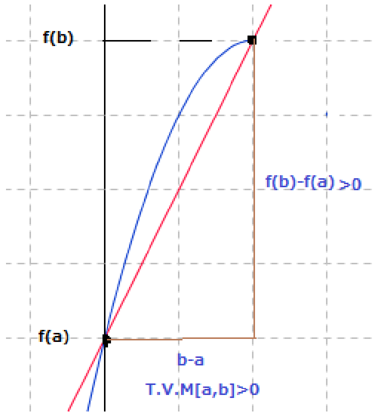
Tasa de variación Media

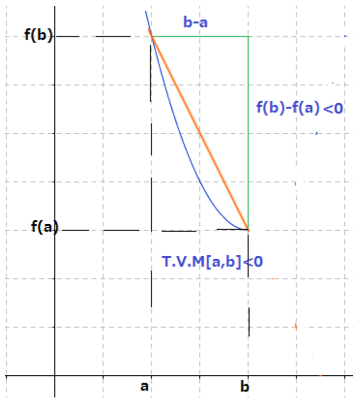
Se define tasa de variación media (T.V.M) de una función, y=f(x) en un intervalo [a,b] al cociente: T.V.M (f(x),[a,b]) = $\frac{Variación\ de\ f(x)}{Variación\ de\ x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- Se trata de la pendiente del segmento que une los puntos A(a,f(a) y B(b,f(b)).
- Mide la variación relativa de la función en el intervalo [a,b]

A veces, el intervalo se le designa mediante la expresión [x, x+h], nombrando, así, a un extremo del intervalo a, y a su longitud, h. Por lo tanto, la tasa de variación media : T.V.M. [x,x+h]= $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Si una función es creciente en [a,b], su tasa de variación media es positiva; y si es decreciente, negativa.





Tasa de variación Instantánea o Derivada

Definición: Se llama tasa de variación instantánea (T.V.I) de una función, y =f(x) en un punto a o derivada de una función en un punto x=a y se denota f´(a)

T.V.I (a) = f´(a) = $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Ejemplo: Calcula la derivada a partir de la definición de derivada de la función:

$$f(x) = \frac{-x}{x^2-4}$$

$$f´(x)= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-(x+h)}{(x+h)^2-4}+\frac{x}{x^2-4}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-(x+h)(x^2-4)+x[(x+h)^2-4]}{[(x+h)^2-4](x^2-4)}}{h} =$$

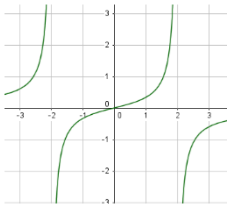
$$\lim_{h\to 0}\frac{(-x-h)(x^2-4)+x[(x+h)^2-4]}{h[(x+h)^2-4](x^2-4)} = \lim_{h\to 0}\frac{-x^3+4x-x^2h+4h+x^3+xh^2+2x^2h-4x}{h[(x+h)^2-4](x^2-4)} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2h+xh^2+4h}{h[(x+h)^2-4](x^2-4)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(x^2+xh+4)}{h[(x+h)^2-4](x^2-4)} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+xh+4}{[(x+h)^2-4](x^2-4)} = \frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$$

Significado:

Es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de y=f(x) en el punto x=a → m= f´(x)

- Si es positiva → La función es creciente en el punto a.
- Si es negativa → La función es decreciente en el punto a.



Ejemplo: $f(x) = \frac{-x}{x^2-4}$ → $f´(x) = \frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$

- En el punto x= 1 → $f´(1) = \frac{1^2+4}{(1^2-4)^2} > 0$ → La función en x=1 es creciente

Reglas de derivación

Operaciones con Derivadas

- Multiplicación por un número: (k·f(x))' = k·f'(x)
- Suma y resta: [f(x)±g(x)]'= f'(x)±g'(x)
- Producto: [f(x)·g(x)] = f'(x)·g(x) + f(x)·g'(x)
- Cociente: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f´(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g´(x)}{g^2(x)}$
- Composición (Regla de la Cadena): [f(g(x))]' = f'(g(x))· g´(x)

Reglas de derivación

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
y = k	y'= 0		
y = x	y'=1		
$y = x^n$	$y'=n\cdot x^{n-1}$	$y = f^n(x)$	$y'=n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\frac{f´(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\frac{f´(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}}$
$y = a^x$	$y'=a^x\cdot Lna$	$y=a^{f(x)}$	$y'= a^{f(x)}\cdot Lna\cdot f'(x)$
$y = e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'= e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x\cdot Lna}$	$Y = \log_a f(x)$	$y'= \frac{f´(x)}{f(x)\cdot Lna}$
y = Ln x	$y' = \frac{1}{x}$	y = Ln f(x)	$y' = \frac{f´(x)}{f(x)}$
y = sen x	y' = cos x	y = sen f(x)	y'=cos f(x)·f'(x)
y = cos x	y' = -sen x	Y = cos f(x)	y'=-sen f(x)· f´(x)
y = tag x	$y'= 1+ tag^2x = \frac{1}{cos^2x}$	y = tag f(x)	$y' = \frac{f´(x)}{cos^2 f(x)} =$ $[1+ tag^2 f(x)]\cdot f´(x)$
y= arcsen x	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	y= arcsen f(x)	$y'=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
y= arc cos x	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	y= arc cos f(x)	$y'=\frac{-f´(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
y= arc tg x	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	y= arc tg f(x)	$y'=\frac{f´(x)}{1+f(x)^2}$