Ejercicio 1 [2,5 puntos]

Una oficina necesita adquirir material de papelería. Cuenta con un presupuesto de 600 euros y necesita archivadores, cuadernos y carpetas. Los precios de cada artículo por unidad son de 6, 3 y 2 euros respectivamente. El número de cuadernos va a ser la cuarta parte que el de carpetas y el número total de archivadores y de carpetas será de 165.

1. [0,9 PUNTOS] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

2. [0,8 PUNTOS] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

3. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

A1) x: número de archivadores

y: número de cuadernos

z: número de carpetas

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{6x+3y+2z=600} \\ \boldsymbol{y=\dfrac{z}{4}} \\ \boldsymbol{x+z=165} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{6x+3y+2z=600} \\ \boldsymbol{4y-z=0} \\ \boldsymbol{x+z=165} \end{cases}$$

A2) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 600 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 165 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24+0-3-8+0+0 = 13 \neq 0 \rightarrow$ Como $|A| \neq 0 \rightarrow$ rg(A) = 3

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

A3) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$A^*=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 600 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 165 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \rightarrow 6F_3 - F_1]{} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 600 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 390 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \rightarrow 4F_3 + 3F_1]{} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 600 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 1560 \end{pmatrix} \begin{cases} x=45 \\ y=30 \\ z=120 \end{cases}$$

El número de televisores que deben comprarse son: 45 archivadores, 30 cuadernos y 120 carpetas.

Ejercicio 2 [2,5 puntos]

Un inversor quiere comprar acciones de dos clases, A y B. La suma total de acciones adquiridas será como máximo de 1200. Cada acción del tipo A le reportará un beneficio de 0,2 euros y cada acción del B, uno de 0,08 euros. Tiene claro que no comprará más de 500 acciones del tipo A. Pero sí está dispuesto a adquirir como mínimo 350 del B. Además, no quiere que el número de acciones B adquiridas sea mayor del triple de acciones A. ¿Cuántas acciones debe comprar de cada tipo para obtener los máximos beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Se trata de un problema de programación lineal.

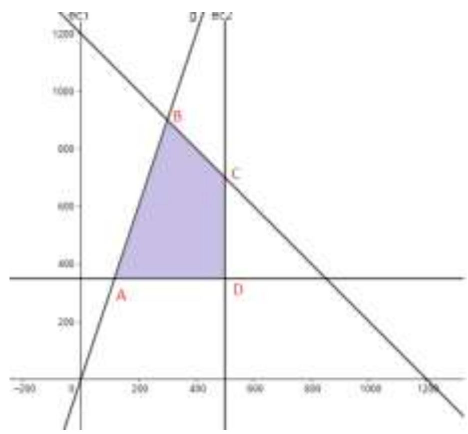
Las variables de decisión son: *x* → número de acciones de tipo A

y → número de acciones de tipo B

El objetivo es maximizar los beneficios: B(x,y) = 0,2x + 0,08y

Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 1200 \\ x \leq 500 \\ y \geq 350 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 4y \leq 200.000 \\ x \leq 30.000 \\ y \leq 25.000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima, los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} y = 350 \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow$ A($\frac{350}{3}$,350) → B_A= 0,2·$\frac{350}{3}$ + 0,08·350 = $\frac{154}{3}$ = 51.33€

B$\begin{cases} x + y = 1200 \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow B(300, 900) \rightarrow B_B$= 0,2·300 + 0,08·900 = 132€

C$\begin{cases} x + y = 1200 \\ x = 500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 500 \\ y = 700 \end{cases} \rightarrow C(500,700) \rightarrow B_C$= 0,2·500 + 0,08·700 = 156€

D$\begin{cases} x = 500 \\ y = 350 \end{cases} \rightarrow$ D(500,350) → B_D= 0,2·500+0,08·350 = 128€

Para obtener los máximos Beneficios deben comprar 500 acciones de tipo A y 700 acciones de tipo B, siendo los Beneficios de 156 €.

Ejercicio 3 **[1,25 PUNTOS] Dada la función f(x) =** $\frac{x+5}{2x^2+4x-30}$

[0,25 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?

[0,5 PUNTOS] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?

[0,5 PUNTOS] Calcular los dos límites laterales en x = 3. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Calculamos el dominio de la función:

Como se trata de una función racional, la función será discontinua en los puntos que anula el denominador.

$$2x^2 + 4x - 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases}$$

D(f) = $\forall x \in \mathbb{R} - \{-5,3\}$

Por lo tanto la función será discontinua en x= -5 y en x= 3

Calculamos que tipo de discontinuidad tenemos en esos puntos, ya que si uno de los puntos presenta una Discontinuidad Evitable podremos definir de nuevo la función para evitarla.

<u>X= -5</u>

$\lim\limits_{x\to-5} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} = \frac{0}{0}$ (Indeterminación) $\lim\limits_{x\to-5} \frac{x+5}{2(x+5)(x-3)} = \lim\limits_{x\to-5} \frac{1}{2(x-3)} = \frac{1}{-16}$

Como $\exists \frac{x+5}{2x^2+4x-30} = \frac{1}{-16}$ y $\nexists$f(-5) → Tendremos una Discontinuidad Evitable en x= -5

En este punto podremos definir de nuevo la función para evitar esta discontinuidad:

<u>X= 3</u>

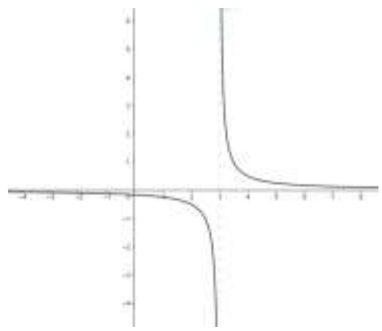
$\lim\limits_{x\to3} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} = \frac{8}{0} \quad \frac{k}{0}$ (Indeterminación)

Calculamos los límites laterales: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \frac{+}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \frac{+}{0^+} = +\infty \end{cases}$

Como los límites laterales tienden a valores infinitos, tendremos en x= 3 una discontinuidad Inevitable de salto Infinito (Asíntota Vertical) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x+5}{2x^2+4x-30} & si\ x \neq -5\ y\ x \neq 3 \\ \dfrac{1}{-16} & si\ x = -5 \end{cases}$

Con esta nueva función sólo presentaría una discontinuidad en x= 3 ya que presenta una discontinuidad Inevitable de Salto Infinito (no se puede evitar)

D(f) = $\forall x \in R - \{3\}$



A. [1,25 PUNTOS] Dada la función f(x)= $\begin{cases} \frac{x+2a}{x-5} & si\ x \leq 2 \\ x^2 - 5 & si\ 2 < x \leq 4 \\ x^2 + 2x - b & si\ x > 4 \end{cases}$

determinar los valores de a y b para los que la función es continua en x = 2 y en x = 4.

Estudiamos la continuidad en los puntos x=2 y en x=4

X=2

$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+2a}{x-5} = \frac{2+2a}{2-5} = \frac{2+2a}{-3}$ Para que la función sea continua en x=2,

$\lim_{x\to 2^+} x^2 - 5 = 4 - 5 = -1$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

f(2) = $\frac{2+2a}{-3}$ $\frac{2+2a}{-3}$ **=-1** → a = $\frac{1}{2}$

X=4

$\lim_{x\to 4^-} x^2 - 5 = 16 - 5 = 11$ Para que la función sea continua en x=4,

$\lim_{x\to 4^+} x^2 + 2x - b = 16 + 8 - b = 24 - b$ $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

f(4) = $(4)^2 - 5 = 11$ $24 - b$ = 11 → b = 13

Para que la función sea continua en todo su dominio a= $\frac{1}{2}$ y b = 13

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS] **Dadas las funciones f(x) = x^3-6x^2+9x y g(x)= x^2-x**

A. [0,25 PUNTOS] Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [1 PUNTO] Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

C. [0,25 PUNTOS] Dibujar las gráficas de ambas funciones indicando la región delimitada por ambas.

D. [1 PUNTO] Calcular el área de la región anterior.

A. **Puntos de corte con el eje OX (y=0)**

Función f(x): $x^3-6x^2+9\text{x}=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(0,0) \\ B(3,0) \end{cases}$

Función g(x): x^2-x=0→ $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(0,0) \\ C(1,0) \end{cases}$

Puntos de corte con el eje OY (x=0)

Función f(x): f(0)= $0^3-6\cdot 0^2+9\cdot 0=0 \rightarrow A(0,0)$

Función g(x): g(0) = $0^2-0=0 \rightarrow A(0,0)$

B. Monotonía

Función f(x):

f´(x) = $3x^2-12x+9=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$ → Posibles Extremos Relativos

	(-∞, 1)	(1,3)	(3,∞)
Signo de f´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↗

Crecimiento: (-∞, 1) ∪ (3, ∞)

Decrecimiento: (1,3)

Máximo: (1,4)

Mínimo: (3,0)

Función g(x):

g´(x) = 2x-1 = 0 → x = $\frac{1}{2}$ Posible Extremo Relativo

	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
Signo de g´(x)	-	+
Comportamiento de g(x)	↘	↗

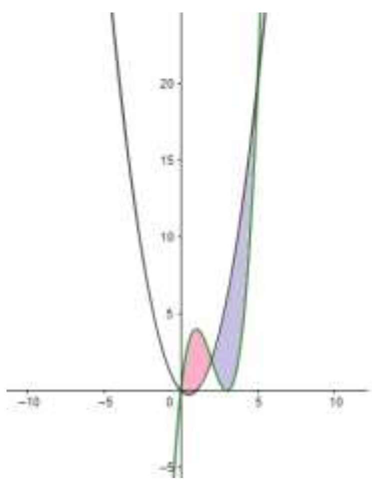
Crecimiento: $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

Decrecimiento: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Mínimo: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

Máximo: No hay

C.



D. Calculamos el punto de corte entre las dos funciones, aunque en la gráfica observamos que las dos funciones se cortan en los puntos x=0, x=2 y x=5

$x^3-6x^2+9x = x^2-x \rightarrow x^3-7x^2+10x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$

Tendremos dos recintos: [0,2] y [2,5]

$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_0^2 (x^3 - 7x^2 + 10\text{x})\text{dx} = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + \frac{10x^2}{2}\right]_0^2 = \left(\left(\frac{16}{4} - \frac{56}{3} + \frac{40}{2}\right) - (0)\right) = \frac{16}{3}U^2$$

$$A_2 = \int_2^5 \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_2^5 (-x^3 + 7x^2 - 10\text{x})\text{dx} = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{10x^2}{2}\right]_2^5 = \left(\left(-\frac{625}{4} + \frac{875}{3} - \frac{250}{2}\right) - \left(-\frac{16}{3}\right)\right) = \frac{125}{12} + \frac{16}{3} = \frac{63}{4}U^2$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}\ U^2$$

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

En una población de 3510 habitantes, se conoce el número, por franjas de edades, de los que colaboran con alguna ONG. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	18-35 años	36-55 años	Mayores de 55 años	Total
Colabora con alguna ONG	537	759	463	1759
No colabora con ninguna ONG	115	1034	602	1751
Total	652	1793	1065	3510

A. [1,25 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 35 años.
B. [1,25 PUNTOS] Si sabemos que no colabora con ninguna ONG, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 36 y 55 años?

A. Aplicamos la regla de Laplace usando los datos de la tabla:

P("Edad comprendida entre los 18 y 35 Años") = $\frac{652}{3510} = 0{,}1858$

B. Se trata de una Probabilidad Condicionada:

P(Edad comprendida entre los 36 y 55 años/No colabora con ninguna ONG) = aplicamos el teorema de Bayes

$$= \frac{\text{P(Edad comprendida entre los 36 y 55 años} \cap \text{No colabora con ninguna ONG)}}{\text{P(No colabora con ninguna ONG)}} = \frac{\frac{1034}{3510}}{\frac{1751}{3510}} = \frac{1034}{1751} = 0{,}5905$$

Ejercicio 6: [2,5 PUNTOS]

El número de horas semanales que los habitantes de determinada población dedican a la lectura de libros, sigue una distribución normal con desviación típica 2 horas. Una muestra aleatoria de 375 personas da como resultado un tiempo medio de 4 horas.
A. [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para el tiempo medio.
B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

Sea X la variable aleatoria que mide el número de horas semanales que los habitantes de determinada población dedican a la lectura de libros, donde X ~ N(μ, 2).

a) Tenemos una muestra aleatoria:

n = 375 personas
$\sigma = 2$ horas
$\bar{x} = 4$ horas

Para una confianza del 94%, Nivel de confianza = 1- α = 0,94 → α = 0,06

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,97 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,03}$= 1,88

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1-\alpha$.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,94}(\mu) = \left(4 - 1{,}88\frac{2}{\sqrt{375}};\ 4 + 1{,}88\frac{2}{\sqrt{375}}\right) = (3{,}8058; 4{,}1942)$$

b) Sea X la variable aleatoria que mide el número de horas semanales que los habitantes de determinada población dedican a la lectura de libros, donde X ~ N(μ, 2).

Para una confianza del 90%, Nivel de confianza = 1- α = 0,90 → α = 0,1

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,95 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,05}$= 1,645

Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de:

E = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}88\frac{2}{\sqrt{375}} = 0{,}1942$ $\quad\quad \frac{E}{4} = \frac{0{,}1942}{4}$

E= $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2{,}354 \rightarrow n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{E}\right)^2 \rightarrow n > \left(\frac{1{,}645\cdot 2}{\frac{0{,}1942}{4}}\right)^2 \rightarrow n > 4592{,}12$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **4593 personas**