f(x)= $x^3 - x$

1) Dominio : Lo primero que debemos hacer es calcular el dominio de la función.

D(f)= $\forall x \in R$

2) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

- Calculamos la derivada de la función

f´(x)= $3x^2 - 1$

- Igualamos la derivada a 0. Con ello estaremos calculando los posibles extremos relativos (máximos y mínimos)

  f´(x) = 0 -> f´(x) = $3x^2$ -1= 0 -> x = $+\sqrt{\frac{1}{3}}$ y x= $-\sqrt{\frac{1}{3}}$

- Con la ayuda del dominio y de los valores que hacen cero la primera derivada realizamos la siguiente tabla:

$$\begin{cases} D(f) = \forall x \in R \\ x = +\sqrt{\frac{1}{3}} \text{ y } x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

- Los signos se calculan en la primera derivada

	$(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(-\sqrt{\frac{1}{3}},+\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(+\sqrt{\frac{1}{3}},\infty)$
Signo f´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↗

- Crecimiento : $(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}})U(+\sqrt{\frac{1}{3}},\infty)$
- Decrecimiento: $(-\sqrt{\frac{1}{3}},+\sqrt{\frac{1}{3}})$
- Tenemos un mínimo en $(+\sqrt{\frac{1}{3}},-\frac{2\sqrt{3}}{9})$ Es una coordinada, para calcular el valor de la función en ese punto se sustituye en nuestra función. $f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 - \sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$

- Tenemos un máximo en (-$\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{2\sqrt{3}}{9}$) Es una coordinada, para calcular el valor de la función en ese punto se sustituye en nuestra función. f$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 + \sqrt{\frac{1}{3}}$ = + $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

3) Concavidad

- Calculamos la segunda derivada, para ello volvemos a derivar la primera derivada .

  f´´(x)= $6x$

- Igualamos la segunda derivada a cero.

  f´´(x)= 0 → $6x = 0$ x = 0

- Con la ayuda del dominio y de los valores que hacen cero la segunda derivada realizamos la siguiente tabla:

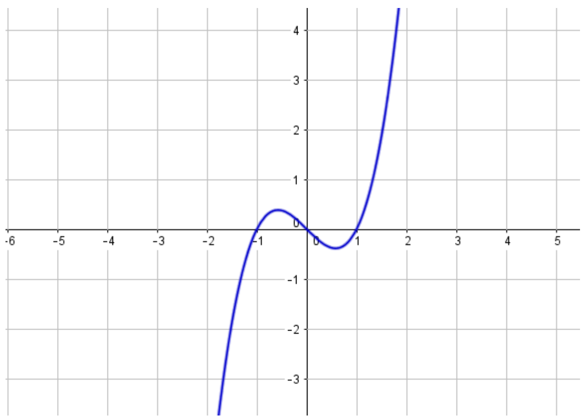
$$\begin{cases} D(f) = \forall x \in R \\ \mathrm{x} = 0 \end{cases}$$

- Los signos se calculan en la segunda derivada

	(-∞,0)	(0,∞)
Signo de f´´(x)	-	+
Comportamiento de f(x)	∩	U

- Cóncava hacia arriba: (0, ∞)
- Cóncava hacia abajo: (-∞,0)
- Punto de inflexión (0,0) Es una coordinada, para calcular el valor de la función en ese punto se sustituye en nuestra función. f(0) = $0^3 - 0 = 0$

4) Representación gráfica



f(x)= $x^3 - x^2 + x - 1$

1) Dominio Lo primero que debemos hacer es calcular el dominio de la función.

D(f)=$\forall x \in$ R

2) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

- Calculamos la derivada de la función

f´(x)= $3x^2 - 2x + 1$

- Igualamos la derivada a 0. Con ello estaremos calculando los posibles extremos relativos (máximos y mínimos)

f´(x) = 0 -> $3x^2$ -2x + 1= 0 -> No tiene solución real (Por lo tanto no hay extremos relativos)

- Con la ayuda del dominio y de los valores que hacen cero la primera derivada realizamos la siguiente tabla:

$$\begin{cases} D(f) = \forall x \in R \\ no\ hay\ extremos\ relativos \end{cases}$$

- Los signos se calculan en la primera derivada

	(-∞,∞)
Signo f´(x)	+
Comportamiento de f(x)	↗

- Crecimiento : (-∞,∞)
- Decrecimiento: No hay
- No hay ni mínimo ni máximo

3) Concavidad

- Calculamos la segunda derivada, para ello volvemos a derivar la primera derivada .

f´´(x)= $6x - 2$

- Igualamos la segunda derivada a cero.

f´´(x)= 0 → $6x - 2 = 0$ → x = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- Con la ayuda del dominio y de los valores que hacen cero la segunda derivada realizamos la siguiente tabla:

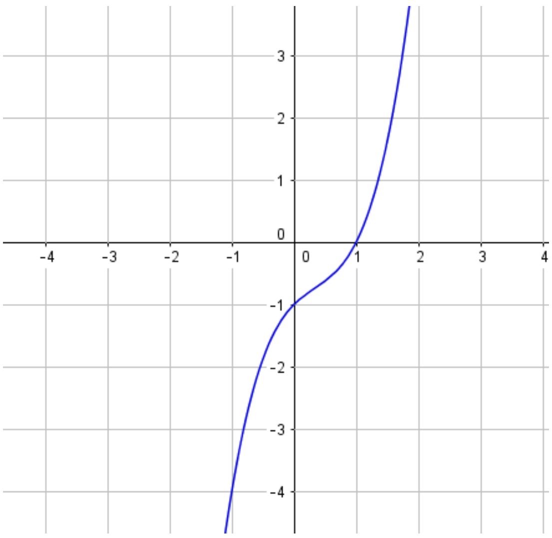
$$\begin{cases} D(f) = \forall x \in R \\ \mathrm{x} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Los signos se calculan en la segunda derivada

	$(-\infty,\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3},\infty)$
Signo de f´´(x)	-	+
Comportamiento de f(x)	∩	U

- Cóncava hacia arriba: $(\frac{1}{3}, \infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty,\frac{1}{3})$
- Punto de inflexión $(\frac{1}{3}, -\frac{20}{27})$ → Es una coordinada, para calcular el valor de la función en ese punto se sustituye en nuestra función. f(0) = $\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{20}{27})$

4) <u>Representación gráfica</u>



f(x)= $\frac{x^2}{2-x}$

1) Dominio Lo primero que debemos hacer es calcular el dominio de la función.

D(f)=∀∈ R - {2}

2) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

- Calculamos la derivada de la función

f´(x)= $\frac{2x(2-x)+x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x}{(2-x)^2}$

- Igualamos la derivada a 0. Con ello estaremos calculando los posibles extremos relativos (máximos y mínimos)

f´(x) = 0 -> $-x^2+4x$ = 0 -> x=0 y x= 4

- Con la ayuda del dominio y de los valores que hacen cero la primera derivada realizamos la siguiente tabla:

$$\begin{cases} D(f) = \forall x \in R - \{2\} \\ x = 0 \; y \; x = 4 \end{cases}$$

- Los signos se calculan en la primera derivada

	(-∞,0)	(0,2)	(2,4)	(4,∞)
Signo f´(x)	-	+	+	-
Comportamiento de f(x)	↘	↗	↗	↘

- Crecimiento : (0,2)U(2,4)
- Decrecimiento: (-∞,0)U(4,∞)
- Tenemos un mínimo en (0,0) Es una coordinada, para calcular el valor de la función en ese punto se sustituye en nuestra función. f(0) =$\frac{0^2}{2-0} = 0$

- Tenemos un máximo en (4,-8) Es una coordinada, para calcular el valor de la función en ese punto se sustituye en nuestra función. f(0) =$\frac{4^2}{2-4} = -8$

3) <u>Concavidad</u>

- Calculamos la segunda derivada, para ello volvemos a derivar la primera derivada .

f´´(x)= $\frac{(-2x+4)(2-x)^2+2(2-x)(-x^2+4x)}{(2-x)^4}$.” **Aqui debereis sacar factor común al término que se encuentra también en el denominador.** = $\frac{(2-x)[(-2x+4)(2-x)+2(-x^2+4x)]}{(2-x)^4} = \frac{-4x+8+2x^2-4x-2x^2+8x}{(2-x)^3}$

= $\frac{8}{(2-x)^3}$

- Igualamos la segunda derivada a cero.

f´´(x)= $\frac{8}{(2\text{-}x)^3}$ = 0 f´´(x) = 0 -> Sin solución (no habrá puntos de Inflexión)

- Con la ayuda del dominio y de los valores que hacen cero la segunda derivada realizamos la siguiente tabla:

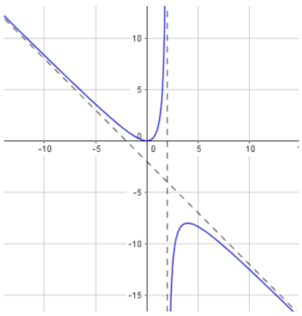
$$\begin{cases} D(f) = \forall x \in R - \{2\} \\ \text{no hay puntos de inflexión} \end{cases}$$

- Los signos se calculan en la segunda derivada

	(-∞,2)	(2,∞)
Signo de f´´(x)	+	-
Comportamiento de f(x)	U	∩

- Cóncava hacia arriba: (-∞, 2)
- Cóncava hacia abajo: (2,∞)
- No hay puntos de inflexión

4) <u>Representación gráfica</u>



f(x)= $\frac{1-x^2}{x^2-4}$

1) <u>Dominio</u> Lo primero que debemos hacer es calcular el dominio de la función.

D(f)= $\forall x \in \mathbb{R}$ - {-2,2}

2) <u>Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)</u>

- Calculamos la derivada de la función

f´(x)= $\frac{-2x(x^2-4)-2x(1-x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{6x}{(x^2-4)^2}$

- Igualamos la derivada a 0. Con ello estaremos calculando los posibles extremos relativos (máximos y mínimos)

f´(x) = 0 -> 6x = 0 -> x=0

- Con la ayuda del dominio y de los valores que hacen cero la primera derivada realizamos la siguiente tabla:

$$\begin{cases} D(f) = \forall x \in R - \{,-2{,}2\} \\ x = 0 \end{cases}$$

- Los signos se calculan en la primera derivada

	(-∞,-2)	(-2,0)	(0,2)	(2,∞)
Signo f´(x)	-	-	+	+
Comportamiento de f(x)	↘	↘	↗	↗

- Crecimiento : (-∞, $-2)U(-2{,}0)$
- Decrecimiento: (0,2)∪ $(2, \infty)$
- Tenemos un mínimo en (0,$\frac{-1}{4}$) Es una coordinada, para calcular el valor de la función en ese punto se sustituye en nuestra función. f(0)=$\frac{1-0^2}{0^2-4} = -\frac{1}{4}$
-

3) Concavidad

- Calculamos la segunda derivada, para ello volvemos a derivar la primera derivada .

f´´(x)= $\frac{6(x^2-4)^2-24x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4}$ **Aqui debereis sacar factor común al término que se encuentra también en el denominador**. = $\frac{(x^2-4)[6(x^2-4)-24x^2]}{(x^2-4)^4} = \frac{6x^2-24-24x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-18x^2-24}{(x^2-4)^3}$

- Igualamos la segunda derivada a cero.

f´´(x) = 0 -> $-18x^2-24=0$ -> No tiene solución (No habrá Puntos de Inflexión)

- Con la ayuda del dominio y de los valores que hacen cero la segunda derivada realizamos la siguiente tabla:

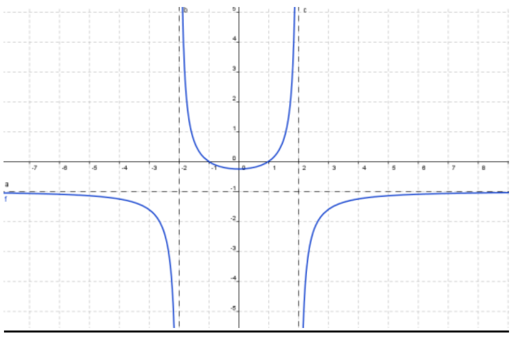
$$\begin{cases} D(f) = \forall x \in R - \{-2,2\} \\ \text{no hay puntos de inflexión} \end{cases}$$

- Los signos se calculan en la segunda derivada

	$(-\infty, -2)$	(-2,2)	$(2,\infty)$
Signo de f´´(x)	-	+	-
Comportamiento de f(x)	∩	U	∩

- Cóncava hacia arriba: (-2,2)
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
- No hay punto de inflexión

4) Representación gráfica



f(x)= $\frac{6x+1}{x+3}$

1) Dominio Lo primero que debemos hacer es calcular el dominio de la función.

D(f)= $\forall x \in \mathbb{R}$ - {-3}

2) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

f´(x)= $\frac{6(x+3)-(6x+12)}{(x+3)^2} = \frac{6x+18-6x-12}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2}$ f´(x) = 0 -> No tiene solución

	(-∞,-3)	(-3,∞)
Signo f´(x)	+	+
Comportamiento de f(x)	↗	↗

- Crecimiento : (-∞, $-3) \cup (-3, \infty)$
- No tiene ni máximos ni mínimos

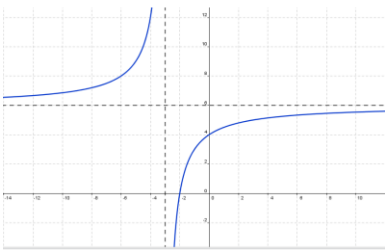
3) Concavidad

f´´(x)= $\frac{0(x+3)^2-2(x+3)6}{(x+3)^4} = \frac{-12(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{-12}{(x+3)^3}$ f´´(x) = 0 -> No tiene solución

	$(-\infty, -3)$	(-3,∞)
Signo de f´´(x)	+	-
Comportamiento de f(x)	∪	∩

- Cóncava hacia arriba: (-∞, $-3)$
- Cóncava hacia abajo: (-3,∞)
- No hay puntos de inflexión

4) Representación gráfica



f(x)= $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

1) <u>Dominio</u>

D(f)=x∈ R - {-1,1}

2) <u>Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)</u>

f´(x)=$\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ = $\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$ f´(x) = 0 -> -4x=0 -> x=0

	(-∞,-1)	(-1,0)	(0,1)	(1,∞)
Signo f´(x)	+	+	-	-
Comportamiento de f(x)	↗	↗	↘	↘

- Crecimiento : (-∞, -1) ∪ ($-1,0$)
- Decrecimiento: (0,1)∪ ($1,\infty$)
- Tenemos un máximo en (0,-1)

3) <u>Concavidad</u>

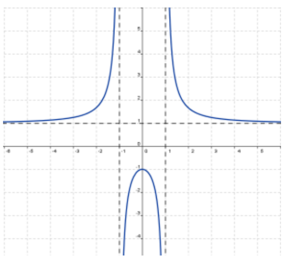
f´´(x) =$\frac{-4(x^2-1)^2+4x\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$ = $\frac{(x^2-1)[-4(x^2-1)+4x\cdot 4\cdot 2x]}{(x^2-1)^4}$ = $\frac{-4x^2+4+16x^2}{(x^2-1)^3}$ = $\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$

f´´(x) = 0 -> 12x^2+4=0 → No tiene solución

	(-∞, -1)	(-1,1)	(1,∞)
Signo de f´´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	∪	∩	∪

- Cóncava hacia arriba: (-∞, -1) ∪ ($1,\infty$)
- Cóncava hacia abajo: (-1,1)
- No hay punto de inflexión
-

4) <u>Representación gráfica</u>



f(x)=$\frac{2x^2}{(2-x)^2}$

1) Dominio

D(f)=$\forall x \in \mathbb{R}$ - $\{2\}$

2) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

f´(x)= $\frac{4x\cdot(2-x)^2-2x^2\cdot 2(2-x)\cdot(-1)}{(2-x)^4}$ = $\frac{8x-4x^2+4x^2}{(2-x)^3}$ = $\frac{8x}{(2-x)^3}$

f´(x) = 0 -> 8x = 0 -> x=0

	(-∞,0)	(0,2)	(2,∞)
Signo f´(x)	-	+	-
Comportamiento de f(x)	↘	↗	↘

- Crecimiento : (0,2)
- Decrecimiento: (-∞, $0) \cup (2, \infty)$
- Tenemos un mínimo en (0,0)

3) Concavidad

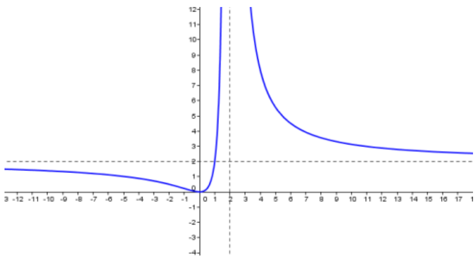
f´´(x)= $\frac{8(2-x)^3-8x\cdot 3\cdot(2-x)^2(-1)}{(2-x)^6} = \frac{16-8x+24x}{(2-x)^4} = \frac{16x+16}{(2-x)^4}$

f´´(x)= $\frac{16x+16}{(2-x)^4}$ f´´(x) = 0 -> $\frac{16x+16}{(2-x)^4} = 0 \rightarrow 16x + 16 = 0 \rightarrow x = -1$

	(-∞,-1)	(-1,2)	(2,∞)
Signo de f´´(x)	-	+	+
Comportamiento de f(x)	∩	∪	∪

- Cóncava hacia arriba: (-1,2)
- Cóncava hacia abajo: (-∞, $-1) \cup (2, \infty)$
- Puntos de Inflexión: $\left(-1, \frac{2}{9}\right)$

4) Representación gráfica



$f(x)=\frac{6x}{x^2+1}$

1) Dominio

D(f)= $\forall x \in$ R

2) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$f'(x)=\frac{6(x^2+1)-2x\cdot 6x}{(x^2+1)^2}=\frac{6x^2+6-12x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2}$ f´(x) = 0 -> $-6x^2+6=0$ -> $x=\pm 1$

	(-∞,-1)	(-1,1)	(1,∞)
Signo f´(x)	-	+	-
Comportamiento de f(x)	↘	↗	↘

- Crecimiento : (-1,1)
- Decrecimiento: $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$
- Tenemos un mínimo en (-1,-3)
- Tenemos un máximo en (1,3)

3) Concavidad

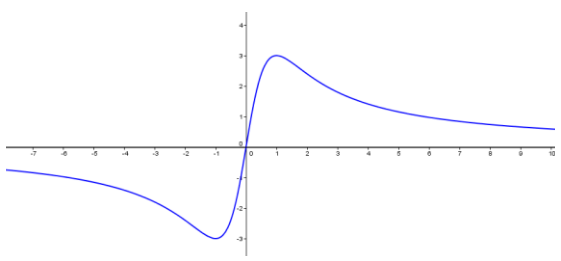
$f''(x)=\frac{-12x(x^2+1)^2-(-6x^2+6)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{-12x^3-12x+24x^3-24x}{(x^2+1)^3}=\frac{12x^3-36x}{(x^2+1)^3}$

f´´(x) = 0 -> $\frac{12x^3-36x}{(x^2+1)^3}=0 \rightarrow 12x^3-36x=0 \rightarrow x=0$ e $x=\pm\sqrt{3}$

	(-∞,-√3)	(-√3,0)	(0,√3)	(√3,∞)
Signo de f´´(x)	-	+	-	+
Comportamiento de f(x)	∩	∪	∩	∪

- Cóncava hacia arriba: (-√3,0)∪ (√3,∞)
- Cóncava hacia abajo: (-∞,-√3)∪ (0,√3)
- Puntos de Inflexión: (-√3;-2,5)
  (0,0)
  (√3; 2,5)

4) Representación gráfica



f(x)= $\frac{lnx}{x}$

1) Dominio Lo primero que debemos hacer es calcular el dominio de la función.

El dominio de f(x) → $\left.\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\}$ → D(f)=x∈(0,∞)

2) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

- Calculamos la derivada de la función

f´(x)= $\frac{\frac{1}{x}x-1\cdot lnx}{x^2} = \frac{1-lnx}{x^2}$

- Igualamos la derivada a 0. Con ello estaremos calculando los posibles extremos relativos (máximos y mínimos)

f´(x)=0 → 1-lnx=0 → x= e

- Con la ayuda del dominio y de los valores que hacen cero la primera derivada realizamos la siguiente tabla:

$$\begin{cases} D(f) = x\epsilon(0,\infty) \\ x = e \end{cases}$$

x	**(0, *e*)**	**(e,∞)**
Signo de f´(x)	+	-
Comportamiento	↗	↘

- Crecimiento: (0,e)
- Decrecimiento (e,∞)
- Máximo relativo que también es absoluto: (e, $\frac{1}{e}$) → Las coordenadas se calculan siempre en f(x)

3) Concavidad

- Calculamos la segunda derivada, para ello volvemos a derivar la primera derivada.

$$f''=\frac{\frac{-1}{x}\cdot x^2-2x\cdot(1-Lnx)}{x^2}=\frac{-x-2x+2x\cdot Lnx}{x^2}=\frac{-3x+2x\cdot Lnx}{x^2}$$

- Igualamos la segunda derivada a cero.

f´´(x)= 0 → f´´(x) = $\frac{-3x+2x\cdot Lnx}{x^2}=0$ → x·(-3+2lnx) =0

$$\rightarrow \begin{cases} x=0 \; no\ puede\ ser\ punto\ de\ inflexión\ ya\ que\ no\ se\ encuentra\ en\ el\ dominio \\ x=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3} \end{cases}$$

- Con la ayuda del dominio y de los valores que hacen cero la segunda derivada realizamos la siguiente tabla:

$$\begin{cases} D(f)=x\in(0,\infty) \\ \text{x} = 0 \text{ y x} = \sqrt{e^3} \end{cases}$$

x	**$(0,\sqrt{e^3})$**	**$(\sqrt{e^3},\infty)$**
Signo de f´(x)	-	+
Comportamiento	∩	∪

- Cóncava hacia arriba: $(\sqrt{e^3},\infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(0,\sqrt{e^3})$
- Puntos de Inflexión: ($\sqrt{e^3}$; 0,33)

4) Representación gráfica