1) Se considera la función. Si f(2) = 3, determinar los valores de a y b para que f(x) sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & si\ 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

(Solución: a = 1 , b= -1)

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

Observamos que:

- f(x) = ln x → se trata de una función logarítmica por lo tanto se tiene que cumplir que x>0. En este caso como se cumple, decimos que la función es continua en (0,1)
- f(x) = ax^2 + b → se trata de una función cuadrática por lo tanto está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función será continua en (1,∞)

Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso será en el punto x=1.

Para x = 1

- $\lim_{x \to 1^-} \ln x = 0$
- $\lim_{x \to 1^+} ax^2 + b = a + b$
- f(1)= a + b

Para que la función sea continua en x= 1, se tiene que cumplir que: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

Por lo tanto a + b = 0

El enunciado nos proporciona otra condición que f(2) = 3. Nos está diciendo que cuando x=2, la función vale 3 (y=3). De las dos funciones cogeremos aquella que esté definida en x=2

f(2) = 3 → f(2) = $a(2)^2 + b = 3$ → $4a + b = 3$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 4a + b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

2) Dada la función: Hallar *a* y *b* para que la función sea continua.

$$\mathbf{f(x)=}\begin{cases} x^2 & si\ x < 0 \\ ax+b & si\ 0 \le x < 1 \\ 2 & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

(*solución : a=2 , b= 0)*

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Intervalos de Definición</u>

Observamos que:

- f(x) = x^2 → se trata de una función cuadrática por lo tanto está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función será continua en (-∞, 0)
- f(x) = ax + b → se trata de una función Lineal por lo tanto está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función será continua en (0,1)
- f(x) = 2 → se trata de una función Constante por lo tanto está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función será continua en (1,∞)

<u>Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)</u>

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=0 y x=1.

Para x = 0

- $\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} ax + b = b$
- f(0)= b

Para que la función sea continua en x= 0, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Por lo tanto b = 0

Para x = 1

- $\lim_{x\to 1^-} ax + b = a + b$
- $\lim_{x\to 1^+} 2 = 2$
- f(1)= 2

Para que la función sea continua en x= 1, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Por lo tanto a +b = 2 Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \to \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$

3) Calcular los valores de ***a*** y ***b*** para que la siguiente función sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & si\ x<0 \\ ax+b & si\ 0\le x\le 3 \\ x-5 & si\ x>3 \end{cases}$$

(Solución: a = -1 y b=1)

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Intervalos de Definición</u>

Observamos que:

- f(x) = $\frac{1}{x^2+1}$ → se trata de una función racional que está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función es continua en (-∞, 0)
- f(x) = ax + b → se trata de una función Lineal que está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función será continua en (0,3)
- f(x) = x-5 → se trata de una función Lineal que está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función será continua en (3,∞)

<u>Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)</u>

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=0 y x=1.

Para x = 0

- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2+1} = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} ax+b = b$
- f(0)= b

Para que la función sea continua en x= 1, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Por lo tanto b = 1

Para x = 3

- $\lim_{x\to 3^-} ax+b = 3a+b$
- $\lim_{x\to 3^+} x-5 = -2$
- f(3)= 3a + b

Para que la función sea continua en x= 3, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

Por lo tanto 3 a +b = -2 Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} b=1 \\ 3a+b=-2 \end{cases} \to \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

4) Calcular los valores de ***a*** y ***b*** para que la siguiente función sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & x\leq -3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} & -3<x<3 \\ 2bx-4x & x\geq 3 \end{cases}$$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

Observamos que:

- f(x) = 2x + a → se trata de una función lineal que está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función es continua en $(-\infty,-3)$
- f(x) = $\frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6}$ → se trata de una función Racional. La función no está definida en x=-3 pero como este punto se encuentra fuera de su dominio → La función será continua en (-3,3)
- f(x) = 2bx – 4x → La función será continua en (3,∞)

Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=-3 y x=3.

Para x = -3

- $\lim\limits_{x\to -3^-} 2x+a=-6+\text{a}$
- $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6}=\left[\frac{0}{0}\right] \quad \lim\limits_{x\to -3^+} \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6}=\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x^2-x+2)}=\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{x-3}{x^2-x+2}=\frac{-6}{14}=\frac{-3}{7}$
- f(-3)= -6 + a

Para que la función sea continua en x= -3, se tiene que cumplir que: $\lim\limits_{x\to -3^-} \text{f(x)}=\lim\limits_{x\to -3^+} \text{f(x)}=\text{f}(-3)$

Por lo tanto -6 + a = $\frac{-3}{7}$ → $a=\frac{39}{7}$

Para x = 3

- $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6}=\frac{0}{48}=0$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} 2\text{bx}-4\text{x}=6\text{b}-12$
- f(3)= 6b -12

Para que la función sea continua en x= 3, se tiene que cumplir que: $\lim\limits_{x\to 3^-} \text{f(x)}=\lim\limits_{x\to 3^+} \text{f(x)}=\text{f}(3)$

Por lo tanto 6b-12=0 → $b=2$

5) Estudia la continuidad de f(x):

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & x<0 \\ \dfrac{3x-9}{x^2-9} & 0\leq x<3 \\ \dfrac{3x}{x+3} & x\geq 3 \end{cases}$$

(Solución: x=-1→ Discontinuidad Inevitable de salto Infinito, x=0→ Función Continua, x=3→ Discontinuidad Inevitable de salto Finito)

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Intervalos de Definición</u>

Observamos que:

- f(x) = $\frac{1}{x+1}$ → se trata de una función racional que está definida en todo su dominio, exceptuando en x= -1, donde deberemos realizar el estudio de su continuidad.
- f(x) = $\frac{3x-9}{x^2-9}$ → se trata de una función Racional. La función no está definida en x=-3 y en x=3 pero como estos dos puntos se encuentran fuera de su dominio, la función será continua en (0,3)
- f(x) = $\frac{3x}{x+3}$ → se trata de una función Racional. La función no está definida en x=-3 pero como este punto se encuentran fuera de su dominio, la función será continua en (3,∞)

X = -1

- ∄ f(-1)
- $\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{0}=\frac{k}{0}$

  Calculamos los límites laterales:

  - $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\frac{+}{0^-}=-\infty$
  - $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\frac{+}{0^+}=+\infty$

Como $\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\frac{+}{0^+}=+\infty$ → Tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito

Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=0 y x= 3

Para x = 0

- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x+1} = 1$
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{3x-9}{x^2-9} = 1$
- f(0)= $\frac{3 \cdot 0-9}{0^2-9} = 1$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \rightarrow$ La función será continua en x = 0

Para x = 3

- $\lim_{x \to 3^-} \frac{3x-9}{x^2-9} = \left[\frac{0}{0}\right]$ $\quad \lim_{x \to 3^-} \frac{3x-9}{x^2-9} = \lim_{x \to 3^-} \frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{3}{(x+3)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 3^+} \frac{3x}{x+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
- f(3)= $\frac{3 \cdot 3}{3+3} = \frac{1}{2}$

Como $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$ y ambos toman valores finitos $\rightarrow$ Tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Finito de Valor 2

6) Estudia la continuidad de f(x)

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-2^x & si & x<0 \\ x^2-x-1 & si & 0\le x<1 \\ 1+\ln x & si & x\ge 1 \end{cases}$$

(Solución: x=0→ función Continua, x=1→ Discontinuidad Inevitable de Salto Finito)

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Intervalos de Definición</u>

Observamos que:

- f(x) = $3x^2-2^x$ → La función es continua en $(-\infty,0)$
- f(x) = x^2-x-1 → La función es continua en (0,1)
- f(x) = $1+\ln x$ → Cumple la condición que x > 0. La función es continua en $(1,\infty)$

<u>Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)</u>

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=0 y x= 3

Para x = 0

- $\lim_{x\to 0^-} 3x^2-2^x=-1$
- $\lim_{x\to 0^+} x^2-x-1=-1$
- f(0)= $0^2-0-1=-1$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ → La función será continua en x = 0

Para x = 1

- $\lim_{x\to 1^-} x^2-x-1$ = -1
- $\lim_{x\to 1^+} 1+lnx=1$
- f(1)= $1+ln1=1$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim_{x\to 1^+} f(x)$ y ambos toman valores finitos → Tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Finito de Valor 2

7) Calcular los valores de ***a*** y ***b*** para que la siguiente función sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} e^x+a & x\le 0 \\ ax+b & 0<x\le 3 \\ \dfrac{x^3-2x^2-3x}{-x^2+9} & x>3 \end{cases}$$

(Solución: $a=\frac{-3}{4}$ y $b=\frac{1}{4}$)

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

Observamos que:

- f(x) = e^x+a → La función será continua en (-∞, 0)
- f(x) = $ax+b$ → La función será continua en (0,3)
- f(x) = $\frac{x^3-2x^2-3x}{-x^2+9}$ → se trata de una función Racional. La función no está definida en x=-3 y en x= 3 pero estos puntos se encuentran fuera de su dominio. La función será continua en (3,∞)

Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=0 y x= 3

Para x = 0

- $\lim_{x\to 0^-} e^x+a = 1+\text{a}$
- $\lim_{x\to 0^+} ax+b = \text{b}$
- f(0)= $e^0+a = 1+\text{a}$

Para que la función sea continua en x= 0, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 0^-} \text{f(x)} = \lim_{x\to 0^+} \text{f(x)} = \text{f(0)}$

Por lo tanto 1 + a = b

Para x = 3

- $\lim_{x\to 3^-} ax+b = 3a+b$
- $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^3-2x^2-3x}{-x^2+9} = \left[\frac{0}{0}\right]$ $\quad \lim_{x\to 3^+} \frac{x^3-2x^2-3x}{-x^2+9} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x(x-3)(x+1)}{-(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x(x+1)}{-(x+3)} = -2$
- f(3)= $3a+b$

Para que la función sea continua en x= 3, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

Por lo tanto 3 a +b = -2 Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 1 + a = b \\ 3a + b = -2 \end{cases} \to \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$

8) Calcula el valor de ***a*** para que la siguiente función sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x \le -3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{x^3 + 2x^2 - x + 6} & x > -3 \end{cases}$$

(Solución: $a = \frac{39}{7}$)

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

Observamos que:

- f(x) = $2x + a$ → La función será continua en (-∞, -3)
- f(x) = $\frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6}$ → se trata de una función Racional. La función no está definida en x=-3 pero en este punto se encuentran fuera de su dominio. La función será continua en (-3,∞)

Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)

Miramos la continuidad en el punto de ruptura, en este caso será el punto x= -3

Para x = -3

- $\lim_{x\to -3^-} 2x + a = -6 + \text{a}$
- $\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad \lim_{x\to -3^+} \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x-3(x+3)}{(x+3)(x^2-x+2)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x-3)}{(x^2-x+2)} = \frac{-6}{14} = \frac{-3}{7}$
- f(-3)= $2 \cdot (-3) + a = \ -6 + \text{a}$

Para que la función sea continua en x= -3, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^+} f(x) = f(-3)$

Por lo tanto -6 + a = $\frac{-3}{7} \to a = \frac{39}{7}$