1) Dada la función f(x)= $\frac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10}$, estudia su continuidad. Indica el tipo de discontinuidad que hay en los puntos en los que no es continua.

$$f(x) = \frac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10} = \frac{(x+5)(3x^2+1)}{(x+5)(x-2)}$$

- Dominio: D(f) = $\forall x \epsilon R - \{x = -5, x = 2\}$
- Miramos que tipo de discontinuidad presenta en x= -5 y en x= 2

En x= -5

$$\lim_{x\to -5} f(x) = \lim_{x\to -5} \frac{3x^2+1}{x-2} = \frac{76}{-7}$$

$$\lim_{x\to -5^-} \frac{3x^2+1}{x-2} = \lim_{x\to -5^+} \frac{3x^2+1}{x-2} = \frac{76}{-7} \to \text{Discontinuidad evitable en } x = -5$$

En x= 2

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2+1}{x-2} = \frac{13}{(0)}. \to \textit{Presenta una indeterminación } \left[\frac{k}{0}\right]$$

Hallamos los límites laterales

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad de salto infinito en } x = 2$$

2) Estudia la continuidad de la función: f(x) = $\begin{cases} \boldsymbol{e^x} & \boldsymbol{si\ x < 0} \\ \boldsymbol{3x^2 + 1} & \boldsymbol{si\ 0 \leq x < 1} \\ \boldsymbol{4 + lnx} & \boldsymbol{si\ x \geq 1} \end{cases}$

- Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Intervalos de Definición</u>

- Miramos cada una de las funciones y vemos que la primera función es una exponencial ($\boldsymbol{e^x}$) que está definida en todo su dominio, la segunda función que nos encontramos es una función polinómica $\boldsymbol{3x^2 + 1}$ que está definida en todo su dominio y por último nos encontramos una ecuación logarítmica $\boldsymbol{4 + lnx}$ que estaría definida para x>0 que justamente coincide con el intervalo en el que está definida la función. Por lo tanto cada una de sus funciones en sus intervalos son continuas.

<u>Puntos de división de cada uno de los intervalos</u>

- Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en x=0 y x=1.

  - <u>En x=0</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2 + 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \quad f(x) \text{es continua en } x = 0$$

  - <u>En x=1</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2 + 1 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 4 + \ln x = 4 \\ f(1) = 4 \end{array}\right\} \quad f(x) \text{es continua en } x = 1$$

La función f(x) es continua en R

3) Estudia la continuidad de la siguiente función: f(x)=$\begin{cases} \frac{\mathbf{2x+3}}{\mathbf{x}} & \mathbf{si\ \ x < -1} \\ x^2 - \mathbf{2} & \mathbf{si -1 \leq x < 2} \\ \mathbf{3x+1} & \mathbf{si\ x \geq 2} \end{cases}$

- Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

- Miramos cada función por separado y vemos que $\frac{\mathbf{2x+3}}{\mathbf{x}}$ no está definida en x=0 pero si miramos en el intervalo en el que está definida esta función es en x<-1 por lo que x=0 no entraría dentro de este intervalo. Esta función sería continua en el intervalo en el que está definida.
- Las demás funciones son una función cuadrática y lineal y estarían definidas en todo su intervalo.

Puntos de división de cada uno de los intervalos

- Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en x=-1 y x=2.

En x= -1

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x+3}{x} = -1 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x^2-2) = -1 \\ f(-1) = -1 \end{array}\right\}$$ f(x) es continua en x=-1

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2-2) = 2 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3x+1) = 7 \end{array}\right\}$$ f(x) es discontinua en x=2. Hay una discontinuidad inevitable de salto finito

4) Calcula los valores de a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3 - x^2 + a & si \quad x < -1 \\ x^2 + bx + 1 & si \ -1 \le x < 1 \\ ax & si \quad x \ge 1 \end{cases}$$

- Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

- Miramos cada función por separado y observamos que las funciones están definidas en todo su intervalo.

Puntos de división de cada uno de los intervalos

- Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en x= -1 y x=1.

x = -1

$$\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (2x^3 - x^2 + a) = a - 3 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 + bx + 1) = 2 - b \\ f(-1) = 2 - b \end{cases}$$

Para que sea continua en x=-1

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)$

Por lo tanto a-3 = 2-b

x=1

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 + bx + 1) = b + 2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax) = a \\ f(1) = a \end{cases}$$

Para que sea continua en x=1

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

Por lo tanto b+2=a

Cogemos las dos ecuaciones y resolvemos el sistema $\begin{cases} a - 3 = 2 - b \\ b + 2 = a \end{cases}$ -> $\begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$

5) Halla los valores de a y b para que la función sea continua:

f(x)=$\begin{cases} -x^2+bx-1 & si\ x<1 \\ 3x-a & si\ 1\le x<2 \\ 2^x+\log_2 x & si\ x\ge 2 \end{cases}$

- Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

- Miramos cada función por separado:

  En el intervalo x $\geq$ **2** Tenemos $\log_2 x$, por lo que x tiene que ser mayor que 0 (x>0) que en nuestro caso si se cumple ya que nuestra función está de finida en x $\geq$ **2.**

Puntos de división de cada uno de los intervalos

- Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en x= 1 y x=2.

x=1

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-x^2+bx-1) = b-2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3x-a) = 3-a \\ f(1) = 3-a \end{cases}$$

→ Para que sea continua en x=1, se tiene que cumplir que **b-2=3-a**

x=2

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3x-a) = 6-a \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2^x+\log_2 x) = 4+1=5 \\ \mathrm{f}(2) = 5 \end{cases}$$

→ Para que sea continua en x=2, se tiene que cumplir que **6-a=5 -> a=1**

Tomo la primera ecuación **b-2=3-a** y sustituyo a por 1, b-2=3-1 → b= 4