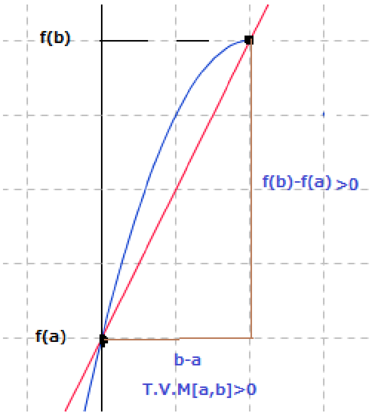
Tasa de variación Media

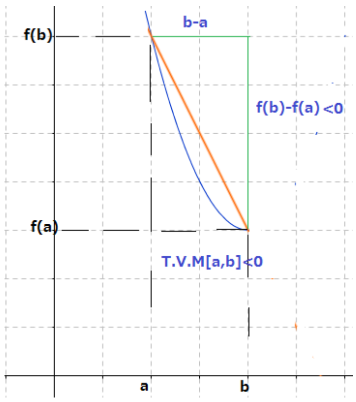
Se define tasa de variación media (T.V.M) de una función, y=f(x) en un intervalo [a,b] al cociente: T.V.M (f(x),[a,b]) = $\frac{Variación\ de\ f(x)}{Variación\ de\ x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- Se trata de la pendiente del segmento que une los puntos A(a,f(a) y B(b,f(b)).
- Mide la variación relativa de la función en el intervalo [a,b]

A veces, el intervalo se le designa mediante la expresión [x, x+h], nombrando, así, a un extremo del intervalo a, y a su longitud, h. Por lo tanto, la tasa de variación media : T.V.M. [x,x+h]= $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Si una función es creciente en [a,b], su tasa de variación media es positiva; y si es decreciente, negativa.





Tasa de variación Instantánea o Derivada

Definición: Se llama tasa de variación instantánea (T.V.I) de una función, y =f(x) en un punto a o derivada de una función en un punto x=a y se denota f´(a)

T.V.I (a) = f´(a) = $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Significado:

Es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de y=f(x) en el punto x=a → m= f´(x)

- Si es positiva → La función es creciente en el punto a.
- Si es negativa → La función es decreciente en el punto a.

Derivadas Laterales

Se llama **derivada por la izquierda** de f en a:

f´(a^-) =$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Se llama **derivada por la derecha** de f en a:

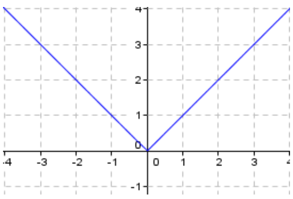
f´(a^+) =$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

A ambas se las llama derivadas laterales.

La función f es derivable en a solo si f´$(a^-) = f^{´}(a^+)$

- Si en un punto las derivadas laterales no coinciden, se dice que el punto es anguloso, por lo tanto la función no será derivable en ese punto.

  Ej) f(x)= $|x|$

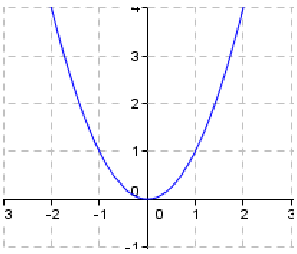


f(x)=$\begin{cases} -x & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$ → $\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} -x = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} x = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ → La función es continua en x=0

f´(x)=$\begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$ Como f´$(0^-) \neq f(0^+)$→ La función no es derivable en x=0

- Si las derivadas laterales coinciden, la curva es “suave” o “lisa”, es decir, es derivable.

  Ej) f(x)= x^2



Derivabilidad y Continuidad

- Si una función es continua en un punto puede ser derivable o no derivable en ese punto.

- Pero si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él.

Por lo tanto: Cuando tengamos que estudiar la derivabilidad de una función estudiaremos primero su continuidad:

- Si es continua → estudiaremos su derivabilidad $f'(a^-) = f'(a^+)$

- Si no es continua → No va a ser derivable

Reglas de derivación

Operaciones con Derivadas

- Multiplicación por un número: (k·f(x))’ = k·f’(x)
- Suma y resta: [f(x)±g(x)]’= f’(x)±g’(x)
- Producto: [f(x)·g(x)] = f’(x)·g(x)+f(x)·g’(x)
- Cociente: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- Composición (Regla de la Cadena): [f(g(x))]’ = f’(g(x))· g´(x)

Reglas de derivación

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
y = k	y’= 0		
y = x	y’=1		
$y = x^n$	$y' = n\cdot x^{n-1}$	$y = f^n(x)$	$y' = n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}}$
$y = a^x$	$y' = a^x\cdot Lna$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)}\cdot Lna\cdot f'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x\cdot Lna}$	$Y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)\cdot Lna}$
y = Ln x	$y' = \frac{1}{x}$	y = Ln f(x)	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
y = sen x	y’ = cos x	y = sen f(x)	y’=cos f(x)·f’(x)
y = cos x	y’ = -sen x	Y = cos f(x)	y’=-sen f(x)· f´(x)
y = tag x	$y' = 1 + tag^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$	y = tag f(x)	$y' = \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)} = [1 + tag^2 f(x)]\cdot f'(x)$
y= arcsen x	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	y= arcsen f(x)	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
y= arc cos x	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	y= arc cos f(x)	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
y= arc tg x	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	y= arc tg f(x)	$y' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$