EXPERIENCIAS ALEATORIAS. SUCESOS

Experiencias Deterministas y Aleatorias

- Experiencias deterministas: son aquellos cuyo resultado se puede predecir de antemano. Ejemplo: Saber la velocidad con la que llega una piedra al suelo, sabiendo la altura desde la que se lanza y la velocidad inicial.

- Experiencia Aleatoria: Aquella que depende del azar: extraer la carta de una baraja, resultado de una quiniela, lanzar un dado, sacar bolas de una urna..

Espacio Muestral

Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio y se designa con la letra E.

Ejemplo: El lanzamiento de una moneda → E= $\{C, X\}$

El lanzamiento de un dado cúbico → E=$\{1,2,3,4,5,6\}$

Sucesos

Se llama suceso de un experimento aleatorio a cualquier subconjunto del espacio muestral E.

El conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio se denomina espacio de sucesos y se designa por S.

Ejemplo: Obtener un número par en el lanzamiento de 1 dado cúbico A=$\{2,4,6\}$

Suceso Elemental: Aquellos que están formados por un único punto muestral.

Ejemplo: salir el dado número tres B=$\{3\}$

Suceso Seguro: Aquel que siempre se cumple. Se representa también por E.

Ejemplo: Sacar un dado con un valor inferior a 7. E=$\{1,2,3,4,5,6\}$

Suceso Imposible: Aquel que no se puede realizar, se expresa con $\emptyset$

Ejemplo: Sacar un dado con un valor superior a 6.

Complementario: El suceso $A' = A^c = \bar{A} = E - A$ se llama suceso contrario o complementario de A.

Ejemplo: Suceso contrario a sacar un número par $A^c = \bar{A} = \{1,3,5\}$

Operaciones con Sucesos

Dados dos sucesos A y B, se llama

Unión: A ∪ B (A unión B) se produce cuando se realiza A o B , es decir alguno de los dos.

Intersección: A ∩ B (A intersección B) se produce cuando se realizan simultáneamente los sucesos A y B.

Diferencia: A – B (A menos B) (A∩ $\bar{B}$) es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.

Sucesos Incompatibles: Dos sucesos, A y B, se llaman incompatibles cuando no tienen ningún elemento en común. Ejemplo A ∩ B = ∅.

Si A ∩ B ≠ ∅ → Suceso Compatible

Propiedades de las operaciones con Sucesos

Distributivas: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De Simplificación: $A \cup (B \cap A) = A$

$A \cap (B \cup A) = A$

Con el complementario: $\left(\overline{\overline{A}}\right)$ = A

A – B = A ∩ $\overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Frecuencia Relativa y Absoluta. Probabilidad

Realizamos N veces una experiencia aleatoria.

Frecuencia absoluta: de un suceso S ,se denomina al número de veces que ocurre S. Se designa por f(S).

Frecuencia Relativa: de un suceso S, se denomina a la proporción de veces que ocurre S. Se designa por $f_r(S)$. $f_r(S)=\frac{f(S)}{N}$

- Ejemplo: Llamamos A al suceso de que salga el número 2 al tirar un dado cúbico. Tiramos un dado 300 veces, saliendo 30 veces el número 2.
    - Frecuencia Absoluta: f (A) = 30
    - Frecuencia Relativa: f_r (A)= $\frac{f(A)}{N}=\frac{30}{300}$

Propiedades de la frecuencia Relativa

- La frecuencia relativa del suceso seguro es 1. f_r (E)= 1
- La frecuencia relativa del suceso imposible es 0. f_r (∅)= 0
- La frecuencia relativa de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.
- La frecuencia relativa de la unión de dos sucesos incompatibles, A y B es igual a la suma de las frecuencias relativas de los sucesos.

  $f_r(A \cup B)= f_r(A) + f_r(B)$

- La suma de la frecuencia relativa de un suceso y de la frecuencia relativa de su contrario es 1.

  $f_r(A) + f_r(\overline{A}) = 1$

  Ejemplo: Lanzamos una moneda 200 veces (N=200), saliendo cara 90 veces y 110 veces cruz.

$$\left.\begin{array}{l} A=\{Cara\} \rightarrow f(A)=90 \rightarrow \text{fr}(A)=\frac{90}{200} \\ \overline{A}=\{Cruz\} \rightarrow f(\overline{A})=110 \rightarrow \text{fr}(\overline{A})=\frac{110}{200} \end{array}\right\} \rightarrow f_r(A)+f_r(\overline{A})=1$$

Probabilidad

La probabilidad de un suceso A, de un experimento aleatorio que puede repetirse un número indefinido de veces, n, es igual al número al que se aproximan las frecuencias relativas del suceso.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_r(A)$$

Propiedades de las Probabilidades

Axiomáticas: Inspiradas en las propias de la frecuencia relativa.

Las propiedades de cada suceso es un número. Se han de cumplir los siguientes axiomas:

- Axioma 1: Cualquiera que sea el suceso S, P(S)≥ 0
- Axioma 2: Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades. $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Axioma 3: La probabilidad total es 1: P(E)=1

Estas tres propiedades indican que disponemos de una cantidad total de probabilidad igual a 1 que hemos de repartir aditivamente entre los distintos sucesos.

Teoremas: Se deducen de las propiedades axiomáticas

- Teorema 1: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Teorema 2: $P(\emptyset) = 0$
- Teorema 3: Si $A \subset B$, entonces $P(B) = P(A) + P(B-A)$
- Teorema 4: Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$
- Teorema 5: Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son incompatibles dos a dos, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$$

- Teorema 6: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Teorema 7: Si el espacio muestral E es finito y un suceso es $S=\{x_1, x_2, \ldots x_k\}$ entonces

$$P(S) = P(x_1) + P(x_2) + .. + P(x_K)$$

Regla de Laplace

Un espacio muestral es equiprobable si consta de un número finito de sucesos simples y todos ellos tienen la misma posibilidad de suceder.

Si un espacio muestral es equiprobable, entonces la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles.

Si indicamos la probabilidad de A por P(A), esta definición se puede expresar así:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{Número de casos posibles}}$$

Casos favorables: son los elementos que componen el suceso A.

Casos posibles: son todos los resultados del experimento, todos los elementos del espacio muestral.

Ejemplo: Una experiencia aleatoria consiste en lanzar tres monedas al aire. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) A="obtener tres caras"

b) B=" obtener dos caras y una cruz"

c) C="Obtener una cara y dos cruces"

Vamos a llamar C= Caras y X = cruz

El espacio muestral sería E=$\{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$ Habrá 8 posibilidades.

a) A="obtener tres caras" → A=$\{CCC\}$ Número de casos para el suceso A es 1.

   P(A)= $\frac{1}{8}$

b) B=" obtener dos caras y una cruz" → B= $\{CCX, CXC, XCC\}$ Habrá 3 posibilidades

   P(B)= $\frac{3}{8}$

c) C="Obtener una cara y dos cruces" → C=$\{CXXXCX, XXC\}$ Habrá 3 posibilidades

   P(C)= $\frac{3}{8}$

Ejemplo 2: Se lanzan dos dados regulares.

a) Describe el espacio muestral.

b) Calcula la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea 5.

El espacio muestral será:

E= $\begin{Bmatrix} (1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5(1,6)(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6)(4,1)(4,2) \\ (4,3)(4,4)(4,5)(4,6)(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6) \end{Bmatrix}$

Vamos a tener 36 posibles resultados.

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	**5**	6	7
2	3	4	**5**	6	7	8
3	4	**5**	6	7	8	9
4	**5**	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

b) Observando la tabla el número de casos en el que la suma de los dos dados suman 5 son 4.

P(suma = 5) = $\frac{4}{36}$

Probabilidad Condicionada. Sucesos independientes.

Probabilidad Condicionada

Dados dos sucesos, A y B, se llama probabilidad de B condicionada a A, y se designa P(B/A) a P(B/A) = $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ y mide la proporción de veces que ocurre B de entre las que ocurre de A.

De la expresión anterior se deduce que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(\frac{B}{A})$

Ejemplo: El 60% de los alumnos de un centro aprobaron Filosofía, y el 70% aprobaron Matemáticas. Además, el porcentaje de alumnos que aprobaron Filosofía habiendo aprobado Matemáticas es del 80%. Si Juan sabe que ha aprobado Filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también Matemáticas?

Sea los suceso M="aprobar Matemáticas" y F="aprobar Filosofía"

Del enunciado se deduce: P(M)= 0,7 P(F)=0,6 P(F/M)=0,8

$P(M/F)= \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M) \cdot P(\frac{F}{M})}{P(F)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}8}{0{,}6} = 0{,}93$

Sucesos Independientes

Dos sucesos, A y B, se dice que son independientes cuando:

P(A/B)=P(A) y P(B/A)=P(B)

Cuando dos sucesos son independientes la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades: A y B independientes → $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ejemplo: Se extraen dos cartas de una baraja española. Halla la probabilidad de que sean dos figuras (sota, caballo o rey) si devolvemos la carta a la baraja.

Sean los sucesos A_1="sacar figura en la primera extracción" y A_2="sacar figura en la segunda extracción"

La probabilidad a calcular es la del suceso $A_1 \cap A_2$. En este caso los sucesos A_1 *y* A_2 son independientes; por tanto:

$P(A_1 \cap A_2)=P(A_1) \cdot P(A_2)= \frac{12}{40}\frac{12}{40} = \frac{9}{100}$

Pruebas Compuestas

Se llaman pruebas compuestas a aquellas experiencias en las que fácilmente podemos distinguir dos o más etapas. En ellas, el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos se simplifica mucho calculando las probabilidades de sus componentes.

Dos pruebas compuestas son independientes cuando el resultado de una no influye en la otra. Si no es así, se llaman dependientes.

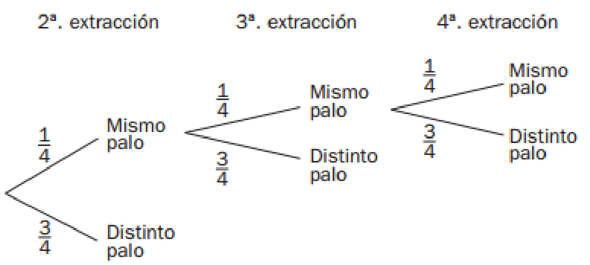
Experiencias Independientes

Se dice que dos o más pruebas son independientes cuando el resultado de cada una de ellas no influye en las probabilidades de los distintos resultados de las otras. Por tanto, los sucesos correspondientes a la primera son independientes de los sucesos correspondientes a la segunda.

Si n pruebas son independientes y los sucesos S_1, S_2,……,S_n corresponden, respectivamente, a cada una de ellas se cumple que:

P(S_1 en la 1ª y S_2 en la 2ª y …..S_n en la n-ésima) = $P(S_1)\cdot P(S_2)\ldots P(S_n)$

Ejemplo: Se extraen cuatro cartas de una baraja española. Halla la probabilidad de que llas cuatro cartas sean del mismo palo si devolvemos la carta a la baraja.



P(cuatro del mismo palo)= $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ = $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}=0{,}016$

Experiencias Dependientes

Dos experiencias son dependientes cuando el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda. Las probabilidades de sucesos compuestos se obtienen así:

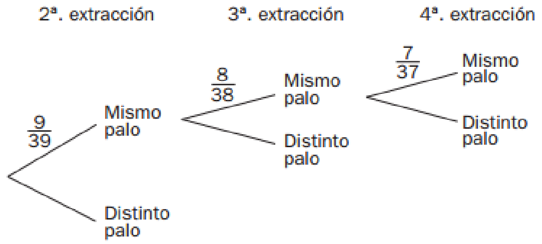
P(S_1 en la 1ª y S_2 en la 2ª) = P(S_1 en la 1ª)· P(S_2 en la 2ª supuesto que ocurrió S_1 en la 1ª)

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1)\cdot P(S_2/S_1)$$

Si se encadenan más de dos experiencias dependientes, las probabilidades de los sucesos compuestos se obtienen análogamente:

$$P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = P(S_1)\cdot P(S_2/S_1)\cdot P(S_3/S_1 \cap S_2)$$

Ejemplo: Se extraen cuatro cartas de una baraja española. Halla la probabilidad de que llas cuatro cartas sean del mismo palo si no devolvemos la carta a la baraja.



P(cuatro del mismo palo)= $\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}\cdot\frac{7}{37}=\frac{504}{54834}=$ $0{,}0092$

Probabilidad Total

Tenemos n sucesos A_1, A_2, …., A_n incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_n = E$

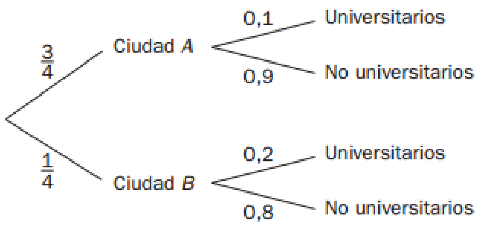
Entonces, para cualquier suceso S se cumple:

P(S) = $P(A_1)\cdot P(S/A_1)$+ $P(A_2)\cdot P(S/A_2)$+….+ $P(A_n)\cdot P(S/A_n)$

A la probabilidad P(S) descompuesta de este modo se le llama probabilidad total.

Ejemplo: La ciudad A tiene el triple de habitantes que la ciudad B, pero la proporción de universitarios en la ciudad B es el doble que en la A..

Se elige un habitante al azar. Averigua la probabilidad de que sea universitario, sabiendo que la proporción de estos en la ciudad A es del 10%.



P(universitarios)=P(ciudadA)·P(universitario/ciudadA)+ P(ciudadB)· P(universitario/ciudad)= $\frac{3}{4}\cdot 0{,}1+\frac{1}{4}\cdot 0{,}2=$ $0{,}125$

Fórmula de Bayes

$$P(A_i/S)=\frac{P(A_i)\cdot P(S/A_i)}{P(A_1)\cdot P(S/A_1)+\cdots+P(A_n)\cdot P(S/A_n)}$$