f(x)= $x^3 - \mathrm{x}$

1) <u>Dominio</u>
   D(f)= R

2) <u>Simetrías</u>

   f(-x) = $(-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$ Tiene simetría impar

3) <u>Cortes con los ejes</u>

   - Corte con el eje OX: f(x)=0
     f(x)= $x^3 - x$ =0 → x(x^2 - 1) = 0 → x = 0   El punto de corte será el (0,0)
     → x = 1   El punto de corte será el (1,0)
     → x = -1   El punto de corte será el (-1,0)
   - Corte con el eje OY :
     f(0)= $(0)^3 - 0 = 0$ El punto de corte será el (0,0)

4) <u>Asintotas</u>
   - <u>Verticales:</u>
     - No hay ya que el D(f)=$\mathbb{R}$

   - <u>Horizontal</u>

     - $\lim_{x\to\infty} x^3 - \mathrm{x} = \infty$ No tiene asíntota horizontal.
     - $\lim_{x\to-\infty} x^3 - \mathrm{x} = -\infty$

   - <u>Oblicua</u>
     - No hay asíntota oblicua

5) <u>Signo de la función</u>

	(-∞,-1)	(-1,0)	(0,1)	(1,∞)
Signo de f(x)	-	+	-	+

6) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

f´(x)= $3x^2 - 1$ f´(x) = 0 -> $3x^2$ -1= 0 -> x = +$\sqrt{\frac{1}{3}}$ y x= -$\sqrt{\frac{1}{3}}$

	$(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(-\sqrt{\frac{1}{3}},+\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(+\sqrt{\frac{1}{3}},\infty)$
Signo f´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↗

- Crecimiento : $(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}})U(+\sqrt{\frac{1}{3}},\infty)$
- Decrecimiento: $(-\sqrt{\frac{1}{3}},+\sqrt{\frac{1}{3}})$
- Tenemos un mínimo en $(+\sqrt{\frac{1}{3}},-\frac{2\sqrt{3}}{9})$
- Tenemos un máximo en $(-\sqrt{\frac{1}{3}},\frac{2\sqrt{3}}{9})$

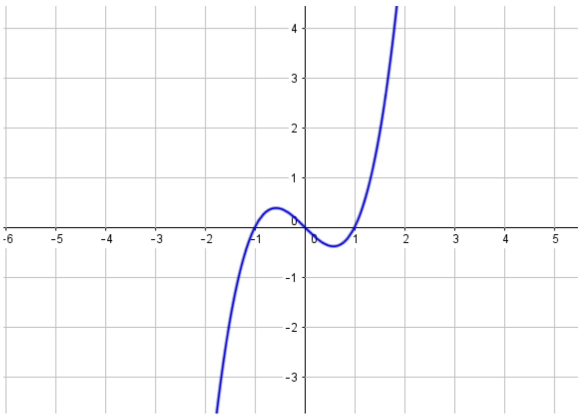
7) Concavidad

f´´(x)= $6x$ f´´(x)= 0 → $6x = 0$ x = 0

	(-∞,0)	(0,∞)
Signo de f´´(x)	-	+
Comportamiento de f(x)	∩	U

- Cóncava hacia arriba: (0, ∞)
- Cóncava hacia abajo: (-∞,0)
- Punto de inflexión (0,0)

8) Representación gráfica



f(x)= $x^3 - x^2 + \mathrm{x} - 1$

1) Dominio
   D(f)= R

2) Simetrías

   f(-x) = $(-x)^3 - (-x)^2 + (-x) - 1$) = $-x^3 - x^2 - x - 1$ f(-x)≠ f(x) No tiene simetría par
   f(-x)≠-f(x) No tiene simetría impar

3) Cortes con los ejes

   - Corte con el eje OX: f(x)=0
     f(x)= $x^3 - x^2 + x - 1$ =0 → (x-1)(x^2 + 1) = 0 → x = 1 El punto de corte será el (1,0)

   - Corte con el eje OY :
     f(0)= $(0)^3 - (0)^2 + 0 - 1 = -1$ El punto de corte será el (0,-1)

4) Asintotas
   - Verticales:
     - No hay ya que el D(f)=$\mathbb{R}$

   - Horizontal

     - $\lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 + x - 1 = \infty$ No tiene asíntota horizontal.
     - $\lim_{x\to-\infty} x^3 - x^2 + x - 1 = -\infty$

   - Oblicua
     - No hay asíntota oblicua

5) Signo de la función

	(-∞,1)	(1,0)
Signo de f(x)	-	+

6) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

f´(x)= $3x^2 - 2x + 1$ f´(x) = 0 -> $3x^2$ -2x + 1= 0 -> No tiene solución real

	(-∞,∞)
Signo f´(x)	+
Comportamiento de f(x)	↗

- Crecimiento : (-∞,∞)
- Decrecimiento: No hay
- No hay ni mínimo ni máximo

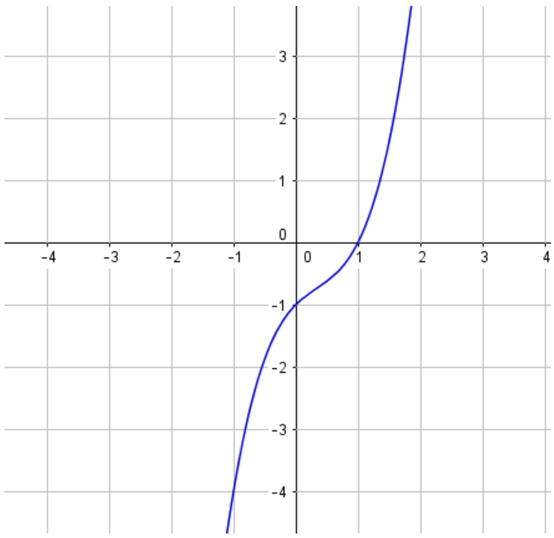
7) Concavidad

f´´(x)= $6x - 2$ f´´(x)= 0 → $6x - 2 = 0$ x = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

	(-∞,$\frac{1}{3}$)	($\frac{1}{3}$,∞)
Signo de f´´(x)	-	+
Comportamiento de f(x)	∩	U

- Cóncava hacia arriba: ($\frac{1}{3}$, ∞)
- Cóncava hacia abajo: (-∞,$\frac{1}{3}$)
- Punto de inflexión ($\frac{1}{3}$, - $\frac{20}{27}$)

8) Representación gráfica



f(x)= $\frac{x^2}{2-x}$

1) Dominio
   D(f)= R - {2}

2) Simetrías

   f(-x)=$\frac{(-x)^2}{2-(-x)} = \frac{x^2}{2+x}$ f(-x)≠ f(x) No tiene simetría par

   f(-x)≠-f(x) No tiene simetría impar

3) Cortes con los ejes

   - Corte con el eje OX: f(x)=0
     f(x)=$\frac{x^2}{2-x}$ =0 → x^2 = 0 → x = 0 El punto de corte será el (0,0)

   - Corte con el eje OY :
     f(0)=$\frac{0^2}{2+0}$ = 0 → El punto de corte será el (0,0)

4) Asintotas
   - Verticales:
     - $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{2-x} = \infty$ Tiene una asíntota vertical en x=2
     - $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2}{2-x}$ =-∞

   - Horizontal
     - $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2-x}$ = - ∞ No tiene asíntota horizontal.
     - $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2-x}$ =∞

   - Oblicua y=mx+n

     m= = $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2-x}}{x}$ = -1 Asíntota oblicua: **y=-x-2**

     n= $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2-x}$ +x = -2

Tomamos f(1000) = -1002,0004 y= -1000-2= -1002 la función < la asíntota oblicua → por debajo

Tomamos f(-1000) = 998,004 y= 1000-2= 998 la función < la asíntota oblicua → por encima

5) Signo de la función

	(-∞,0)	(0,2)	(2,∞)
Signo de f(x)	+	+	-

6) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

f´(x)= $\frac{2x(2-x)+x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x}{(2-x)^2}$ f´(x) = 0 -> $-x^2+4x = 0$ -> x=0 y x= 4

	(-∞,0)	(0,2)	(2,4)	(4,∞)
Signo f´(x)	-	+	+	-
Comportamiento de f(x)	↘	↗	↗	↘

- Crecimiento : (0,2)U(2,4)
- Decrecimiento: (-∞,0)U(4,∞)
- Tenemos un mínimo en (0,0)
- Tenemos un máximo en (4,-8)

7) Concavidad

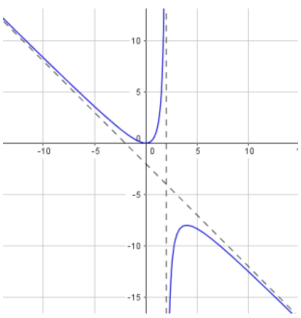
f´´(x)= $\frac{(-2x+4)(2-x)^2+2(2-x)(-x^2+4x)}{(2-x)^4} = \frac{(2-x)[(-2x+4)(2-x)+2(-x^2+4x)]}{(2-x)^4} = \frac{-4x+8+2x^2-4x-2x^2+8x}{(2-x)^3} = \frac{8}{(2-x)^3}$

f´´(x)= $\frac{8}{(2\text{-x})^3}$ f´´(x) = 0 -> Sin solución

	(-∞,2)	(2,∞)
Signo de f´´(x)	+	-
Comportamiento de f(x)	U	∩

- Cóncava hacia arriba: (-∞, 2)
- Cóncava hacia abajo: (2,∞)
- No hay puntos de inflexión

8) Representación gráfica



f(x)= $\frac{1-x^2}{x^2-4}$

1) Dominio
   D(f)= R - {-2,2}

2) Simetrías
   f(-x)= $\frac{1-(-x)^2}{(-x)^2-4} = \frac{1-x^2}{x^2-4}$ f(-x)= f(x) Tiene simetría par. Es simétrica respecto al eje Y.

3) Cortes con los ejes
   - Corte con el eje OX: f(x)=0

     f(x)= $\frac{1-x^2}{x^2-4}$ =0 → 1-x^2 = 0 → x^2 = 1 -> x = ±1 Los puntos de corte serán : (-1,0) y (1,0)

   - Corte con el eje OY :

     f(0)= $\frac{1-0^2}{0^2-4} = -\frac{1}{4}$ → El punto de corte será el (0, $-\frac{1}{4}$)

4) Asintotas
   - Verticales:
     - $\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \infty$ Tiene una asíntota vertical en x=2
     - $\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -\infty$
     - $\lim_{x\to -2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -\infty$ Tiene una asíntota vertical en x=-2
     - $\lim_{x\to -2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \infty$
   - Horizontal
     - $\lim_{x\to \infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1$ Tiene una asíntota horizontal en y=-1
     - $\mathrm{Lim}_{x\to \infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1$

   f(1000) = -1,000003 y= -1 la función < la asíntota horizontal → por debajo

   f(-1000) = -1,000003 y= -1 la función < la asíntota horizontal → por debajo

   - Oblicua
     No tiene asíntota oblicua.

5) Signo de la función

	(-∞, -2)	(-2,-1)	(-1,1)	(1,2)	(2,∞)
Signo de f(x)	-	+	-	+	-

6) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x)=\frac{-2x(x^2-4)-2x(1-x^2)}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{6x}{(x^2-4)^2}$$

f´(x) = 0 -> 6x = 0 -> x=0

	(-∞,-2)	(-2,0)	(0,2)	(2,∞)
Signo f´(x)	-	-	+	+
Comportamiento de f(x)	↘	↘	↗	↗

- Crecimiento : (-∞, $-2)U(-2,0)$
- Decrecimiento: (0,2)∪ $(2, \infty)$
- Tenemos un mínimo en (0,$\frac{-1}{4}$)

7) Concavidad

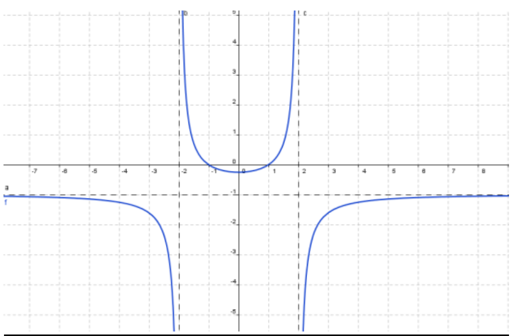
$$f''(x)=\frac{6(x^2-4)^2-24x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4}=\frac{(x^2-4)[6(x^2-4)-24x^2]}{(x^2-4)^4}=\frac{6x^2-24-24x^2}{(x^2-4)^3}=\frac{-18x^2-24}{(x^2-4)^3}$$

f´´(x) = 0 -> $-18x^2-24=0$ -> No tiene solución

	(-∞, -2)	(-2,2)	(2,∞)
Signo de f´´(x)	-	+	-
Comportamiento de f(x)	∩	∪	∩

- Cóncava hacia arriba: (-2,2)
- Cóncava hacia abajo: (-∞, -2) ∪ $(2, \infty)$
- No hay punto de inflexión

8) Representación gráfica



f(x)= $\frac{6x+1}{x+3}$

1) Dominio

D(f)= ℝ - {-3}

2) Simetrías

f(-x)=$\frac{6(-x)+12}{(-x)+3}$ =$\frac{-6x+12}{-x+3}$ f(-x) ≠ f(x) No presenta simetrías

f(-x)≠-f(x)

3) Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: f(x)=0

  f(x)= $\frac{6x+12}{x+3}$ =0 → 6x+12= 0 → x = -2

  El punto de corte será : (-2,0)

- Corte con el eje OY :

  f(0)= $\frac{0+12}{0+3} = 4$ → El punto de corte será el (0,4)

4) Asintotas

- Verticales:
  - $\lim_{x \to -3^-} \frac{6x+12}{x+3} = \infty$ Tiene una asíntota vertical en x= -3
  - $\lim_{x \to -3^+} \frac{6x+12}{x+3} = -\infty$

- Horizontal
  - $\lim_{x \to \infty} \frac{6x+12}{x+3} = 6$ Tiene una asíntota horizontal en y=6
  - $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x+12}{x+3} = 6$

f(1000) = 5,98 y= 6 la función < la asíntota horizontal → por debajo

f(-1000) = 6,02 y= 6 la función < la asíntota horizontal → por encima

- Oblicua

  No tiene asíntota oblicua.

5) Signo de la función

	(-∞, -3)	(-3,-2)	(-2,∞)
Signo de f(x)	+	-	+

6) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

f´(x)= $\frac{6(x+3)-(6x+12)}{(x+3)^2} = \frac{6x+18-6x-12}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2}$ f´(x) = 0 -> No tiene solución

	(-∞,-3)	(-3,∞)
Signo f´(x)	+	+
Comportamiento de f(x)	↗	↗

- Crecimiento : (-∞, -3) ∪ (-3, ∞)
- No tiene ni máximos ni mínimos

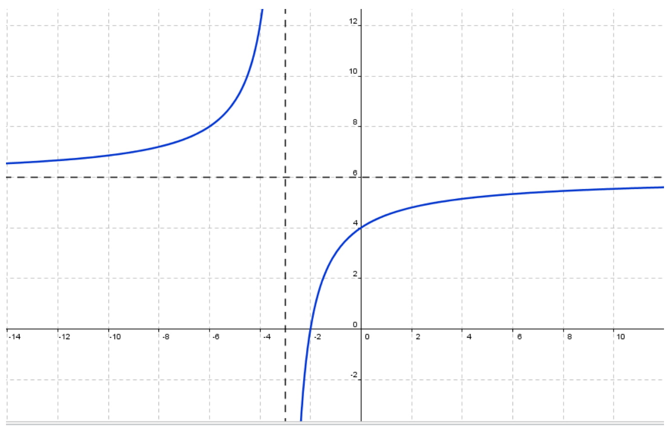
7) Concavidad

f´´(x)= $\frac{0(x+3)^2-2(x+3)6}{(x+3)^4} = \frac{-12(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{-12}{(x+3)^3}$ f´´(x) = 0 -> No tiene solución

	($-\infty, -3$)	(-3,∞)
Signo de f´´(x)	+	-
Comportamiento de f(x)	∪	∩

- Cóncava hacia arriba: (-∞, -3)
- Cóncava hacia abajo: (-3,∞)
- No hay puntos de inflexión

8) Representación gráfica



f(x)= $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

1) Dominio

   D(f)= ℝ - {-1,1}

2) Simetrías

   f(-x)= $\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ f(-x) = f(x) Presenta simetría par.

3) Cortes con los ejes

   - Corte con el eje OX: f(x)=0

     f(x)= $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ =0 → $x^2+1=0$ → No corta con el eje OX

   - Corte con el eje OY :

     f(0) = $\frac{0^2+1}{0^2-1}$ = -1 El punto de corte será el (0,-1)

4) Asintotas

   - Verticales:
     - $\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty$ Tiene una asíntota vertical en x= -1
     - $\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty$
     - $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty$ Tiene una asíntota vertical en x=1
     - $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty$

   - Horizontal
     - $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=$ 1 Tiene una asíntota horizontal en y = 1
     - $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1$

f(1000) = 1,000002 y= 1 la función > la asíntota horizontal → por encima

f(-1000) = 1,000002 y= 1 la función <>la asíntota horizontal → por encima

   - Oblicua

     No tiene asíntota oblicua.

5) Signo de la función

	(-∞, -1)	(-1,1)	(1,∞)
Signo de f(x)	+	-	+

6) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

f´(x)=$\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ = $\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$ f´(x) = 0 -> -4x=0 -> x=0

	(-∞,-1)	(-1,0)	(0,1)	(1,∞)
Signo f´(x)	+	+	-	-
Comportamiento de f(x)	↗	↗	↘	↘

- Crecimiento : (-∞, $-1) \cup (-1,0)$
- Decrecimiento: (0,1)∪ $(1,\infty)$
- Tenemos un máximo en (0,-1)

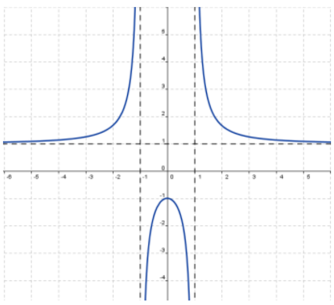
7) Concavidad

f´´(x) =$\frac{-4(x^2-1)^2+4x\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$ = $\frac{(x^2-1)[-4(x^2-1)+4x\cdot 4\cdot 2x]}{(x^2-1)^4}$ = $\frac{-4x^2+4+16x^2}{(x^2-1)^3}$ = $\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$ f´´(x) = 0 -> 12x^2+4=0 → No tiene solución

	(-∞, -1)	(-1,1)	(1,∞)
Signo de f´´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	∪	∩	∪

- Cóncava hacia arriba: (-∞, $-1) \cup (1,\infty)$
- Cóncava hacia abajo: (-1,1)
- No hay punto de inflexión

8) Representación gráfica



f(x)=$\frac{2x^2}{(2-x)^2}$

1) Dominio

D(f)= ℝ - {2}

2) Simetrías

f(-x)= $\frac{2x^2}{(2+x)^2}$

f(-x)≠ f(x) No tiene simetría par

f(-x)≠-f(x) No tiene simetría impar

3) Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: f(x)=0

  f(x)= $\frac{2x^2}{(2-x)^2}$ =0 → $2x^2$ = 0 → x = 0 El punto de corte será el (0,0)

- Corte con el eje OY :

  f(0)= $\frac{2\cdot 0^2}{(2-0)^2}$=0 → El punto de corte será el (0,0)

4) Asintotas

- Verticales:
  - $\lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2}{(2-x)^2} = \frac{+}{0^+} = +\infty$ Tiene una asíntota vertical en x=2

    $\lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2}{(2-x)^2} = \frac{+}{0^+} = +\infty$
- Horizontal
  - $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{(2-x)^2} = 2$ Tiene una asíntota horizontal en y=2
  - $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{(2-x)^2} = 2$

f(1000) = 2,008 y= 2 la función > la asíntota horizontal → por encima

f(-1000) = 1,99 y= 2 la función < la asíntota horizontal → por debajo

5) Signo de la función

	(-∞,0)	(0,2)	(2,∞)
Signo de f(x)	+	+	+

6) <u>Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)</u>

f´(x)= $\frac{4x\cdot(2-x)^2-2x^2\cdot 2(2-x)\cdot(-1)}{(2-x)^4} = \frac{8x-4x^2+4x^2}{(2-x)^3} = \frac{8x}{(2-x)^3}$ f´(x) = 0 -> 8x = 0 -> x=0

	(-∞,0)	(0,2)	(2,∞)
Signo f´(x)	-	+	-
Comportamiento de f(x)	↘	↗	↘

- Crecimiento : (0,2)
- Decrecimiento: (-∞, $0) \cup (2,\infty)$
- Tenemos un mínimo en (0,0)

7) <u>Concavidad</u>

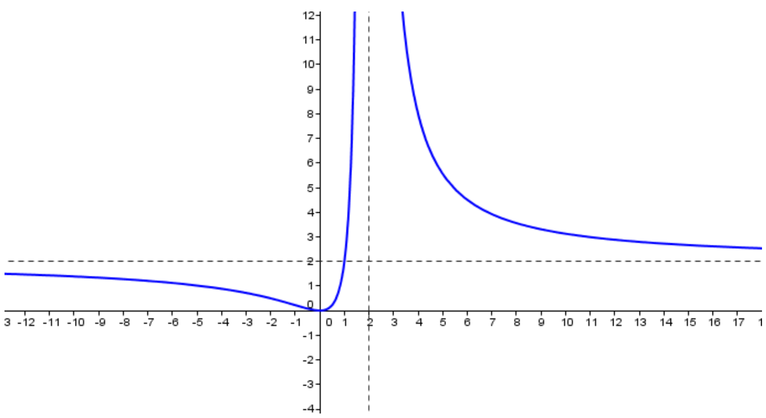
f´´(x)= $\frac{8(2-x)^3-8x\cdot 3\cdot(2-x)^2(-1)}{(2-x)^6} = \frac{16-8x+24x}{(2-x)^4} = \frac{16x+16}{(2-x)^4}$

f´´(x)= $\frac{16x+16}{(2-x)^4}$ f´´(x) = 0 -> $\frac{16x+16}{(2-x)^4} = 0 \rightarrow 16x+16=0 \rightarrow x=-1$

	(-∞,-1)	(-1,2)	(2,∞)
Signo de f´´(x)	-	+	+
Comportamiento de f(x)	∩	∪	∪

- Cóncava hacia arriba: (-1,2)
- Cóncava hacia abajo: (-∞, $-1) \cup (2,\infty)$
- Puntos de Inflexión: $\left(-1,\frac{2}{9}\right)$

8) <u>Representación gráfica</u>



$f(x)=\frac{6x}{x^2+1}$

1) <u>Dominio</u>

   $D(f)=\mathbb{R}$

2) <u>Simetrías</u>

   $f(-x)=\frac{-6x}{x^2+1}$

   $f(-x)\neq f(x)$ No tiene simetría par

   $f(-x)=-f(x)$ Tiene simetría impar

3) <u>Cortes con los ejes</u>

   - Corte con el eje OX: $f(x)=0$

     $f(x)=\frac{6x}{x^2+1}=0 \rightarrow 6x=0 \rightarrow x=0$ El punto de corte será el (0,0)

   - Corte con el eje OY :

     $f(0)=\frac{6\cdot 0}{0^2+1}=0 \rightarrow$ El punto de corte será el (0,0)

4) <u>Asintotas</u>

   - <u>Verticales</u>: No hay

   - <u>Horizontal</u>

     - $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x^2+1}=0$ Tiene una asíntota horizontal en y=0
     - $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{x^2+1}=0$

   $f(1000) = 0{,}00599$ y= 0 la función > la asíntota horizontal → por encima

   $f(-1000) = -0{,}00599$ y= 0 la función < la asíntota horizontal → por debajo

   - <u>Oblicua</u> : No hay

5) <u>Signo de la función</u>

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
Signo de f(x)	-	+

6) Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

f´(x)=$\frac{6(x^2+1)-2x\cdot 6x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^2+6-12x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2}$ f´(x) = 0 -> $-6x^2+6=0$ -> $x=\pm 1$

	(-∞,-1)	(-1,1)	(1,∞)
Signo f´(x)	-	+	-
Comportamiento de f(x)	↘	↗	↘

- Crecimiento : (-1,1)
- Decrecimiento: $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$
- Tenemos un mínimo en (-1,-3)
- Tenemos un máximo en (1,3)

7) Concavidad

f´´(x)= $\frac{-12x(x^2+1)^2-(-6x^2+6)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-12x^3-12x+24x^3-24x}{(x^2+1)^3} = \frac{12x^3-36x}{(x^2+1)^3}$

f´´(x) = 0 -> $\frac{12x^3-36x}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow 12x^3-36x=0 \rightarrow x=0$ e $x=\pm\sqrt{3}$

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
Signo de f´´(x)	-	+	-	+
Comportamiento de f(x)	∩	∪	∩	∪

- Cóncava hacia arriba: $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},\infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$
- Puntos de Inflexión: $(-\sqrt{3};-2,5)$
  (0,0)
  $(\sqrt{3}; 2,5)$

8) Representación gráfica