1}{3} \cdot f(x)$

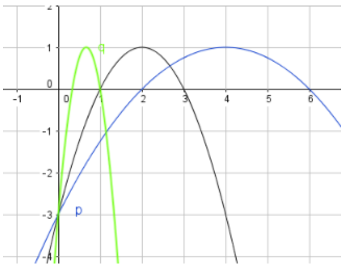


Dada la función: $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ (dibujada en negro)

- Dilatación verticalmente al doble : $g(x)=2\cdot(-x^2 + 4x - 3) = -2x^2+8x-6$
- Contracción verticalmente al triple : $g(x)= \frac{1}{3}(-x^2 + 4x - 3)= -\frac{x^2}{3} + \frac{4}{3}x - 1$

Dilatación Horizontal

- Dilatación horizontalmente al doble: g(x) = f $(\frac{1}{2}x)$
- Contracción horizontalmente al triple: g(x) = f(3x)



Dada la función: f(x) = $-x^2 + 4x - 3$ (dibujada en negro)

- Dilatación horizontalmente al doble: g(x) = f $(\frac{1}{2}x)$=$-(\frac{1}{2}x)^2+4\left(\frac{1}{2}x\right)-3=-\frac{x^2}{4}+2x-3$
- Contracción horizontalmente al triple: g(x) = f(3x) = $-(3x)^2 + 4(3x) - 3$ = $-9x^2+12x-3$

4) **Ejercicio:** Dada la función f(x) = $-x^2+6x-5$. Calcula:

a) Calcula f(x) desplazada 4 unidades hacia abajo.
b) Calcula f(x) desplazada 2 unidades hacia la derecha.
c) Calcula f(x) desplazada 5 unidades hacia arriba.
d) Calcula f(x) desplazada 2 unidades hacia la izquierda.
e) Calcula f(x) dilatada verticalmente (x3)
f) Calcula f(x) dilatada horizontalmente (x2)
g) Calcula f(x) contraída verticalmente (x2)
h) Calcula f(x) contraída horizontalmente (x3)

a) g(x) = f(x)-4= $-x^2+6x-5-4 = -x^2+6x-9$
b) g(x) = f(x-2) = $-(x-2)^2 + 6(x-2) - 5 = -x^2 + 4x - 4 + 6x - 12 - 5 = -x^2 + 10x - 21$
c) g(x) = f(x)+5 = $-x^2+6x-5+5 = -x^2+6x$
d) g(x) = f(x+2) = $-(x+2)^2 + 6(x+2) - 5 = -x^2-4x-4+6x+12-5 = -x^2+2x+3$
e) g(x) = 3 f(x) = $-3x^2+18x-15$
f) g(x)= $f\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{-1}{4}x^2 + 3x - 5$
g) g(x)= $\frac{1}{2}$ f(x) = $-\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2}$
h) g(x) = f(3x) = $-9x^2 + 18x - 5$