1) Área encerrada por: función $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x-3}$, la recta x = 5, la recta x = 9 y la función $g(x)=-\frac{4}{x-3}$ (Junio 2005)

- Calculamos el punto de corte de las dos funciones:
  $\frac{x^2-6x+5}{x-3}=-\frac{4}{x-3}$ → $x^2-6x+9=0$ → x= 3 (doble) Como este punto no se encuentra dentro del intervalo [5,9] no nos interesa.

- Vamos a tener un único recinto [5, 9]. La gráfica de *f* es siempre positiva (salvo en x = 5 que vale 0), mientras que la gráfica de *g* está siempre por debajo del eje; en consecuencia, el área pedida viene dada por:

$$A = \int_5^9 (f(x)-g(x))dx = \int_5^9 \left(\frac{x^2-6x+5}{x-3}+\frac{4}{x-3}\right)dx =$$

$$= \int_5^9 \left(\frac{x^2-6x+9}{x-3}\right)dx = \int_5^9 (x-3)dx = \left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_5^9 = 16$$

2) El área encerrada por: la función $f(x)=\frac{x^3-27}{x^2-9}$, la recta x = 4, la recta x = 6 y la función $g(x)=\frac{9}{x+3}$ (Junio 2006)

- Calculamos el punto de corte de las dos funciones

  $\frac{x^3-27}{x^2-9}=\frac{9}{x+3}$ → $x^3-9x=0 \rightarrow x(x^2-9)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \\ x=3 \end{cases}$ Ninguno de los puntos se encuentra dentro de intervalo [4,6]

- Tendremos un único recinto [4,6] El área pedida viene dada por:

$$A = \int_4^4 (f(x)-g(x))dx = \int_4^6 \left(\frac{x^2+3x+9}{x+3}-\frac{9}{x+3}\right)dx =$$

$$= \int_4^6 \left(\frac{x^2+3x}{x+3}\right)dx = \int_4^6 \left(\frac{x(x+3)}{x+3}\right)dx = \int_4^6 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_4^6 = 18-8=10$$

3) Dada la función $f(x)=3x^3-x^2-2x$, se pide hallar: (Junio 2008)
Área encerrada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje *OX*.

- La función $f(x)=3x^3-x^2-2x$ es polinómica y, por tanto, definida en todo IR.
- Los puntos de corte con el eje *OX* vienen dados a partir de las soluciones de la ecuación $3x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0,\quad 3x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=0, x=1, x=-\frac{2}{3}$.

Por tanto, los cortes con el eje *OX* son los puntos $(0,0),(1,0),\left(-\frac{2}{3},0\right)$.

- Vamos a tener 2 recintos [-2/3,0] y [0,1]

Área=

$$\int_{-2/3}^{0}\left(3x^3-x^2-2x\right)dx+\int_0^1-\left(3x^3-x^2-2x\right)dx=\left[\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2/3}^{0}-\left[\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^1=$$

$$=\frac{16}{81}+\frac{7}{12}=\frac{253}{324}\quad u^2$$

4) Dada la función $f(x)=-x^3-2x^2+3x$, se pide hallar: (Septiembre 2008)
Área encerrada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje *OX*.

- Al ser una función polinómica, la función está definida en todo *IR*.
- Puntos de corte con los ejes:

  OX: $y=0 \rightarrow -x^3-2x^2+3x=0 \Leftrightarrow x=0; x=1; x=-3.$

  OY: $x=0 \rightarrow y=0.$

  Así, los puntos de corte con los ejes son (0, 0), (1, 0) y (-3, 0).

- Vamos a tener dos recintos [-3,0] y [0,1]

Área=

$$\int_{-3}^{1}|f(x)|dx=-\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=\int_{-3}^{0}\left(x^3+2x^2-3x\right)dx+\int_0^1\left(-x^3-2x^2+3x\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^1=-\left(\frac{81}{4}-\frac{54}{3}-\frac{27}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{71}{6}\,u^2$$

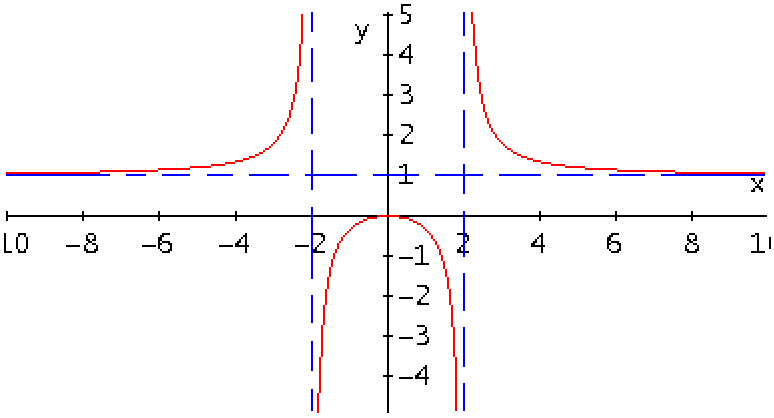
5) Dada la función $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$, obtener: **(Junio 2009)**

Área encerrada por la gráfica de la función, el eje *OX* y las rectas *x* = 0 y *x* = 1.

- La función está definida para todo x tal que $x^2 - 4 \neq 0$. Esto es: Dom = **R** − {−2, 2}.

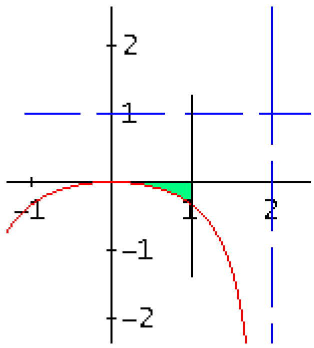
Corte con el eje OY: Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Punto (0, 0).

Corte con el eje OX: Si $y = 0 \Rightarrow x = 0$. Punto (0, 0).



- Vamos a tener un único recinto [0,1]

- El área pedida, que es la sombreada en la figura adjunta, viene dada por la integral.



Área= $-\int_0^1 \dfrac{x^2}{x^2-4}\,dx$ $\longrightarrow$ (El signo menos es consecuencia de que el recinto está por debajo del eje *OX*)

Como $\dfrac{x^2}{x^2-4} = 1 + \dfrac{4}{x^2-4} = 1 + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}$, la integral vale

$$-\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-4}\,dx = -\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \left(-x - \ln|x-2| + \ln|x+2|\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -1 - \ln 1 + \ln 3 - (0 - \ln 2 + \ln 2) = \ln 3 - 1$$

La descomposición en fracciones simples de $\dfrac{4}{x^2-4}$, se hace como sigue:

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4} \Rightarrow 4 = A(x+2) + B(x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 1;\ B = -1.$$

6) Dada la función **(Junio 2010)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-7x}{3} + 5 & \text{si} -3 < x \le 1 \\ -x^2 + ax + 4 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ \dfrac{bx - 15}{x - 1} & \text{si } 3 < x < 6 \end{cases}$$

Para *b* = 1, calcular la integral definida $\int_4^5 f(x)dx$

Para $b = 1$, $\int_4^5 f(x)dx = \int_4^5 \frac{x-15}{x-1}dx = \int_4^5 \left(\frac{x-1-14}{x-1}\right)dx = \int_4^5 \left(1 - \frac{14}{x-1}\right)dx =$

$\left(x - 14\ln(x-1)\right)\Big|_4^5 = 5 - 14\ln 4 - \left(4 - 14\ln 3\right) = 1 - 14\ln\frac{4}{3} \cong -3{,}27$

7) Dada la función **(Junio 2011)**

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5, & \text{si } x \le -2 \\ x^2 - 2x + 1, & \text{si } -2 < x \le 3 \\ \dfrac{x + b}{(x-1)^2} & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Para *b* = 13, calcular la integral definida $\int_4^6 f(x)\,dx$ **.**

Para $b = 13$, $\int_4^6 f(x)dx = \int_4^6 \frac{x+13}{(x-1)^2}dx = \int_4^6 \left(\frac{x-1+14}{(x-1)^2}\right)dx = \int_4^6 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{14}{(x-1)^2}\right)dx =$

$= \left[\ln(x-1) - \frac{14}{x-1}\right]_4^6 = \ln 5 - \frac{14}{5} - \ln 3 + \frac{14}{3} = \frac{7}{10} + \ln\frac{5}{3}$