Continuidad de una función

Una función f(x) es continua en el punto x=a, si existe el límite cuando x tiende a "a" y coincide con el valor de la imagen de "a", f(a)

Es continua si → $\exists \boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)}$ **= f(a)**

Una función es continua en un punto x=a si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $\exists \lim_{x\to a-} f(x)$; $\exists \lim_{x\to a+} f(x)$ y $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$
2. ∃ f(a)
3. Los límites laterales son iguales y coinciden con el valor de la función en ese punto. $\lim_{x\to a} f(x)$ =f(a)

- Para que tenga sentido de hablar de continuidad en un punto, este debe pertenecer al dominio de la función.

  f(x)=$\frac{x}{x-1}$ D(f)= x∈ $\mathbb{R}$ - $\{x = 1\}$

  f(x) no sería continua en x=1

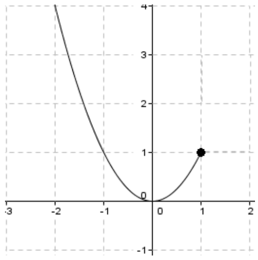
  $$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = \frac{+}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{+}{0^+} = +\infty\end{array}\right\} \text{ Por lo tanto } \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1}$$

  Por lo tanto la función f(x) tendría una discontinuidad en x=1

Continuidad Lateral

Continuidad por la izquierda

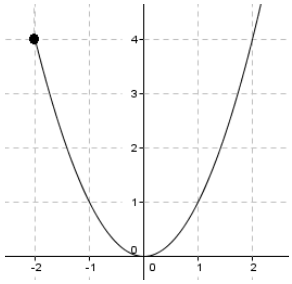
Una función f(x) es continua por la izquierda en el punto x=a si:



$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 1$

Continuidad por la derecha

Una función f(x) es continua por la derecha en el punto x=a si:



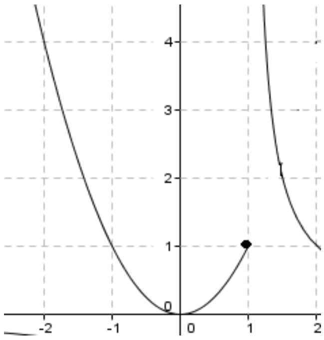
$\lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2) = 4$

Continuidad en un intervalo

- Una función es continua en un intervalo abierto (a,b) si lo es en cada uno de los puntos interiores.
- Una función es continua en un intervalo cerrado [a,b] si lo es tanto en los puntos interiores como por la derecha en "a" y por la izquierda en b.

Tipos de discontinuidad

- **Discontinua inevitable de salto infinito**:
  Una discontinuidad es inevitable o de primera especie si los límites laterales en x=a son distintos. Y es de salto Infinito si alguno de los límites laterales es infinito o no existe.
  Ej: f(x)=$\begin{cases} x^2 \; si \; x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} \; si \; x > 1 \end{cases}$



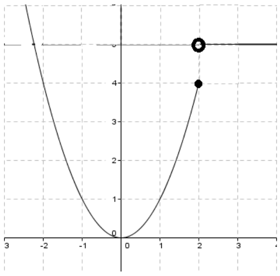
$\lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

- **Discontinua inevitable de salto finito**: Si los dos límites laterales **son finitos** pero distintos. El salto es la diferencia, en valor absoluto, de los límites laterales.

$\exists \lim_{x\to a^-} f(x); \exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ pero $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$

Salto = $|\lim_{x\to a^-} f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)|$



Ej: f(x)=$\begin{cases} x^2 \; si \; x \leq 2 \\ 5 \; si \; x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$

$\lim_{x\to 2^+} 5 = 5$

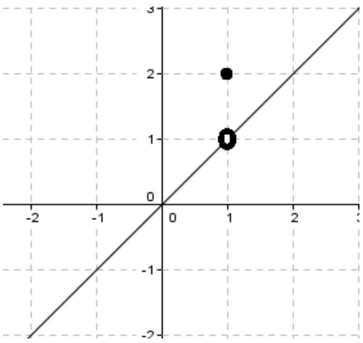
En x=2 hay una discontinuidad inevitable de salto finito 1.

- **Discontinua Evitable**

Si los dos límites laterales **son finitos e iguales**, pero su valor no coincide con f(a) o no existe f(a).

$\exists \lim_{x\to a^-} f(x)$; $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ f(a)$\neq \lim_{x\to a} f(x)$

Ej: f(x)=$\begin{cases} \frac{x^2-x}{x-1} \; si \; x \neq 1 \\ 2 \; si \; x = 1 \end{cases}$



$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x}{x-1} = 1$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x}{x-1} = 1$

f(1)=2

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$= $\lim_{x\to 1^-} f(x)$≠f(1)

La función presenta una discontinuidad evitable en x=1porque los límites laterales coinciden pero ese valor es distinto al valor de la función en ese punto.

Ejercicios Resueltos

1) Estudiar la continuidad de la función f(x)=$\begin{cases} \mathbf{2^x} & \boldsymbol{si\ x < 2} \\ \mathbf{4} & \boldsymbol{si\ x \geq 2} \end{cases}$

D(f)=x$\epsilon\mathbb{R}$ → La función f(x) está definida por una exponencial y función polinómica por lo tanto podemos decir que la función va a ser continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en el punto de ruptura que estudiaremos.

x=2

$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 2^-} 2^x = 4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} 4 = 4 \\ f(2) = 4 \end{array}\right\}$ Como los límites laterales son iguales y su valor coincide con el valor de la función en ese punto, la función será continua. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$= $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$= f(2)

2) Estudiar la continuidad de la función f(x)= $\begin{cases} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{si\ x < 1} \\ \boldsymbol{2x - 1} & \boldsymbol{x \geq 1} \end{cases}$

La función está definida por una polinómica y una racional la cual no estaría definida para x=0 ya que ese valor anula el denominador. D(f)= x$\epsilon\mathbb{R}$-{0}
También debemos estudiar el punto de ruptura, es decir x=1

x=0

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{+}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{+}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$ Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty\ y \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ Presenta una discontinuidad Inevitable de salto infinito

x=1

$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 2x - 1 = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\}$ Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$=f(1)=1 → La función será continua en el punto de ruptura x=1

3) Estudiar la continuidad de la función f(x)=$\begin{cases} \mathbf{3x^2 - 2^x \; si \; x < 0} \\ \mathbf{x^2 - x - 1 \; si \; 0 \leq x < 1} \\ \mathbf{1 + lnx \;\; si \; x \geq 1} \end{cases}$

La primera función está definida para todo $\mathbb{R}$, la segunda función es una polinómica por lo tanto también está definida para todo $\mathbb{R}$ y por último tenemos una función logarítmica que no estaría definida para x≤ 0 pero no nos importa ya que esa función estaría definida para x≥ 1.

También debemos estudiar los puntos de ruptura, es decir para x=0 y x=1

x=0

$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 0^-} 3x^2 - 2^x = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} x^2 - x - 1 = -1 \\ f(0) = -1 \end{array}\right\}$ Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -1$ La función es continua en x=0

x=1

$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 1^-} x^2 - x - 1 = -1 \\ \lim_{x\to 1^+} 1 + lnx = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\}$ Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \pm\infty$ La función tendrá en x=1 una discontinuidad Inevitable de salto Finito 2.

4) Estudiar la continuidad de la función f(x)=$\mathbf{\frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}}$

Se trata de una función racional. Por lo tanto los puntos que no pertenecen al dominio son aquellos que anulan el denominador.

$x^2 - x - 6 = 0$ → x≠-2 y x≠3→Por lo tanto D(f)= x∊ℝ-$\{-2,3\}$

x=-2

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \frac{+}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \frac{+}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$ $Como \lim_{x\to -2^-}$ f(x)= $-\infty$ y $\lim_{x\to -2^+}$f(x)=+∞

En x=-2 presenta una discontinuidad Inevitable de salto infinito.

x=3

$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \frac{12}{5} \\ \nexists f(3) \end{array}\right\}$ Como $\lim_{x\to 3^-}$f(x)= $\lim_{x\to 3^+}$f(x) y ∄ f(3) → En x=3 tendremos una discontinuidad Evitable. Se evita definiendo f(3)=$\lim_{x\to 3} f(x)$=$\frac{12}{5}$

5) Estudiar la continuidad de la función f(x)= $\begin{cases} -x^2+5x & si\ 0 \le x \le 5 \\ x-5 & si\ 5 < x \le 10 \end{cases}$

Aquí tenemos dos funciones polinómicas, por lo que la función será continua en el intervalo en el que está definida. D(f)= x϶[0,10]

También vamos a estudiar el punto de ruptura, es decir para x=5

x=5

$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 5^-} -x^2+5x=0 \\ \lim_{x\to 5^+} x-5=0 \\ f(5)=0 \end{array}\right\}$ Como $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = f(5)$ → En x=5 la función es continua.

Por lo tanto el dominio de la función será: D(f)= x϶[0,10]

6) Estudiar la continuidad de la función f(x)= $\begin{cases} 3^x & si\, x<0 \\ -x^2+x+1 & si\, 0 \le x < 1 \\ x+2 & si\, x>1 \end{cases}$

Tenemos una función exponencial y dos funciones polinómicas por lo que la función será continua en el intervalo en el que está definida.

También vamos a estudiar los puntos de ruptura, es decir para x=0 y x=1

x=0

$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 0^-} 3^x=1 \\ \lim_{x\to 0^+} -x^2+x+1=1 \\ f(0)=1 \end{array}\right\}$ Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ La función será continua en x=0

x=1

$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 1^-} -x^2+x+1=1 \\ \lim_{x\to 1^+} x+2=2 \\ f(1)=1 \end{array}\right\}$ Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) \ne \lim_{x\to 1^+} f(x) \ne \pm\infty$ Presenta una discontinuidad Inevitable de salto Finito 1.

7) Estudiar la continuidad de la función f(x)=$\frac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}$

Se trata de una función racional. Por lo tanto los puntos que no pertenecen al dominio son aquellos que anulan el denominador.

$x^2 + 3x - 10 \neq 0$ → $\begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \end{cases}$ → D(f)= x∈ℝ-$\begin{Bmatrix} x = 2 \\ x = -5 \end{Bmatrix}$

<u>En x= 2</u>

$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}$= Tendremos una indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$, Factorizamos

$\lim_{x\to 2} \frac{(3x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \frac{10}{7}$ Vemos que el límite existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ pero en x=2 la función no existe →$\nexists f(2)$ Por lo tanto en x=2 tendremos una discontinuidad Evitable. Se evita definiendo f(2)=$\lim_{x\to 2} f(x)$=$\frac{10}{7}$

<u>En x=-5</u>

$\lim_{x\to -5} \frac{(3x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \frac{-11}{0}$ → Tendremos una indeterminación del tipo $\left[\frac{k}{0}\right]$ Por lo tanto debemos calcular los límites laterales.

$\begin{cases} \lim_{x\to -5^-} f(x) = \frac{-}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x\to -5^+} f(x) = \frac{-}{0^+} = -\infty \end{cases}$ → Vemos que $\lim_{x\to -5^-} f(x) = +\infty \ y \ \lim_{x\to -5^+} f(x) = -\infty$ Por lo tanto tendremos una discontinuidad Inevitable de salto Infinito en x=-5. Tendremos una asíntota vertical.

8) Estudiar la continuidad de la función f(x)= $\begin{cases} -2x-3 & si\ x<-1 \\ x^2-2 & si -1\leq x<2 \\ 3x+1 & si\ x\geq 2 \end{cases}$

Todas las funciones son funciones polinómicas, por lo tanto podemos decir que la función va a ser continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en el punto de ruptura que estudiaremos.

x=-1

$\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} -2x-3=-1 \\ \lim_{x\to -1^+} x^2-2=-1 \\ f(-1)=-1 \end{cases}$ → Tenemos que $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$ por lo que podemos afirmar que en x=-1 la función es continua.

x=2

$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} x^2-2=2 \\ \lim_{x\to 2^+} 3x+1=7 \\ f(2)=7 \end{cases}$ → Como $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ Como los límites laterales son distintos no existirá el límite en x=2 ($\nexists \lim_{x\to 2} f(x)$

En x=2 tendremos una Discontinuidad Inevitable de salto Finito 5.

9) **Estudiar la continuidad de la función** $\left.\begin{matrix} 1\ si\ x<0 \\ x+1\ si\ 0<x<1 \\ x^2-2x\ si\ x\geq 1 \end{matrix}\right\}$ **=f(x)**

Todas las funciones son funciones polinómicas, por lo tanto podemos decir que la función va a ser continua en el intervalo en los que está definida. D(f)= x$\epsilon\mathbb{R}$-$\{x=0\}$ porque la función no está definida en x=0

Analizamos los puntos de ruptura, x=0 y x=1

x=0

$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} 1=1 \\ \lim_{x\to 0^+} x+1=1 \\ \nexists f(0) \end{cases}$ →Como $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\ y\ \nexists f(0)$ La función tendrá una discontinuidad Evitable en x=0. Se evita definiendo f(0)=$\lim_{x\to 0} f(x)$=1

x=1

$\left.\begin{matrix} \lim_{x\to 1^-} x+1=2 \\ \lim_{x\to 1^+} x^2-2x=-1 \\ f(1)=-1 \end{matrix}\right\}$ → Como $\lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \pm\infty$ La función presenta una discontinuidad Inevitable de salto Finito 3.

10) Estudiar la continuidad de la función (Junio 2008)

$$f(x)=\frac{x^3-5x+2}{x^2-5x+6}$$

clasificando las discontinuidades que se encuentren. ¿Es posible definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?

La función dada no está definida en los puntos donde se anula el denominador:

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\begin{cases}2\\3\end{cases}$$

Por tanto, la función no es continua si x = 2 o x = 3.

La discontinuidad de una función $f(x)$ es evitable en el punto x = a cuando existe el límite en ese punto. La discontinuidad se evita definiendo $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

En x = 2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x+2}{x^2-5x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x-1)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-1}{x-3}=\frac{7}{-1}=-7$$

Por tanto, en x = 2, la discontinuidad es Evitable. Se evita definiendo $f(2)=-7$.

En x = 3:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x+2}{x^2-5x+6}=\left(\frac{14}{0}\right)=\infty$$

Por tanto, en x = 3, la discontinuidad no puede evitarse. Presenta una discontinuidad Inevitable de salto Infinito.

11) Estudia la continuidad de la función: f(x) = $\begin{cases} \boldsymbol{e^x} & \boldsymbol{si\ x < 0} \\ \boldsymbol{3x^2+1} & \boldsymbol{si\ 0 \le x < 1} \\ \boldsymbol{4+lnx} & \boldsymbol{si\ x \ge 1} \end{cases}$

- Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Intervalos de Definición</u>

- Miramos cada una de las funciones y vemos que la primera función es una exponencial ($\boldsymbol{e^x}$) que está definida en todo su dominio, la segunda función que nos encontramos es una función polinómica $\boldsymbol{3x^2+1}$ que está definida en todo su dominio y por último nos encontramos una ecuación logarítmica $\boldsymbol{4+lnx}$ que estaría definida para x>0 que justamente coincide con el intervalo en el que está definida la función. Por lo tanto cada una de sus funciones en sus intervalos son continuas.

<u>Puntos de división de cada uno de los intervalos</u>

- Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en x=0 y x=1.

  - <u>En x=0</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2+1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \quad f(x) \text{es continua en } x = 0$$

  - <u>En x=1</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2+1 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 4+\ln x = 4 \\ f(1) = 4 \end{array}\right\} \quad f(x) \text{es continua en } x = 1$$

La función f(x) es continua en R

12) Dada la función f(x)= $\frac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10}$, estudia su continuidad. Indica el tipo de discontinuidad que hay en los puntos en los que no es continua.

f(x) = $\frac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10} = \frac{(x+5)(3x^2+1)}{(x+5)(x-2)}$

- Dominio: D(f) = $\forall x \epsilon R - \{x = -5, x = 2\}$
- Miramos que tipo de discontinuidad presenta en x= -5 y en x= 2

<u>En x= -5</u>

$$\lim_{x \to -5} f(x) = \lim_{x \to -5} \frac{3x^2+1}{x-2} = \frac{76}{-7}$$

$$\lim_{x \to -5^-} \frac{3x^2+1}{x-2} = \lim_{x \to -5^+} \frac{3x^2+1}{x-2} = \frac{76}{-7} \to \text{Discontinuidad Evitable en } x = -5$$

<u>En x= 2</u>

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2+1}{x-2} = \frac{13}{(0)}. \to \textit{Presenta una indeterminación } \left[\frac{k}{0}\right]$$

Hallamos los límites laterales

- $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad de salto Infinito en } x = 2$

13) **Calcula a y b para que la función será continua**

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+2a & si\ x\le 0 \\ \frac{x-3}{(x+2)^2} & si\ 0<x<4 \\ \frac{2}{x-b} & si\ x\ge 4 \end{cases}$$

x=0

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} x^2-x+2a=2a \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x-3}{(x+2)^2}=\frac{-3}{4} \\ f(0)=2a \end{array}\right\}$$ → Para que la función sea continua en x=0 se tiene que cumplir que

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ → 2a=-$\frac{3}{4}$ →**a=-$\frac{3}{8}$**

X=4

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 4^-} \frac{x-3}{(x+2)^2}=\frac{1}{36} \\ \lim_{x\to 4^+} \frac{2}{x-b}=\frac{2}{4-b} \\ f(4)=\frac{2}{4-b} \end{array}\right\}$$ → Para que la función sea continua en x=4 se tiene que cumplir que

$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=f(4)$ → $\frac{2}{4-b}=\frac{1}{36}$ → **b=-68**

14) **Calcula el valor de a y b para que la función sea continua**

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-x^2+a & si\ x<-1 \\ x^2+ax+1 & si\ x\ge -1 \end{cases}$$

Si x≠-1, tenemos dos funciones polinómicas que son funciones continuas.

x=-1

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} 2x^3-x^2+a=-2-1+a=-3+a \\ \lim_{x\to -1^+} x^2+ax+1=1-a+1=2-a \\ f(-1)=2-a \end{array}\right\}$$ →

Para que la función sea continua en x=-1 se tiene que cumplir que

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$ → -3+a=2-a → 2a=5 → **a=$\frac{5}{2}$**

15) Estudia la continuidad de la siguiente función: f(x)= $\begin{cases} \frac{2x+3}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{si } -1 \le x < 2 \\ 3x+1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

- Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

- Miramos cada función por separado y vemos que $\frac{2x+3}{x}$ no está definida en x=0 pero si miramos en el intervalo en el que está definida esta función es en x<-1 por lo que x=0 no entraría dentro de este intervalo. Esta función sería continua en el intervalo en el que está definida.
- Las demás funciones son una función cuadrática y lineal y estarían definidas en todo su intervalo.

Puntos de división de cada uno de los intervalos

- Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en x=-1 y x=2.

En x= -1

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x+3}{x} = -1 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x^2-2) = -1 \\ f(-1) = -1 \end{array}\right\}$$ f(x) es continua en x=-1

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2-2) = 2 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (3x+1) = 7 \end{array}\right\}$$ f(x) es discontinua en x=2. Hay una discontinuidad Inevitable de salto finito 5.

16) Calcula los valores de a y b para que la función sea continua.

f(x)=$\begin{cases} \mathbf{2x^3 - x^2 + a \;\; si\; x < -1} \\ \mathbf{x^2 + bx + 1 \;\; si - 1 \leq x < 1} \\ \mathbf{ax \;\;\; si\; x \geq 1} \end{cases}$

Tenemos funciones polinómicas que son funciones continuas.

<u>x=-1</u>

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to -1^-} 2x^3 - x^2 + a = -2 - 1 + a = -3 + a \\ \lim_{x\to -1^+} x^2 + bx + 1 = 1 - b + 1 = 2 - b \\ f(-1) = 2 - b \end{array}\right\} \rightarrow$$

Para que la función sea continua en x=-1 se tiene que cumplir que

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ → -3+a=2-b → **a+b=5**

<u>x=1</u>

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 1^-} x^2 + bx + 1 = 1 + b + 1 \\ \lim_{x\to 1^+} ax = a \\ f(1) = a \end{array}\right\} \rightarrow$$

Para que la función sea continua en x=1 se tiene que cumplir que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ → 2+b=a → **a-b=2**

Resolvemos el sistema de ecuaciones para que la función f(x) sea continua:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}} \\ \boldsymbol{b} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \end{cases}$$

17) Halla los valores de a y b para que la función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+bx-1 & si\ x<1 \\ 3x-a & si\ 1\le x<2 \\ 2^x+\log_2 x & si\ x\ge 2 \end{cases}$$

- Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

- Miramos cada función por separado:
  En el intervalo x ≥ **2** Tenemos $\log_2 x$, por lo que x tiene que ser mayor que 0 (x>0) que en nuestro caso si se cumple ya que nuestra función está de finida en x ≥ **2.**

Puntos de división de cada uno de los intervalos

- Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en x= 1 y x=2.

x=1

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-x^2+bx-1) = b-2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3x-a) = 3-a \\ f(1) = 3-a \end{cases}$$

→ Para que sea continua en x=1, se tiene que cumplir que **b-2=3-a**

x=2

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3x-a) = 6-a \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2^x+\log_2 x) = 4+1=5 \\ \mathrm{f}(2) = 5 \end{cases}$$

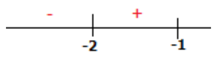
→ Para que sea continua en x=2, se tiene que cumplir que **6-a=5 -> a=1**

Tomo la primera ecuación **b-2=3-a** y sustituyo a por 1, b-2=3-1 → b= 4

18) **Estudiar la continuidad de la función f(x)=** $\begin{cases} \boldsymbol{|x+2|} & \boldsymbol{si\ x<-1} \\ \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{si-1\le x\le 1} \\ \boldsymbol{2x+1} & \boldsymbol{si\ x>1} \end{cases}$

Primero calculamos la función de valor absoluto.

f(x)=$|x+2|$ → $|x+2|$ =0 → x+2=0 → x= -2



$|x+2|$ =$\begin{cases} -x-2\ si\ x<-2 \\ x+2\ si-2\le x<-1 \end{cases}$

f(x)= $\begin{cases} -x-2 & si\ x<-2 \\ x+2 & si-2\le x<-1 \\ x^2 & si-1\le x<1 \\ 2x+1 & si\ x>1 \end{cases}$

Todas las funciones son funciones polinómicas, por lo tanto podemos decir que la función va a ser continua en todo $\mathbb{R}$. Pasamos a estudiar los puntos de ruptura.

<u>x=-2</u>

$\left.\begin{matrix} \lim_{x\to -2^-} -x-2=0 \\ \lim_{x\to -2^+} x+2=0 \\ f(-2)=0 \end{matrix}\right\}$ Como $\lim_{x\to -2^-} -x-2=\lim_{x\to -2^+} x+2=f(-2)$

La función será continua en x=-2

<u>x=-1</u>

$\left.\begin{matrix} \lim_{x\to -1^-} x+2=1 \\ \lim_{x\to -1^+} x^2=1 \\ f(-1)=1 \end{matrix}\right\}$ Como $\lim_{x\to -1^-} x+2=\lim_{x\to -1^+} x^2=f(-1)$

La función será continua en x=-1

<u>x=1</u>

$\left.\begin{matrix} \lim_{x\to 1^-} x^2=1 \\ \lim_{x\to 1^+} 2x+1=3 \\ f(1)=1 \end{matrix}\right\}$ Como $\lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+ f(x)} f(x)$ y los valores son finitos, En x=1 tenemos una discontinuidad Inevitable de salto Finito 2.

19) **Estudiar la continuidad de la función f(x)=**$\begin{cases} \mathbf{5-\frac{|x|}{x}} & \boldsymbol{si\ x \neq 0} \\ \mathbf{5} & \boldsymbol{si\ x = 0} \end{cases}$

Calculamos primero la función de valor absoluto

$|x|=\begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$ Por lo tanto la función nos queda de la siguiente manera:

f(x)=$\begin{cases} 5-\frac{-x}{x} & si\ x < 0 \\ 5 & si\ x = 0 \\ 5-\frac{x}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$

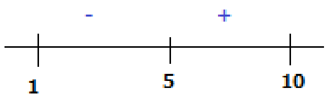
<u>x=0</u>

$\left.\begin{matrix} \lim_{x \to 0^-} 5+1 = 6 \\ \lim_{x \to 0^+} 5-1 = 4 \\ f(0) = 5 \end{matrix}\right\}$ Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$ con valores finitos, en x=0 tendremos una discontinuidad Inevitable de salto Finito 2.

20) **Estudiar la continuidad de la función f(x)=$\begin{cases} \boldsymbol{x^2 \ \ si\ x < 1} \\ \boldsymbol{|x-5| \ \ si\ 1 \le x \le 10} \end{cases}$**

Calculamos primero la función valor absoluto.

F(x)=$|x-5|$ → x-5=0 → x=5



$|x-5|$ =$\begin{cases} -(x-5)\ si\ \ 1 \le x < 5 \\ +(x-5)\ si\ 5 \le x \le 10 \end{cases}$, por lo que la función queda f(x)=$\begin{cases} x^2 \ \ si\ x < 1 \\ -x+5 \ \ si\ 1 \le x < 5 \\ x-5 \ \ \ si\ 5 \le x \le 10 \end{cases}$

Todas las funciones son polinómicas por lo tanto estarán definidas en todo el intervalo en el que están definidas.

D(f)=xϵ(-$\infty, 10]$

Miramos los puntos de ruptura:

<u>x=1</u>

$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} -x+5 = 4 \\ f(1) = 4 \end{array}\right\}$ Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ y siendo estos finitos, tendremos una discontinuidad Inevitable de salto Finito 3.

<u>x=5</u>

$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 5^-} -x+5 = 0 \\ \lim_{x\to 5^+} x-5 = 0 \\ f(5) = 0 \end{array}\right\}$ Como $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x)$= f(5) Por lo tanto la función será continua en x=5.

21) La función f(x)=$\frac{x^2-a}{x^3+x^2+ax+12}$ presenta una discontinuidad evitable en x=-2, ¿para qué valor de a?

Si presenta una discontinuidad evitable tendremos que:
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$ o $\nexists f(2)$

Si la función no existe en x=-2 quiere decir que el denominador de la función será igual a cero.

$$f(-2) = 0 \to (-2)^3 + (-2)^2 + a\cdot(-2) + 12 = 0 \to\ -8 + 4 - 2a + 12 = 0 \to a = 4$$

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^3+x^2+4x+12} = \begin{bmatrix}\frac{0}{0}\end{bmatrix}$ $\lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2-x+6)} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$

Hemos demostrado que existe el límite en x=-2 pero no la función en ese punto.

22) El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera. Se prevé que a partir de ahora la siguiente función indicará en cada momento (t, medido en meses) el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera:

P(t)=$\begin{cases} \boldsymbol{t^2 - 8t + 50} & \boldsymbol{si\ 0 \le t \le 10} \\ \boldsymbol{\frac{38t-100}{0{,}4t}} & \boldsymbol{si\ t > 10} \end{cases}$

a) Confirma que dicha función es continua y que, por tanto, no presenta un salto en t=10

b) Por mucho tiempo que pase,¿a qué porcentaje no se llegará nunca?

a) Si t$\neq$ 10, la función es continua por estar definida por un polinomio o un cociente de polinomios con denominador no nulo en su dominio de definición.

$\begin{cases} \lim_{t\to 10^-} t^2 - 8t + 50 = 70 \\ \lim_{t\to 10^+} \frac{38t-100}{0{,}4t} = 70 \\ f(10) = 70 \end{cases}$ →Como $\lim_{t\to 10^-} f(x) = \lim_{t\to 10^+} f(x) = f(10)$ Por lo tanto podemos asegurar que en t=10 la función es continua.

b) $\lim_{t\to\infty} \frac{38t-100}{0{,}4t} = 95$ Nunca se llegará al 95% de pacientes operados sin necesidad de entrar en lista de espera.

23) Se ha estimado que la población de un barrio periférico de una gran ciudad evolucionará siguiendo este modelo: P(t)= $\frac{240+20t}{16+t}$ en miles de habitantes, donde t indica los años transcurridos desde su creación en el año 2005.

a) ¿Qué población tenía dicho barrio en el año 2005?

b) ¿Qué población tendrá dicho barrio en el año 2015?

c) ¿Será posible que la población del barrio duplique a la población inicial?

d) A largo plazo,¿la población se estabilizará o no?

a) P(0)=$\frac{240}{16} = 15$ El barrio tenía 15000 habitantes en 2005

b) Habrán pasado 10 años desde su creación y por tanto t=10.
P(10)=$\frac{240+200}{16+10} \approx 16{,}923$ Habrá 16923 habitantes en 2015

c) P(t)= 2·P(0), P(t)=$\frac{240+20t}{16+t} = 30$ → 240+20t=480+30t→ t=-24. No , el barrio nunca duplicará su población.

d) $\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{240+20t}{16+t} = 20$ → La población se estabilizará en 20 000 habitantes

24) Una constructora ha comprado una excavadora por 80 000 euros. El departamento financiero ha calculado que puede revenderla al cabo de t años al precio de f(t)=$\frac{80}{1+0{,}4t}$ miles de euros.

a) ¿Al cabo de cuántos años la excavadora perderá la mitad de su valor de compra?

b) Calcula el límite $\lim_{t\to\infty} f(t)$ y da una interpretación económica a este resultado.

a) F(t)=$\frac{f(0)}{2}$ → $\frac{80}{1+0{,}4t} = 40$ →80=40+16t → t=2,5 → A los dos años y medio

b) $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{80}{1+0{,}4t}$=0 . Al cabo del tiempo, la excavadora irá perdiendo su valor de compra.

25) **Un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que el precio unitario que los consumidores aceptan pagar por cierto artículo depende de la cantidad x de dichos artículos que salen a la venta, siguiendo este modelo de demanda: g(x)=$\frac{170}{x+5}$ (g(x) en euros y x en miles de unidades)**

Los productores han calculado que el precio unitario satisfactorio para ellos, dependiente de x, se rige según este modelo de oferta: f(x)=3x+2 (f(x) en euros y x en miles de unidades)

a) Calcula cuántas unidades deben ponerse a la venta para conseguir el punto de equilibrio, en el que la demanda y la oferta se igualan y, por tanto, consumidores y fabricantes quedan satisfechos.

b) ¿Cuál es el precio unitario de este artículo en el punto de equilibrio?

a) g(x)=f(x)→ $\frac{170}{x+5} = 3x + 2$ → 170=(x+5)(3x+2)→ $3x^2 + 17x - 160 = 0$ →
x=5 o x=-$\frac{32}{3}$ (éste último no tiene sentido en este contexto). El punto de equilibrio se consigue fabricando 5000 unidades.

b) El precio unitario es f(5)=17 euros

26)

(PAU) Calcula los valores de *a*, *b* ∈ R para que la función $f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} & \text{si } 0<x<1 \\ bx & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

sea continua en todo punto.

Debemos ver qué ocurre en $x = 0$ y en $x = 1$, ya que en el resto es continua.

$$\lim_{x\to 0} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+a) = a = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Para que sea continua en $x = 0$, debe ser $a = \frac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to 1} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} bx = b = f(1) \end{cases}$$

⇒ Para que sea continua en $x = 1$, debe ser $b = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

27)

(PAU) Sea $f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & \text{si} \quad x<1 \\ (x+a)^2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$**. ¿Para qué valores del parámetro *a* la función es continua?**

La función es continua si $x \neq 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} e^{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+a)^2 = (1+a)^2 = f(1) \end{cases}$$

Debe ser $(1 + a)^2 = 1$, $a = 0$ o $a = -2$.

La función *f*(*x*) está definida en R por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ a-x & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de *a* para que *f* sea continua en R.

b) Calcula el valor de *a* para que la función tenga en $x = 2$ un salto de 3 unidades hacia arriba.

c) Calcula el valor de *a* para que la función tenga en $x = 2$ un salto de 5 unidades hacia abajo.

a) Miremos qué ocurre en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-1) = 3 = f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (a-x) = a-2 \end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua debe ser } a-2=3;\ a=5.$$

b) Para que tenga un salto de tres unidades hacia arriba debe ser $a - 2 = 6$, $a = 8$.

c) Para que tenga un salto de cinco unidades hacia abajo debe ser $a - 2 = -2$, $a = 0$.

28)

Determina *a* y *b* para que la siguiente función sea continua en todos sus puntos:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si} \quad x<0 \\ x-a & \text{si} \quad 0\leq x<1 \\ \dfrac{a}{x}+b & \text{si} \quad 1\leq x \end{cases}$$

Como $\dfrac{a}{x}+b$ es continua en $(1, +\infty)$, solo debemos estudiar qué ocurre en $x = 0$ y en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 0} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (ax^2+b) = b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-a) = -a = f(0) \end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua, debe ser } b=-a.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x-a) = 1-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{a}{x}+b = a+b = f(1) \end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua en } x=1, \text{ debe ser } 1-a=a+b.$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} b=-a \\ 1-a=a+b \end{cases}$ obtenemos $a = 1$, $b = -1$.