Definición: Una matriz es un conjunto de números ordenados en filas y columnas. Para definirla se utilizan letras mayúsculas (en este caso hemos usado la letra A).

Cada elemento de la matriz a_{ij}, está definido por dos subíndices: el primero indica la fila a la que pertenece (i), y el segundo nos indica la columna (j). Las matrices suelen representarse como:

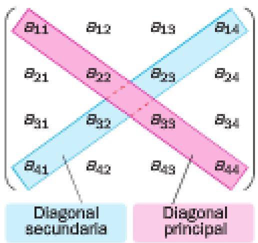
$$A_{mxn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A_{mxn}=(a_{ij}) \text{ donde} \begin{cases} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{cases}$$

La dimensión de una matriz viene definido por el número de filas y de columnas y se denota como mxn.

En el caso que el número de filas sea igual al de columnas, la matriz se denomina **matriz cuadrada** (m=n), entonces la matriz se dice que es de orden n.

En una **matriz cuadrada**, se llama:

- **Diagonal principal**: está formada por los elementos cuyos subíndices son iguales. Es decir a_{11}, a_{22}, a_{33},….a_{nn}
- **Diagonal secundaria:** está formada por los elementos cuyos subíndices cumplen la siguiente relación i+j = n+1



Decimos que dos matrices A y B son iguales, si ambas poseen la misma dimensión y verifican que $a_{ij} = b_{ij}$ para cualquier i y cualquier j. (Es decir que los elementos de cada una de ellas son iguales entre sí)

Ejercicio Resuelto

Escribe la matriz cuadrada A de **orden 3** tal que sus elementos a_{ij} verifiquen que:

$$A_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} & si\ i > j \\ 6 & si\ i = j \\ 2i + j & si\ i < j \end{cases}$$

$$A_{3x3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

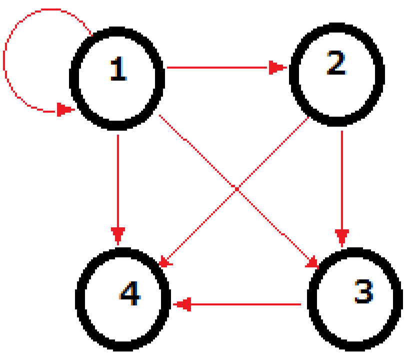
<u>Grafos</u>

Los grafos están formados por vértices y aristas (que son las conexiones entre los vértices).

Si hay conexión entre dos vértices se denota con un 1 y si no hay conexión se denota con un 0. La matriz cuadrada que representa estas relaciones se denomina **matriz de adyacencia del grafo.**

Si las aristas de un grafo están orientadas, como en el ejemplo, el grafo se denomina grafo dirigido.

Ejemplo



	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

<u>Tipos de Matrices</u>

- **Matriz Fila:** matriz que está formada por una única fila.

  F=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ → Matriz fila de dimensión 1x4

- **Matriz Columna:** matriz está formada por una única columna.

  C=$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ → Matriz columna de dimensión 3x1

- **Matriz diagonal:** matriz cuadrada cuyos elementos que no pertenecen a la diagonal principal son todos nulos.

  A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

- **Matriz escalar:** matriz diagonal en los que los elementos de la diagonal principal son iguales.

  A=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- **Matriz unidad o matriz identidad:** matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a 1. La matriz unidad de orden n se denota I_n o por I.

  A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Matriz triangular:** una matriz es **triangular superior** si es cuadrada y todos los elementos que se encuentran por debajo de la diagonal principal son todos nulos. Una matriz es **triangular inferior** si es cuadrada y todos los elementos que se encuentran por encima de la diagonal principal son todosnulos.

  T.Superior: A=$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ T.Inferior B=$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

- **Matriz nula:** es una matriz donde todos los elementos son nulos. Se denomina por 0

  0 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz Simétrica:** es una matriz cuadrada donde los elementos son simétricos respecto de la diagonal principal. Es decir $a_{ij} = a_{ji}$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad S=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -4 & 9 & -3 \\ 0 & 4 & 9 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz antisimétrica:** es una matriz cuadrada tal que los elementos simétricos respecto a la diagonal son opuestos. Es decir $a_{ij} = -a_{ji}$

  De la definición se deduce directamente que los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica deben ser todos nulos.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & -5 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ -2 & 5 & 0 & -2 \\ -7 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz escalonada:** es una matriz que verifica, a la vez, las dos siguientes condiciones:
  1) Todas las filas 0 están en la parte inferior de la matriz.
  2) El primer elemento no nulo de cada fila, exceptuando la primera, se encuentra más a la derecha que el primer elemento no nulo de la fila anterior.

La matriz no necesita ser cuadrada para ser escalonada

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$ La matriz B es una matriz escalonada de dimensión 3x4

Operaciones con matrices

Suma de Matrices

Para poder sumar dos matrices es necesario que ambas tengan la misma dimensión. El resultado se obtiene sumando el término de la matriz A con el término que ocupa la misma posición en la matriz B.

La suma de dos matrices $A_{mxn}=(a_{ij})$ y $B_{mxn}=(b_{ij})$ de la misma dimensión, da como resultado otra matriz de la misma dimensión $S_{ij}=(a_{ij}+b_{ij})$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ → $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & -7 \end{pmatrix}$

Propiedades de la suma de matrices

Si $A_{mxn}=(a_{ij})$, $B_{mxn}=(b_{ij})$ y $C_{mxn}=(c_{ij})$, matrices de igual dimensión se verifican las siguientes propiedades:

1) Conmutativa: A + B = B + A
2) Asociativa: A + (B+C) = (A+B) + C
3) Elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A (donde 0 es la matriz nula)

Elemento Opuesto: La matriz opuesta de A, se representa por –A. Se trata de otra matriz con la misma dimensión, donde todos los elementos están cambiados de signo. Se verifica que A + (-A) = (-A) + A = 0

La diferencia de dos matrices A_{mxn} y B_{mxn} de la misma dimensión se define apoyándose en la existencia de la matriz opuesta: A – B = A + (-B)

Producto de un número real por una matriz

Dada una matriz $A_{mxn}=(a_{ij})$ y un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ se define el producto de un número real por una matriz: a la matriz cuya dimensión sigue siendo la misma que A, donde cada elemento está multiplicado por λ .

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\lambda=-2$ $\quad \lambda A = -2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & -8 \\ 0 & 4 & -10 & -6 \\ 8 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

Propiedades del producto de un número por una matriz.

1) **Conmutativa**: ʎA = Aʎ
2) **Asociativa:** ʎ(αA) = (ʎα)A
3) **Distributiva respecto de la suma de matrices:** ʎ(A+B) = ʎA + ʎB
4) **Distributiva respecto de la suma de números: (**ʎ+α)A = ʎA + αA
5) **Elemento neutro:** 1A= A

Ejemplo de la propiedad distributiva:

A=$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ Vamos a comprobar que 3·(A+B)= 3A + 3B

A+ B = $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ → 3·(A+B) = 3·$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 3 & 18 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$

3A= $\begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 3B=$\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ → 3A+3B = $\begin{pmatrix} 3 & 18 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$

Matriz traspuesta

La matriz traspuesta de A se representa por A^t y se calcula al cambiar las filas por las columnas en la matriz A. A=(a_{ij}) → A^t=(a_{ji})

Si A= $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ → A^t = $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Propiedades de la matriz traspuesta

1) Si la dimensión de A es mxn → la dimensión de A^t es nxm
2) $(A^t)^t = A$
3) $(A+B)^t = A^t + B^t$
4) Si A es simétrica, A=A^t y si es antisimétrica, A= - A^t

Producto de matrices

El producto de matrices no siempre se puede realizar, depende de las dimensiones de las matrices a multiplicar.

Producto de una matriz fila por una matriz columna

Si multiplicamos una matriz cuya dimensión sea 1xn por otra matriz de dimensión nx1 obtendremos una matriz de dimensión 1x1. En este caso se puede prescindir de los paréntesis.

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 + 7 \cdot 0 = 7$$

Producto de dos matrices

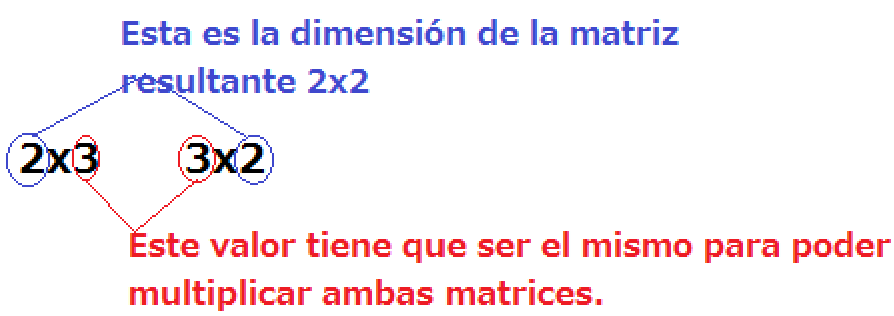
Dos matrices se pueden multiplicar si el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda matriz.

El producto de la matriz A de dimensión mxn, por la matriz B, de dimensión nxq, es otra matriz $P=(p_{ij})$ de dimensión mxq, tal que cada elemento p_{ij} se obtiene multiplicando la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda.

El producto de las matrices A y B se designa por A·B o AB

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 + (-5) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Vemos que la dimensión de la primera matriz es 2x3 y la dimensión de la segunda es 3x2. El resultado final será una matriz de 2x2



Propiedades del producto de matrices

1) **Asociativa**: A(BC) = (AB)C
2) **Asociativa respecto del producto por escalar**: λ(AB) = (λA)B
3) **Distributiva respecto de la suma**: A(B+C) = AB + AC y (A+B)C = AC+BC
4) **Producto por la matriz identidad**: A·I = I·A = A
5) **Traspuesta del producto**: $(AB)^t = B^t A^t$ siempre que exista el producto AB
6) **El producto de matrices, no es conmutativo** AB≠BA

Ejemplo: Dada la matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2.

Calcula A^2- 3A –I

A^2= A·A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3A = 3·$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

I_2= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A^2- 3A –I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

Rango de una matriz. Cálculo por el método de Gauss

Dependencia lineal de fila o columnas

Un conjunto de filas (o columnas) de una matriz es linealmente dependiente si al menos una de ellas depende linealmente de las restantes. En caso contrario se dice que son linealmente independientes.

Una fila de una matriz, digamos F1, **depende linealmente** de las demás filas de la matriz si existen números reales a2, a3, ... , an tales que

$$F_1 = a_2 F_2 + a_3 F_3 + \dots + a_n F_n$$

En caso contrario, las filas F1, F2, ... , Fn son linealmente independientes.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to F_1 \\ \to F_2 \\ \to F_3 \end{array}$$

Observamos que

$F_2 = 3 \cdot F_1$ y que

$F_3 = 2 \cdot F_1 + F_2 = 5 \cdot F_1$

Consecuentemente, las filas F_1 y F_3 dependen linealmente de la fila F_1.

La misma definición que hemos dado para filas puede darse de forma análoga para columnas.

Rango de una matriz

El rango de una matriz A es el número máximo de filas, o columnas que son **linealmente independientes**.

$rg(A) = rg(F_1, F_2, F_3, \ldots) = rg(C_1, C_2, C_3, ..)$

Una matriz tendrá **rango 0** si y sólo si es la matriz nula.

Ejemplo: Vamos a escribir ejemplos de matrices de dimensión 2 × 3 que tengan rangos 0, 1 y 2.

$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ La matriz O tiene rango 0, ya que es la matriz nula y rg(O)=0.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ La matriz A tiene rango 1 ya que $F_2 = 3 \cdot F_1 \Rightarrow rg(A) = 1$. La fila F_1 y F_2 son linealmente dependientes.

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ La matriz B tiene rango 2 ya que sus filas no son proporcionales, por lo que decimos que ambas son linealmente independientes, es decir, rg(B) = 2.

Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss

El método de Gauss consiste en ir haciendo transformaciones elementales a una matriz para conseguir anular los elementos que se encuentran por debajo de la diagonal principal.
El rango de la matriz es igual al número de filas no nulas de la matriz obtenida.
Si nos encontrásemos que la matriz tuviese más filas que columnas, podemos usar su traspuesta para calcular el rango. **$rg(A)=rg(A^t)$**

Las transformaciones elementales de filas o columnas que dejan invariante el rango son:

- Intercambiar dos filas o columnas de la matriz.
- Multiplicar o dividir una fila o columna de la matriz por un número real no nulo.
- Sumar o restar a una fila o columna otra multiplicada por un número real cualquiera.

El rango de una matriz no varía si se suprimen:

- Las filas o columnas nulas.
- Las filas o columnas proporcionales a otras.
- Las filas o columnas que dependen linealmente de otras.

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS}} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{F_2-2F_1 \\ F_4-4F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & -8 & 4 & -12 \\ -3 & -6 & 3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+4F_1 \\ F_3+3F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1$$

Matriz Inversa. Cálculo por el método de Gauss-Jordan

Dada la matriz A, para que exista su inversa, esta debe ser **cuadrada**. La matriz inversa de A se denota por A^{-1} donde se verifica que **$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$**

Ejemplo

La matriz inversa de A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es A^{-1}=$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^{-1}$=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = I

$A^{-1} \cdot A$=$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = I

Propiedades de la matriz Inversa

Si dos matrices A y B poseen matriz inversa, entonces se verifica:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

$$(A \mid I) \xrightarrow{\text{Gauss}} (I \mid A^{-1})$$

El método consiste:

1) A la izquierda escribiremos la matriz A y a la derecha escribiremos la matriz identidad de orden igual a la matriz A$(A|I)$
2) Debemos aplicar una serie de transformaciones hasta llegar a modificar la matriz de la izquierda (A) en la matriz identidad (I) $(I|A^{-1})$

Ejemplo: Halla por el método de Gauss-Jordan la matriz inversa de A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1) Escribimos la matriz identidad al lado de la matriz A que nos han dado.

A=$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

2) Realizamos las transformaciones necesarias para que la matriz identidad nos quede al lado izquierdo.

$$\begin{array}{l} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_1 = F_1 - 3F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_1 = F_1 - 3F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz inversa nos queda al lado derecho: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vamos a comprobar el resultado $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Por lo que hemos demostrado el resultado.