Cálculo de Parámetros

Ejemplo 1: Determinar a,b y c para que la función $f(x)= x^3+ax^2+bx+c$ tenga un máximo para x=-4, un mínimo para x=0 y tome el valor 1 para x=1

- valor 1 para x=1 → (1,1) → $f(1)=1 \rightarrow 1=1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c$ → **a+b+c=0**
- $f'(x)=3x^2+2ax+b$ → Nos dice que existe un mínimo en x=0. Como es un mínimo la pendiente (o sea la derivada) en ese punto es cero.

  $f'(0)=0 \rightarrow 3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=0$ → **b=0**

- $f'(x)=3x^2+2ax+b$ → Nos dice que existe un máximo en x=-4. Como es un máximo la pendiente (o sea la derivada) en ese punto es cero.

  $F'(-4)=3\cdot(-4)^2+2a\cdot(-4)+b=0 \rightarrow 48-8a+b=0$ → **8a-b=48**

- Resolvemos el sistema $\begin{cases} a+b+c=0 \\ b=0 \\ 8a-b=48 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a=6} \\ \boldsymbol{b=0} \\ \boldsymbol{c=-6} \end{cases}$

- **Ejemplo 2: Sea $f(x)= x^3+ax^2+bx+5$. Halla a y b para que la curva y=f(x) tenga en x=1 un punto de inflexión con tangente horizontal.**

  - Si tenemos una tangente horizontal en x=1, es que la pendiente en x=1 es 0 o que la $f'(1)=0$
  - Si tenemos un punto de Inflexión en x=1 → $f''(1)=0$

  Por lo tanto lo primero que vamos a hacer es derivar nuestra función.

  $f'(x)= 3x^2+2ax+b \rightarrow f'(1)=0 \rightarrow 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=0 \rightarrow 3+2a+b=0 \rightarrow 2a+b=-3$

  $f''(x)=6x+2a \rightarrow f''(1)=0 \rightarrow 6\cdot 1+2a=0$ → **a=-3**

  Sustituyendo en 2a+b=-3 → $2\cdot(-3)+b=-3$ → **b=3**

- **Ejemplo 3: hallar el valor de b y m para que la curva y=x^3+bx^2+mx+1 tenga un punto de inflexión en el punto (0,1) y la pendiente de la recta tangente en ese punto valga 1.**

  - Si tiene un punto de inflexión en x=0 → f´´(0)=0
  - Si la pendiente en x=0 vale 1 → f´(0)=1
  - Y por último pasa por el punto (0,1) → f(0)=1 → 1= $0^3+b\cdot0^2+m\cdot0+1$ → 1=1 Se cumple

  f´(x)= $3x^2+2bx+m$ → f´(0)=1 → $3\cdot0^2+2b\cdot0+m=1$ → **m= 1**

  f´´(x)=6x+2b → f´´(0)=0 → 6·0+2b=0 → **b=0**

- **Ejemplo 4: La función f(x)= ax^3+bx^2+cx+d, tiene como tangente en el punto de inflexión (1,0), la recta y=-3x+3 , y presenta un extremo en el punto de abcisa x=0**

  - Pasa por el punto (1,0) → f(1)=0 → $a\cdot1^3+b\cdot1^2+c\cdot1+d=0$ → **a+b+c+d=0**
  - Punto de Inflexión en x=1 → f´´(1)=0 → f´(x)= $3ax^2+2bx+c$ → f´´(x)=6ax+2b

    f´´(1)=0 → f´´(1)=**6a+2b=0**
  - Recta tangente a la recta y=-3x+3 en el punto x=1

    f´(1)=-3 → f´(1)=$3a\cdot1^2+2b\cdot1+c=-3$ → **3a+2b+c=-3**
  - Presenta un extremo en x=0, es decir la derivada en ese punto es 0 → f´(0)=0

    f´(0)=$3a\cdot0^2+2b\cdot0+c=0$ → **c=0**

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{a+b+c+d=0}\\ \mathbf{6a+2b=0}\\ \mathbf{3a+2b+c=-3}\\ \mathbf{c=0}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}\mathbf{a+b+d=0}\\ \mathbf{6a+2b=0}\\ \mathbf{3a+2b=-3}\\ \mathbf{c=0}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c}\boldsymbol{a=1}\\ \boldsymbol{b=-3}\\ \boldsymbol{c=0}\\ \boldsymbol{d=2}\end{array}\right\}$$

- **Ejemplo 5: Calcula los valores a, b y c para que la función f(x)= $\frac{ax^3-bx+c}{-x^2+cx-1}$ tenga una asíntota oblicua y= -2x-4 y sabiendo que tiene una tangente horizontal en x=0.**

y= -2x -4 → $\begin{cases} m = -2 \\ n = -4 \end{cases}$

- m= $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^3-bx+c}{-x^2+cx-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^3-bx+c}{-x^3+cx^2-x}$ = -a → m = -a = -2 → a=2

- n= $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^3-bx+c}{-x^2+cx-1} + 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^3-bx+c-2x^3+2cx^2-2x}{-x^2+cx-1}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-bx+c-2x^3+2cx^2-2x}{-x^2+cx-1}$ =

  = $\lim_{x\to\infty} \frac{-bx+c+2cx^2-2x}{-x^2+cx-1}$ = -2c → -2c = -4 → c=2

- Como tiene una tangente horizontal en x=0

  f´(0) = 0

  Derivamos : f´(x) = $\frac{(3ax^2-b)(-x^2+cx-1)-(-2x+c)(ax^3-bx+c)}{(-x^2+cx-1)^2}$

  f´(0) = $\frac{(-b)(-1)-(c)(c)}{(-1)^2} = \frac{b-c^2}{1} = \frac{b-2^2}{1}$ = b -4

  f´(0)=0 → b – 4 = 0 → b= 4

  Solución: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$

  La función resultante será: **f(x)=** $\frac{2x^3-4x+2}{-x^2+2x-1}$

- **Ejemplo 6 (EBAU 2017 Septiembre): La gráfica de la función f(x) = $\frac{ax^2+bx+5}{2x-7}$ tiene como asíntota la recta y=2x-3 . Determina los valores de los parámetros a y b.**

y= 2x -3 → $\begin{cases} m = 2 \\ n = -3 \end{cases}$

- m= $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^2+bx+5}{2x-7}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+5}{2x^2-7x}$ = $\frac{a}{2}$ → m = $\frac{a}{2}$= 2 → a=4

- n= $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+5}{2x-7} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+5-4x^2+14x}{2x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+bx+5-4x^2+14x}{2x-7} =$

  $= \lim_{x\to\infty} \frac{bx+5+14x}{2x-7} =$ → $\frac{b+14}{2}$= -3 → b + 14 = -6 → b= -20

La función resultante será: **f(x) =** $\frac{4x^2-20x+5}{2x-7}$

- **Ejemplo 7 (EBAU septiembre -2017: Dada la función f(x) =** $\frac{3x^2}{x^2+ax+b}$ **determinar los valores de a y b sabiendo que su gráfica posee un extremo relativo en el punto (-3,**$\frac{9}{4}$)

  - Condiciones : $\begin{cases} f(-3) = \frac{9}{4} \\ f'(-3) = 0 \end{cases}$

  - f(-3) = $\frac{3\cdot(-3)^2}{(-3)^2+a\cdot(-3)+b} = \frac{27}{9-3a+b}$

    Como f(-3) = $\frac{9}{4}$ → $\frac{27}{9-3a+b}$ = $\frac{9}{4}$ → 108 = 81 -27ª + 9b → **3a – b = -3**

  - Derivamos la función : f´(x) = $\frac{6x\cdot(x^2+ax+b)-(2x+a)\cdot 3x^2}{(x^2+ax+b)^2} = \frac{3ax^2+6bx}{(x^2+ax+b)^2}$

    Como f´(-3) = 0 → f´(-3) = $\frac{3a\cdot(-3)^2+6b\cdot(-3)}{((-3)^2+a\cdot(-3)+b)^2} = 0$ → 27a -18b = 0 → **3a -2b =0**

  - Realizamos el sistema de ecuaciones : $\begin{cases} \mathbf{3a - b = -3} \\ \mathbf{3a - 2b = 0} \end{cases}$ → $\begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$

La función resultante será: **f(x) =** $\frac{3x^2}{x^2-2x-3}$

- **Ejemplo 8: (PAU septiembre-2016: Dada la función f(x) =** $\frac{x^2+x-a}{x^2+2x-3}$ **, determinar el valor de a para que tenga una discontinuidad evitable en x= -3. Para el valor de a obtenido, definir de nuevo la función para que sea continua en x=-3**

  Para que la función tenga una discontinuidad evitable en x= -3 se debe cumplir que exista el límite en ese punto (es decir que los límites laterales sean iguales) y que el valor de la función en ese punto sea distinto al de los límites o que la función no exista.

  $\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} f(x) \to \exists \lim_{x\to-3} f(x) \neq f(-3)$ o $\nexists f(-3)$

  - Calculamos el límite de la función en el punto x= -3

$\lim_{x\to -3} \frac{\boldsymbol{x^2+x-a}}{\boldsymbol{x^2+2x-3}} = \frac{6-a}{0}$ para que existe el límite debemos alcanzar una indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$

por ello el valor de a tiene que ser 6 **(a=6)**

$\lim_{x\to -3} \frac{\boldsymbol{x^2+x-a}}{\boldsymbol{x^2+2x-3}} = \frac{6-6}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Factorizamos $\lim_{x\to -3} \frac{\boldsymbol{x^2+x-6}}{\boldsymbol{x^2+2x-3}} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-3-2}{-3-1} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$

- Redefinimos la función para que la función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\boldsymbol{x^2+x-6}}{\boldsymbol{x^2+2x-3}} & \boldsymbol{si\ x \neq -3} \\ \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{4}} & \boldsymbol{si\ x = -3} \end{cases}$$

- **Ejemplo 9: (PAU Junio 2015): Dada la función f(x)= $\frac{\boldsymbol{ax^2+bx-2}}{\boldsymbol{x^2+2x-8}}$, determinar los valores de los parámetros a y b sabiendo que su gráfica tiene un extremo relativo en el punto (-2, $\frac{1}{2}$)**

- Condiciones : $\begin{cases} f(-2) = \frac{1}{2} \\ f'(-2) = 0 \end{cases}$
- Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{(2ax+b)\cdot(x^2+2x-8)-(ax^2+bx-2)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x-8)^2}$$

Como en $(-2,\frac{1}{2})$ tiene un extremo relativo $\Rightarrow$ f´(-2) = 0

Por tanto:

$$\frac{4a-2b-2}{-8} = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{(-4a+b)\cdot(-8)-(4a-2b-2)\cdot(-2)}{(-8)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4a-2b-2=-4 \\ 40a-12b-4=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-b=-1 \\ 10a-3b=1 \end{cases} \Rightarrow \text{a = 1 y b = 3}$$

La función resultante será: **f(x)=** $\frac{\boldsymbol{x^2+3x-2}}{\boldsymbol{x^2+2x-8}}$

- **Ejemplo 10: La función f(x)=$\frac{x^2-a}{x^3+x^2+ax+12}$ presenta una discontinuidad evitable en x=-2, ¿para qué valor de a?**

  - Si presenta una discontinuidad evitable tendremos que:

  $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$ o $\nexists f(2)$

  Si la función no existe en x=-2 quiere decir que el denominador de la función será igual a cero.

  $$f(-2) = 0 \rightarrow (-2)^3 + (-2)^2 + a \cdot (-2) + 12 = 0 \rightarrow \; -8 + 4 - 2a + 12 = 0 \rightarrow a = 4$$

  $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^3+x^2+4x+12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2-x+6)} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$

  Por lo tanto hemos demostrado que la función presenta una discontinuidad evitable, ya que para a = 4

  $$\mathbf{\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \;\; y \; \nexists f(2)}$$

- **Ejemplo 11: (PAU Septiembre 2014) Dada la función f(x)= $\frac{x^2-x-1}{ax+b}$, determinar los valores de a y b sabiendo que su gráfica tiene un extremo relativo en el punto (-2,-5)**

  - Condiciones : $\begin{cases} f(-2) = \; -5 \\ f'(-2) = 0 \end{cases}$

  - f(-2) = $\frac{(-2)^2-(-2)-1}{a(-2)+b}$ = $\frac{4+2-1}{-2a+b}$ = $\frac{5}{-2a+b}$

    Como f(-2) = -5 → $\frac{5}{-2a+b}$= -5 → 5 = 10a -5b → 2a –b =1

  - Derivamos la función : f´(x) = $\frac{(2x-1)(ax+b)-(a)(x^2-x-1)}{(ax+b)^2}$ = $\frac{ax^2+2bx-b+a}{(ax+b)^2}$

    Como f´(-2) = 0 → f´(-2) = $\frac{a(-2)^2+2b(-2)-b+a}{(a(-2)+b)^2} = 0$ → 4a -4b – b +a = 0 → 5a -5b = 0 → a =b

  - Realizamos el sistema de ecuaciones : $\begin{cases} 2a - b \;=1 \\ \quad a = b \end{cases}$ → $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

La función resultante será: **f(x)=** $\frac{x^2-x-1}{x+1}$

- **Ejemplo 12: (PAU Septiembre-2013). Dada la función f(x) = $\frac{ax^2+2x-4}{x-b}$, determinar los valores de a y b sabiendo que su grafica tiene como asíntota oblicua la recta y = x + 3**

y= x +3 → $\begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$

- m= $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^2+2x-4}{x-b}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+2x-4}{x^2-bx} = a$ → m = a= 1 → **a=1**

- n= $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+2x-4}{x-b} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+2x-4-x^2+bx}{x-b} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-4-x^2+bx}{x-b} =$

  = $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+bx-4}{x-b} =$ → $\frac{2+b}{1}$= 3 → b + 2= 3 → **b= 1**

La función resultante será: **f(x) =** $\frac{x^2+2x-4}{x-1}$

- **Ejemplo 13: (PAU Junio -2013). La función f(x) = $\frac{ax^2+x-2}{x+b}$ posee un extremo relativo en x = 1 y tiene como asíntota oblicua la recta y = –2x + 1. Determinar los valores de los parámetros a y b.**

- Condiciones : $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ m = -2 \\ n = 1 \end{cases}$

- f´(x) = $\frac{(2ax+1)(x+b)-1(ax^2+x-2)}{(x+b)^2} = \frac{2ax^2+x+2abx+b-ax^2-x+2}{(x+b)^2} = \frac{ax^2+2abx+b+2}{(x+b)^2}$

  f´(1) = 0 → f´(1) = $\frac{a+2ab+b+2}{(1+b)^2} = 0$ → **a+b+2ab+2 = 0**

- m= $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^2+x-2}{x+b}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+x-2}{x^2+bx} = a$ → m = a= -2 → **a=-2**

- n= $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+x-2}{x+b} + 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2+x-2+2x^2+2bx}{x+b} =$

  = $\lim_{x\to\infty} \frac{x+2bx-2}{x+b} =$ → $\frac{1+2b}{1}$= 1 → 2b + 1= 1 → **b= 0**

La función resultante será: **f(x) =** $\frac{-2x^2+x-2}{x}$

- **Ejemplo 14: (PAU Junio 2012) La gráfica de la función f(x) = $\frac{ax^2+bx-4}{x-3}$ tiene como asíntota oblicua a la recta y=x. Por tanto, ¿cuáles son los valores de a y b?**

y= x → $\begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \end{cases}$

- m= $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^2+bx-4}{x-3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx-4}{x^2-3x}$ = a→ m = a= 1 → **a=1**

- n= $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx-4}{x-3} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx-4-x^2+3x}{x-3}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+bx-4-x^2+3x}{x-3} =$

  = $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+bx-4}{x-3} =$ → $\frac{3+b}{1}$= 3 → b + 3= 0 → **b= -3**

La función resultante será: **f(x) =** $\frac{x^2-3x-4}{x-3}$

- **Ejemplo 15 (PAU septiembre 2012). Hallar el valor de a de modo que la siguiente igualdad sea cierta:**

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{ax-a} = 3$$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{ax-a} = \left[\frac{0}{0}\right] \to \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{a(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{a} = \frac{-1}{a}$

Como $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{ax-a} = 3 \to \frac{-1}{a} = 3 \to \boldsymbol{a} = -\frac{1}{3}$