Ejercicio 1 [2,5 puntos]

Tres estudiantes de Economía, Cristina, Juan y Pedro, han preparado un trabajo de investigación que deben exponer en clase. Se repartieron las tareas de la siguiente forma: Cristina llevó a cabo la labor de recopilación de datos, en la que empleó un 40 % más que el tiempo que Juan necesitó para redactar el texto. Pedro desempeñó las tareas de revisión y de preparación de la exposición, siendo el tiempo dedicado a ello la mitad del empleado en total por Cristina y Juan. El tiempo total empleado fue de 18 horas. ¿Cuánto dedicó cada alumno a la elaboración del trabajo?

A. [0,9 PUNTOS] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el tiempo empleado por cada estudiante.

B. [0,8 PUNTOS] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

A. x: horas que ha empleado Cristina en realizar el trabajo

y: horas que ha empleado Juan en realizar el trabajo

z: horas que ha empleado Pedro en realizar el trabajo

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1,4y} \\ \boldsymbol{z = \dfrac{x+y}{2}} \\ \boldsymbol{x + y + z = 18} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x - 1,4y = 0} \\ \boldsymbol{x + y - 2z = 0} \\ \boldsymbol{x + y + z = 18} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{5x - 7y = 0} \\ \boldsymbol{x + y - 2z = 0} \\ \boldsymbol{x + y + z = 18} \end{cases}$$

a) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 0 + 14 - 0 + 7 + 10 = 36 \neq 0 \rightarrow \text{Como } |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg(A)} = 3$$

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) = número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

b) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & -12 & -5 & -90 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \\ z = 6 \end{cases}$$

El número de horas que emplea Cristina es de 7 horas, Juan emplea 5 horas y Pedro emplea 6 horas.

Ejercicio 2 [2,5 puntos]

Una tienda de material informático dispone de 96 lapiceros con memoria USB y 15 tabletas digitales, para organizar dos tipos de lotes. Un lote A tendrá 3 lapiceros y una tableta; un lote B tendrá 6 lapiceros y una tableta. El precio de venta de un lote A es de 70 euros y el de un lote B, 160 euros. Además, el número de lotes B debe ser como máximo la mitad de lotes A.

a) ¿Cuántos lotes deben prepararse y venderse para obtener unos ingresos máximos?

b) ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: $x \to$ número de lotes tipo A

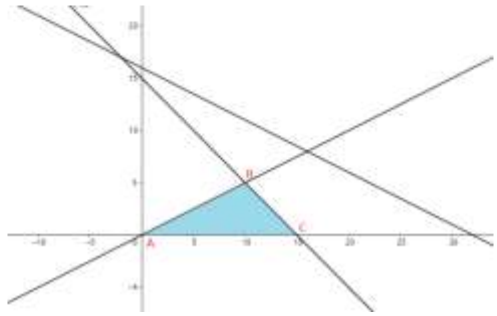
$y \to$ número de lotes tipo B

	Cantidad	Lapiceros Memoria USB	Tabletas Digitales
Lote tipo A	**x**	**3x**	**x**
Lote tipo B	**y**	**6y**	**y**
	x+y	3x+6y	x+y

El objetivo es maximizar los Ingresos I(x,y) = 70x+160y

Restricciones:

$$\begin{cases} 3x + 6y \le 96 \\ x + y \le 15 \\ y \le \frac{x}{2} \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y \le 32 \\ x + y \le 15 \\ y \le \frac{x}{2} \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ → A(0,0) → I_A= 70·0 + 160·0 = 0€

B$\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ x + y = 15 \end{cases}$ → $B(10,5)$ → I_B= 70·10 + 160·5 = 1500€

C$\begin{cases} x + y = 15 \\ y = 0 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 15 \\ y = 0 \end{cases}$ → $C(15,0)$ → I_C= 70·15 + 160·0 = 1050€

Para obtener los máximos Ingresos deben prepararse 10 lotes de tipo A y 5 lotes de tipo B, siendo los Ingresos de 1500€

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS] Una agencia de viajes organiza una excursión para los empleados de una empresa. Eso le supone gastos fijos por viajero de 475 euros además de los 850 euros del alquiler del autocar. Con un grupo de 20 personas, cobra a cada viajero 525 euros, pero presenta la siguiente oferta a la empresa: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará el precio del viaje en 1,25 euros. ¿Con cuántos viajeros consigue unos beneficios máximos?¿Cuánto paga cada viajero?

Se trata de un ejercicio de Optimización.

Sea x→ número de viajeros nuevos inscritos

Vamos a calcular la función objetivo:

Beneficio = Ingresos – Costes → B(x) = I(x) – C(x)

Ingresos = I(x) = (20+x)·(525-1,25x)

Costes = C(x) = 475·(20+x)+850

Función Objetivo → B(x) = (20+x)·(525-1,25x)-[475·(20+x)+850]= = $-x^2$+40x+300

B(x)= $-1,25x^2$+25x+150

- Derivamos la función objetivo y lo igualaremos a cero:

  B´(x) = -2,5x+25 =0→ x= $\frac{25}{2,5}$ = 10 viajeros nuevos inscritos

- Vamos a comprobar que se trata de un máximo:

  B´´(x) = -2,5 → B´´(10)= -2,5<0 → por lo tanto tendremos un máximo

- Calculamos el beneficio:

  B(x)= $-1{,}25x^2+25x+150$ → B(10)= $-1{,}25\cdot 10^2+25\cdot 10+150$= 275 euros

Para maximizar el beneficio, el número de viajeros inscritos nuevos debe ser de 10 (por lo tanto deben contratar el viaje 30 viajeros), ascendiendo el beneficio a 275 €.

Cada viajero debe pagar 525 – 1,25· 10 = 512,5€

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS] A. [1,25 PUNTOS] Dada la función f(x) = x^3-3x

a) [0,25 PUNTOS] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY

b) [0,5 PUNTOS] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) [0,5 PUNTOS] Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

d) [0,25 PUNTOS] Dibujar la gráfica de f(x) e indicar la región delimitada por dicha curva y la recta y=x

e) [1 PUNTO] Calcular el área de la región anterior

a) Calculamos el dominio de la función:

Como se trata de una función polinómica

D(f) = $\forall x \in \mathbb{R}$

Corte con el eje OX (y=0) $x^3-3x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow (0,0) \\ x=+\sqrt{3} \rightarrow (\sqrt{3},0) \\ x=-\sqrt{3} \rightarrow (-\sqrt{3},0) \end{cases}$

Corte con el eje OY (x=0) f(0)= $0^3-3\cdot 0=0 \rightarrow (0,0)$

b) Crecimiento y Decrecimiento

Calculamos la derivada de la función:

f´(x) = $3x^2 - 3$

f´(x) = 0 → $3x^2 - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ (Posibles extremos relativos en x=-1 y en x=1)

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
Signo de f´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↗

Crecimiento: $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

Decrecimiento: (-1,1)

Máximo: (-1,2)

Mínimo: (1,-2)

c) Concavidad y Convexidad

Calculamos la segunda derivada de la función:

f´´(x) = $6x$ → 6x = 0 → x = 0 (posible punto de Inflexión)

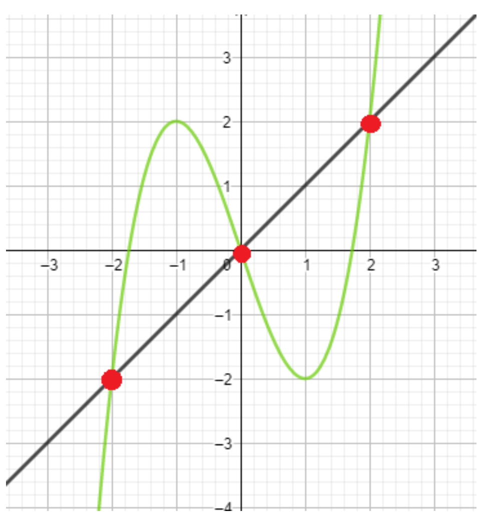
	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
Signo de f´(x)	-	+
Comportamiento de f(x)	∩	U

Cóncava hacia arriba: (0,∞)

Cóncava hacia abajo : (-∞, 0)

Punto de Inflexión: (0,0)

d)



e) Para calcular el área encerrada entre las dos funciones debemos calcular previamente los puntos de intersección de las mismas. Viendo la representación gráfica podemos observar que los puntos son x_1= -2 , x_2 = 0 y x_3=2
Para calcularlo analíticamente y no gráficamente debemos igualar las dos funciones:

$$x^3 - 3x = x \rightarrow x^3 - 3x - x = 0 \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

- Tendremos dos recintos: [-2,0] y [0,2]

- $A_T = A_1 + A_2$
- $A_1 = \int_{-2}^{0}[(x^3 - 3\text{x}) - x]dx = \int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]\begin{matrix}0\\-2\end{matrix} = [0-(4-8)] = 4\,u^2$
- $A_2 = \int_{0}^{2}[x - (x^3 - 3x)]dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^2}{2}\right]\begin{matrix}2\\0\end{matrix} = [(-4+8) - 0] = 4u^2$
- $A_T = A_1 + A_2 = 4\,u^2 + 4u^2 = 8u^2$

Ejercicio 5 **[2,5 PUNTOS]**

El número de libros que los estudiantes de un instituto leen al año, sigue una distribución normal con desviación típica 1. Una muestra aleatoria de 125 alumnos da como resultado una media de 4 libros.

a) [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94% para la media.

b) [1,25 PUNTOS]¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97% sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

a) Sea X la variable aleatoria que mide el número de libros que los estudiantes de un instituto leen al año, donde X ~ N(μ, 1).

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 125 alumnos
$\bar{x} = 4$ libros
$\sigma = 1$ libro

Para una confianza del 94%, Nivel de confianza = 1- α = 0,94 → α = 0,06

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,97 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,03}$= 1,88

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,93}(\mu) = \left(4 - 1,88\frac{1}{\sqrt{125}};\ 4 + 1,88\frac{1}{\sqrt{125}}\right) = (3,832; 4,168)$$

b) Para una confianza del 97%, Nivel de confianza = 1- α = 0,97 → α = 0,03

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,985 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,015}$= 2,17

Calculamos el Error cometido en el apartado a)

E= $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,88 \cdot \frac{1}{\sqrt{125}}$

El enunciado nos pide que el error sea un tercio del apartado anterior $\frac{1}{4} \cdot 1,88 \cdot \frac{1}{\sqrt{125}}$ = 0,042

E= $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0,042 \to n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 \to n > \left(\frac{2,17 \cdot 1}{0,042}\right)^2 \to n > 2669,44$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **2670 alumnos**

Ejercicio 6 **[2,5 PUNTOS]**

El 23% de los habitantes de una localidad son menores de 25 años. El 31% tienen una edad comprendida entre los 26 y 60 años. El ayuntamiento ha recibido la petición de instalación de un parque eólico en unos terrenos municipales. Entre la población más joven, el 68% es partidario de la instalación; entre los habitantes entre 26 y 60 años, lo es el 53%; y entre los mayores de 60 años, el 42%.

Seleccionamos un habitante al azar:

A. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea favorable a la instalación del parque eólico?

B. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea favorable y mayor de 60 años?

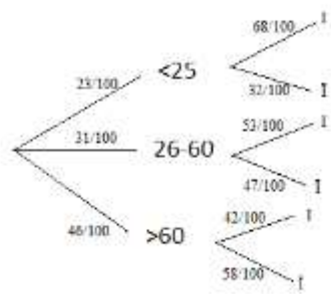
C. [1 PUNTO] Si no es favorable, ¿cuál es la probabilidad de que sea menor de 25 años?

Se designan por:

<25 = “Menores de 25 años” 26-60= “Edades entre 26 y 60 años” >60 = “Mayores de 60 años”

I= “Favorable a la Instalación” Ī= “Desfavorable a la Instalación”

Realizamos el diagrama de árbol:



a) Se trata de una Probabilidad Total

P(I) = P(<25)·P(I/<25)+ P(26-30)·P(I/26-30)+ P(I)·P(> 60/I) = 0,23·0,68 + 0,31·0,53 + 0,46·0,42 = 0,5139

El porcentaje será del 51,39 %

La probabilidad de que sea desfavorable: P($\bar{I}$) = 1 – P(I) = 1- 0,5139 = 0,4861

b) Se trata de una Probabilidad Compuesta

P(>60∩ $\bar{I}$) = P(>60)·P($\bar{I}$/>60) = 0,46·0,58 = 0,2668 El Porcentaje será del 26,68%

c) Se trata de una Probabilidad Condicionada: Aplicamos el Teorema de Bayes

P(<25/$\bar{I}$)= $\frac{P(<25\cap\bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{P(<25)\cdot P(\bar{I}\nless 25)}{P(\bar{I})} = \frac{0{,}23\cdot 0{,}32}{0{,}4861} = 0{,}1514$ El porcentaje será del 15,14%