OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [2,5 puntos]

Una empresa del sector alimentario lanza al mercado dos nuevas bebidas, A y B, compuestas de zumos de frutas combinados. La composición de cada litro de bebida es la siguiente:

	Zumo de Piña	Zumo de Mango	Zumo de Papaya
A	0,5 litros	0,5 litros	
B	0,4 litros		0,6 litros

El precio de venta fijado es de 1,5 euros por litro de A y de 1,75 euros por litro de B. Semanalmente se cuenta con 20 000 litros de zumo de piña, con 15 000 de zumo de mango y con 15 000 de zumo de papaya. Determinar los litros que deben producirse semanalmente de cada bebida para obtener unos ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: $x \rightarrow$ número de litros que deben producirse semanalmente de la bebida A

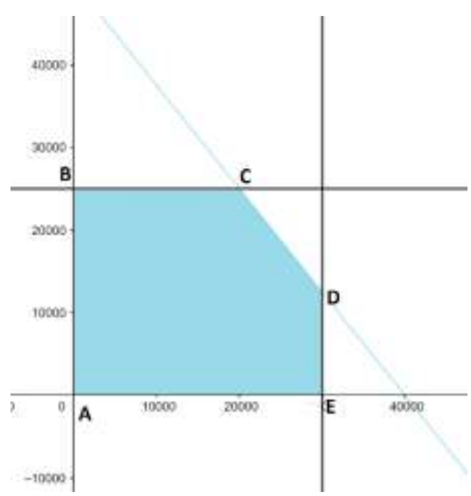
$y \rightarrow$ número de litros que deben producirse semanalmente de la bebida B

	Cantidad	Zumo de Piña	Zumo de Mango	Zumo de Papaya
A	X	0,5 litros	0,5 litros	
B	Y	0,4 litros		0,6 litros

El objetivo es maximizar los ingresos: I(x,y) = 1,5x + 1,75y

Restricciones:

$$\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}4y \leq 20.000 \\ 0{,}5x \leq 15.000 \\ 0{,}6y \leq 15.000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 4y \leq 200.000 \\ x \leq 30.000 \\ y \leq 25.000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima, los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ → A(0,0) → I_A= 1,5·0 + 1,75·0 = 0€

B$\begin{cases} x = 0 \\ y = 25.000 \end{cases}$ → $B(0, 25.000)$ → I_B= 1,5·0 + 1,75·25000 = 43750€

C$\begin{cases} 5x + 4y = 200000 \\ y = 25000 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 20000 \\ y = 25000 \end{cases}$ → $C(20000,25000)$ → I_C= 1,5·20000 + 1,75·25000 = 73750€

D$\begin{cases} x = 30000 \\ 5x + 4y = 200000 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 30000 \\ y = 12500 \end{cases}$ → D(30000,12500) → I_D= 1,5·30000+1,75·12500 = 66875€

E$\begin{cases} x = 30000 \\ y = 0 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 30000 \\ y = 0 \end{cases}$ → E(30000,0)→ I_E= 1,5·30000 + 1,75·0 = 45000€

Para obtener los máximos Ingresos deben producir 20.000 litros semanalmente de la bebida A y 25.000 litros semanalmente de la bebida B, siendo los Ingresos de 73750 €.

Ejercicio 2 [2,5 puntos]

A.[3 puntos] Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230 400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B. A. [0,9 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor. B. [0,8 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema. C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

A1) x: número de televisores del modelo A

y: número de televisores del modelo B

z: número de televisores del modelo C

Planteamos el sistema de ecuaciones:

Precio del televisor tipo A: 320 euros

Precio del televisor tipo B: 20% de descuento, el cliente pagará el 80% : $\frac{80}{100} \cdot 320 = 256$ euros

Precio del televisor tipo C: 10% de incremento, el cliente pagará el 110% : $\frac{110}{100} \cdot 320 = 352$ euros

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 750} \\ \boldsymbol{320x + 256y + 352z = 230400} \\ \boldsymbol{x + z = 2y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 750} \\ \boldsymbol{10x + 8y + 11z = 7200} \\ \boldsymbol{x - 2y + z = 0} \end{cases}$$

A2) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 10 & 8 & 11\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 750\\ 10 & 8 & 11 & 7200\\ 1 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 10 & 8 & 11\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=8-20+11-8-10+22=3\neq 0 \rightarrow \text{Como } |A|\neq 0 \rightarrow \text{rg(A)} = 3$$

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) $=$ número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

A3) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 750\\ 10 & 8 & 11 & 7200\\ 1 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\rightarrow F_3-F_1]{F_2\rightarrow F_2-10F_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 750\\ 0 & -2 & 1 & -300\\ 0 & -3 & 0 & -750\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases}x=300\\ z=200\\ y=250\end{cases}$$

El número de televisores que se venden son: 300 televisores de tipo A, 250 televisores de tipo B y 200 televisores de tipo C.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS] Dada la función f(x) = $\frac{x^2+x-2}{x-2}$ obtener sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

D(f) = $\forall x\epsilon\mathbb{R}-\{2\}$

A. Monotonía

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

f´(x) = $\frac{(2x+1)\cdot(x-2)-(1)(x^2+x-2)}{(x-2)^2}=\frac{(2x^2+x-4x-2)-x^2-x+2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

f´(x) = 0→ f´(x) = $\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\mathbf{0}\rightarrow x^2-4x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=4\end{cases}$ → Posibles Máximo o Mínimo (Extremos Relativos)

	(-∞, 0)	(0,2)	(2,4)	(4,∞)
Signo de f´(x)	+	-	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↘	↗

- Crecimiento: (-∞,0)∪(4, ∞)
- Decrecimiento: (0, 2) ∪ (2,4)
- Mínimo en x = 4: (4,9)
- Máximo en x= 0: (0,1)

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS] A. [1,25 PUNTOS] Dada la función f(x) = $\boldsymbol{\frac{2x+4}{x^2+5x+6}}$

[0,25 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?

[0,5 PUNTOS] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?

[0,5 PUNTOS] Calcular los dos límites laterales en x = –3. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Calculamos el dominio de la función:

Como se trata de una función racional, la función será discontinua en los puntos que anula el denominador.

$$x^2+5x+6=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \end{cases}$$

D(f) = $\forall x \in \mathbb{R} - \{-3,-2\}$

Por lo tanto la función será discontinua en x= -3 y en x= -2

Calculamos que tipo de discontinuidad tenemos en esos puntos, ya que si uno de los puntos presenta una Discontinuidad Evitable podremos definir de nuevo la función para evitarla.

X= -3

$\lim_{x\to -3} \frac{\boldsymbol{2x+4}}{\boldsymbol{x^2+5x+6}} = \frac{-2}{0} = \frac{k}{0}$ (Indeterminación)

Calculamos los límites laterales: $\begin{cases} \lim_{x\to -3^-} f(x) = \frac{-}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to -3^+} f(x) = \frac{-}{0^-} = +\infty \end{cases}$

Como los límites laterales tienden a valores infinitos, tendremos en x= -3 una discontinuidad Inevitable de salto Infinito (Asíntota Vertical)

X= -2

$\lim_{x\to -2} \frac{\mathbf{2x+4}}{\mathbf{x^2+5x+6}} = \frac{0}{0}$ (Indeterminación)

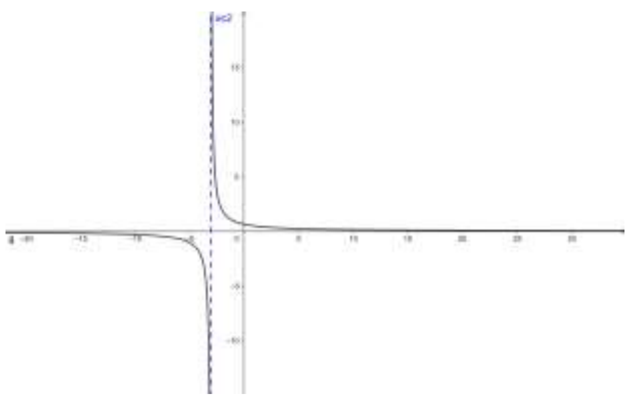
$$\lim_{x\to -2} \frac{\mathbf{2x+4}}{\mathbf{x^2+5x+6}} = \lim_{x\to -2} \frac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \lim_{x\to -2} \frac{2}{(x+3)} = 2$$

Como $\exists \lim_{x\to -2} \frac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)} = 2$ y ∄f(-2) → Tendremos una Discontinuidad Evitable en x= -2

En este punto podremos definir de nuevo la función para evitar esta discontinuidad:

f(x) = $\begin{cases} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} & \boldsymbol{si\ x \neq -2} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{si\ x = -2} \end{cases}$

Con esta nueva función sólo presentaría una discontinuidad en x= -3 ya que presenta una discontinuidad Inevitable de Salto Infinito (no se puede evitar)



B. [1,25 PUNTOS] Dada la función f(x)= $\begin{cases} \boldsymbol{ax^2+2x-1} & \boldsymbol{si\ x \leq -1} \\ \boldsymbol{x^2-5} & \boldsymbol{si -1 < x \leq 3} \\ \boldsymbol{\frac{b+x}{3x-2}} & \boldsymbol{si\ x > 3} \end{cases}$

determinar los valores de a y b para los que la función es continua en x = –1 y en x = 3.

Estudiamos la continuidad en los puntos x=-1 y en x=3

X=-1

$\lim_{x\to -1^-} \boldsymbol{ax^2+2x-1 = a-2-1 = a-3}$

Para que la función sea continua en x=-1,

$\lim_{x\to -1^+} \boldsymbol{x^2-5 = 1-5 = -4}$

$\lim_{x\to -1^-} \boldsymbol{f(x)} = \lim_{x\to -1^+} \boldsymbol{f(x) = f(-1)}$

f(-1) = $\boldsymbol{(-1)^2 a + 2(-1) - 1 = a-3}$

a - 3 = -4 → a = -1

X=3

$\lim_{x\to 3^-} x^2 - 5 = 9 - 5 = 4$ Para que la función sea continua en x=3,

$\lim_{x\to 3^+} \frac{b+x}{3x-2} = \frac{b+3}{7}$ $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

f(3) = $(3)^2 - 5 = 4$ $\frac{b+3}{7} = 4 \rightarrow$ b = 25

Para que la función sea continua en todo su dominio a= -1 y b = 25

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] El precio de alquiler de viviendas en un determinado barrio de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 265 euros. Queremos que el error cometido al estimar el precio medio de alquiler con un nivel de confianza del 97 % sea 20,7 euros. ¿Cuántas viviendas hemos de tomar aleatoriamente para calcular la estimación?

B. [1,25 PUNTOS] En el caso de una población de tamaño pequeño, el precio de alquiler sigue una distribución normal con desviación típica 134 euros. Una muestra aleatoria de 357 viviendas da como resultado un alquiler medio de 448 euros. Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el precio medio de alquiler.

Sea X la variable aleatoria que mide el precio de alquiler de viviendas en un determinado barrio de una gran ciudad, donde X ~ N(μ, 265).

a)

Tenemos una muestra aleatoria:

E = 20,7 euros
$\sigma = 265$ euros

Para una confianza del 97%, Nivel de confianza = 1- α = 0,97 → α = 0,03

P(Z≤ $Z_{\alpha/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,985 → por lo tanto $Z_{\alpha/2} = Z_{0,015}$= 2,17

E= $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2{,}354 \rightarrow n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{E}\right)^2 \rightarrow n > \left(\frac{2{,}17\cdot 265}{20{,}7}\right)^2 \rightarrow n > 771{,}739$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **772 viviendas**

b) Tenemos una muestra aleatoria:

n = 357 viviendas
$\sigma = 134$ euros
$\bar{x} = 448$ euros

Para una confianza del 93%, Nivel de confianza = 1- α = 0,93 → α = 0,07

P(Z≤ $Z_{\alpha/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,965 → por lo tanto $Z_{\alpha/2} = Z_{0,035}$= 1,81

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1 - \alpha$.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,93}(\mu) = \left(448 - 1,81\frac{134}{\sqrt{357}};\ 448 + 1,81\frac{134}{\sqrt{357}}\right) = (435,163; 460,837)$$

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

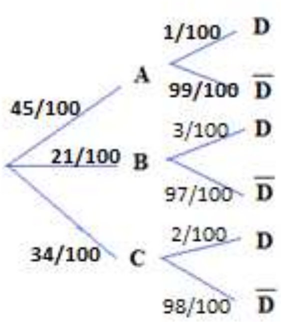
Una empresa juguetera lanza al mercado un nuevo modelo de balón de playa, que fabrica en tres plantas, A, B y C, de las que salen respectivamente el 45 %, 21 % y el 34 % de la producción total. Se ha detectado un fallo en la máquina utilizada en cada planta para aplicar los colores. De hecho, sale defectuoso el 1 % de los balones procedentes de la planta A, el 3 % de los provenientes de la B, y el 2 % de los de la C.

Seleccionamos un balón al azar de entre todos los que han salido de las tres plantas:

A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y haya pasado por la máquina de la planta A?

B. [1,25 PUNTOS] Si no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina de la planta B?

Realizamos el diagrama de árbol:



a) Se trata de una probabilidad Compuesta P(A∩ $\overline{D}$) = P(A)· $P(\overline{D}/A)$= $\frac{45}{100}\cdot\frac{99}{100}=\frac{891}{2000}$ = 0,4455 → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 44,55%

b) Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes → P (B/$\overline{D}$) = $\frac{P(B\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{\frac{21}{100}\cdot\frac{97}{100}}{\frac{45}{100}\frac{99}{100}+\frac{21}{100}\frac{97}{100}+\frac{34}{100}\frac{98}{100}}=\frac{\frac{2037}{10000}}{\frac{614}{625}}=\frac{2037}{9824}=0{,}2073$ → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 20,73%