Ejercicio 1 [2,5 puntos]

A.[3 puntos] Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de las tarifas de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222 € ; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168 € .

a) [1 punto] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las tres tarifas.

b) [1 punto] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

c) [0,25 puntos] Resolverlo.

d) [0,25 puntos] El día que una familia formada por 2 adultos, 2 niños y 3 jubilados visita el museo, se ha aplicado un descuento especial de un 15% a cada tarifa. ¿Cuánto pagan en total?

a) x: tarifa de las entradas de adulto expresadas en euros
y: tarifa de las entradas de niño expresadas en euros
z: tarifa de las entradas de jubilado expresadas en euros

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+z=5y} \\ \boldsymbol{5x+3y+3z=222} \\ \boldsymbol{3x+2y+4z=168} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x-5y+z=0} \\ \boldsymbol{5x+3y+3z=222} \\ \boldsymbol{3x+2y+4z=168} \end{cases}$$

b) Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 4 & 168 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=12+10-45-9+100-6=62\neq 0$ → Como $|A|\neq 0$ → rg(A) = 3

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) = número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

c) Resolvemos el sistema de Ecuaciones

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 4 & 168 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\rightarrow F_3-3F_1]{F_2\rightarrow F_2-5F_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -2 & 222 \\ 0 & 17 & 1 & 168 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3\rightarrow 17F_2-28F_3} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -2 & 222 \\ 0 & 0 & -62 & -930 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 30 \\ y = 9 \\ z = 15 \end{cases}$$

La tarifa de adulto será de 30€, la tarifa de niño será de 9€ y la tarifa de jubilado será de 15€

d) Pagarán 2· (0,85 · 30) +2· (0,85 · 9) + 3· (0,85·15) = 104,55 €

Ejercicio 2 [2,5 puntos]

Una empresa elabora dos productos, A y B, que le proporcionan unos beneficios por kg de 5 y 7 euros respectivamente. Por cuestiones de logística, solo puede producir un máximo de 500 kg a la semana. Las horas semanales de trabajo disponibles son 3200: cada kg de A requiere 4 horas y cada kg de B, 8h. Además, solo dispone de 1500 unidades de materia prima a la semana: cada kg de A necesita 3'75 unidades de materia prima; cada kg de B, 2 unidades.

a) ¿Cuántos kilogramos de cada producto se pueden obtener semanalmente para maximizar los beneficios?
b) ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: *x* → número de kilogramos del producto A

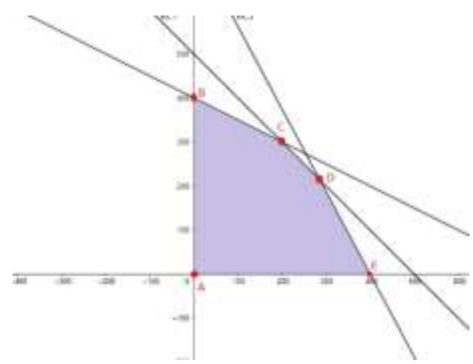
y → número de kilogramos del producto B

	Cantidad	Horas Semanales	Materia Prima
Kg del producto A	**x**	**4x**	**3,75x**
Kg del Producto B	**y**	**8y**	**2y**
	x+y	4x+8y	3,75x+2y

El objetivo es maximizar los beneficios B(x,y) = 5x+7y

Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 500 \\ 4x + 8y \leq 3200 \\ 3{,}75x + 2y \leq 1500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y \leq 500 \\ x + 2y \leq 800 \\ 15x + 8y \leq 6000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ A(0,0) $\rightarrow B_A = 5\cdot0 + 7\cdot0 = 0€$

B$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 800 \end{cases} \rightarrow B(0,400) \rightarrow B_B = 5\cdot0 + 7\cdot400 = 2800€$

C$\begin{cases} x + y = 500 \\ x + 2y = 800 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 300 \end{cases} \rightarrow C(200,300) \rightarrow B_C = 5\cdot200 + 7\cdot300 = 3100€$

D$\begin{cases} x + y = 500 \\ 15x + 8y = 6000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2000}{7} \\ y = \frac{1500}{7} \end{cases} \rightarrow$ D$(\frac{2000}{7},\frac{1500}{7}) \rightarrow B_D = 5\cdot\frac{2000}{7} + 7\cdot\frac{1500}{7} = 2928{,}57€$

E$\begin{cases} 15x + 8y = 6000 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ E(400,0)$\rightarrow B_E = 5\cdot400 + 7\cdot0 = 2000€$

Para obtener los máximos Beneficios se deben producir 200 kg del Producto A y 300 kg del Producto B, siendo el beneficio de 3100€

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS] . Dada la función $(x) = \frac{3x-15}{4x^2+4x-120}$

a) [0,5 puntos] ¿En qué puntos es discontinua?

b) [1 punto] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad? Justifica la respuesta.

c) [1 punto] Calcular los dos límites laterales en $x = -6$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor

a) Se trata de una Función Racional, por lo tanto el dominio de la función existirá en todo R exceptuando los valores que anulan el denominador.

$$4x^2 + 4x - 120 = 0 \rightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{16+1920}}{8} = \begin{matrix} -6 \\ 5 \end{matrix}$$

D(f) = $\forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-6,5\}$

b) Estudiamos la continuidad en los puntos x = -6 y x= 5

Continuidad en x = -6

$$\lim_{x\rightarrow -6} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \frac{-33}{0} \left[\frac{k}{0}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to -6^-} f(x) = \frac{-}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -6^+} f(x) = \frac{-}{0^-} = +\infty$$

Como los límites laterales tienden a valores infinitos, tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito (Asíntota Vertical)

<u>Continuidad en x = 5</u>

$$\lim_{x \to 5} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \lim_{x \to 5} \frac{3(x-5)}{4(x-5)(x+6)} = \frac{3}{44}$$

Como $\exists \lim_{x \to 5} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120}$ y $\nexists$ f(5) → tendremos una Discontinuidad Evitable en x=5

Sólo podremos evitar la Discontinuidad Evitable.

Se puede redefinir, para evitar la discontinuidad evitable en x = 5, de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{\frac{3x-15}{4x^2+4x-120}}, & \text{si } x \neq 5 \\ \frac{3}{44}, & si\ x = 5 \end{cases}$$

c) $\lim_{x \to -6} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \frac{-33}{0} \left[\frac{k}{0}\right]$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to -6^-} f(x) = \frac{-}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -6^+} f(x) = \frac{-}{0^-} = +\infty$$

Como los límites laterales tienden a valores infinitos, tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito (Asíntota Vertical)

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS] A. [1,25 PUNTOS] Dada la función f(x) = $\frac{3x^2}{(x+4)^2}$

a) [0,25 PUNTOS] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY

b) [0,5 PUNTOS] Las asíntotas

c) [0,75 PUNTOS] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

d) [0,75 PUNTOS] Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

e) [0,25 PUNTOS] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

a) Calculamos el dominio de la función:

Como se trata de una función racional, la función será discontinua en los puntos que anula el denominador.

$$(x+4)^2 = 0 \rightarrow x = -4$$

D(f) = $\forall x \in \mathbb{R} - \{-4\}$

Corte con el eje OX (y=0) $\frac{3x^2}{(x+4)^2} = 0 \rightarrow 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ (0,0)

Corte con el eje OY (x=0) f(0)= $\frac{3 \cdot 0^2}{(0+4)^2} = 0$ (0,0)

b) **<u>Asíntotas Verticales</u>**: Para su estudio debemos estudiar los puntos donde la función no existe, en nuestro caso en x = -4

$\lim_{x \to -4} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = \frac{48}{0} \rightarrow Indterminación\ del\ tipo\ \left[\frac{k}{0}\right]$

Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x \to -4^-} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = \frac{+}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to -4^+} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = \frac{+}{0^+} = +\infty$ Tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito en x=-4

Tendremos una Asíntota Vertical en x = -4

<u>Asíntota Horizontal:</u> Como grado del numerador es igual que el grado del denominador, tendremos una A.Horizontal.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2+8x+16} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2+8x+16} = \frac{3}{1} = 3$$

Tendremos una Asíntota Horizontal en y = 3

c) Crecimiento y Decrecimiento

Calculamos la derivada de la función:

f´(x) = $\frac{6x\cdot(x+4)^2-2\cdot(x+4)\cdot 1\cdot(3x^2)}{(x+4)^4} = Sacamos\ factor\ común\ \frac{(x+4)\cdot[6x\cdot(x+4)-6x^2]}{(x+4)^4} = \frac{24x}{(x+4)^3}$

f´(x) = 0 → $\frac{24x}{(x+4)^3} = 0 \rightarrow x = 0$ (Posible extremo relativo en x=0)

	$(-\infty,-4)$	$(-4,0)$	$(0,\infty)$
Signo de f´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↗

Crecimiento: $(-\infty,-4) \cup (0,\infty)$

Decrecimiento: (-4,0)

Máximo: No hay, podréis pensar que en x = -4 pudiera haber un máximo pero en ese punto la función no existe

Mínimo: (0,0)

d) Concavidad y Convexidad

Calculamos la segunda derivada de la función:

f´´(x) = $\frac{24\cdot(x+4)^3-3\cdot(x+4)^2\cdot 1\cdot(24x)}{(x+4)^6}$ =$sacamos\ factor\ común = \frac{(x+4)^2[24\cdot(x+4)-72x]}{(x+4)^6} = \frac{24x+96-72x}{(x+4)^4} = \frac{-48x+96}{(x+4)^4}$

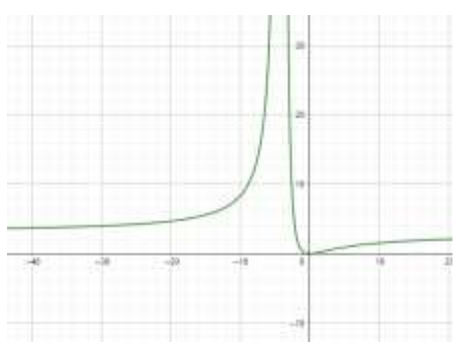
f´´(x) = 0 → $\frac{-48x+96}{(x+4)^4} = 0$ → -48x + 96 = 0 → x = $\frac{96}{48} = 2$ (posible punto de Inflexión)

	$(-\infty,-4)$	$(-4,2)$	$(2,\infty)$
Signo de f´(x)	+	+	-
Comportamiento de f(x)	U	U	∩

Cóncava hacia arriba: (-∞, $-4) \cup (-4,2)$

Cóncava hacia abajo (Convexa) : (2,∞)

Punto de Inflexión: $\left(2,\frac{1}{3}\right)$



Ejercicio 5 **[2,5 PUNTOS]**

Se realiza una encuesta a un grupo de 2000 personas de diferentes edades para conocer sus hábitos de compra por Internet en el último mes. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	18-40 años	**41-60 años**	**Mayores de 60 años**	**Total**
Ha realizado alguna compra por Internet	468	325	250	1043
No ha comprado ningún producto por Internet	257	207	493	957
Total	725	532	743	2000

Elegida una de las personas del grupo al azar:

A. [0,75 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que sea mayor de 60 años y haya realizado alguna compra por Internet en el último mes.

B. [0,75 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 41 y 60 años.

C. [1 PUNTO] Si sabemos que ha realizado alguna compra por Internet en el último mes, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 40 años?

Se designan por:

>60 = "Mayores de 60 años" 41-60= "Edades entre 41 y 60 años" 18-40 = "Edades entre 18 y 40 años"

C= "Compra por Internet" $\bar{C}$= "No compra por Internet"

a) Se trata de una probabilidad Compuesta: $P(>60 \cap C) = \frac{250}{2000} = \frac{1}{8} = 0{,}125$ → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 12,5%

b) Se trata de una probabilidad Total: $P(41\text{-}60) = \frac{532}{2000} = \frac{133}{500} = 0{,}266$

c) Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes → $P(18\text{-}40/C) = \frac{P(18-40 \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{468}{2000}}{\frac{1043}{2000}} = \frac{468}{1043} = 0{,}4487$ → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 44,87%

Ejercicio 6 **[2,5 PUNTOS]**

[1,25 PUNTOS] El tiempo que los usuarios de una compañía de telefonía móvil deben esperar para que les atiendan en el Servicio de Atención al Cliente, sigue una distribución normal con desviación típica de 2 minutos. Una muestra aleatoria de 450 personas da como resultado un tiempo medio de espera de 14 minutos.

a) [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 93% para el tiempo medio.

b) [1,25 PUNTOS]¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90% sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

a) Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo que los usuarios de una compañía de Telefonía móvil deben esperar para que les atiendan en el Servicio de Atención al Cliente, donde X ~ N(μ, 2).

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 450 personas
$\bar{x} = 14$ minutos
$\sigma = 2$ minutos

Para una confianza del 93%, Nivel de confianza = 1- α = 0,93 → α = 0,07

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,965 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,035}$= 1,81

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,93}(\mu) = \left(14 - 1,81\frac{2}{\sqrt{450}};\ 14 + 1,81\frac{2}{\sqrt{450}}\right) = (13,829; 14,171)$$

b) Para una confianza del 90%, Nivel de confianza = 1- α = 0,90 → α = 0,1

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,95 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,05}$= 1,645

Calculamos el Error cometido en el apartado a)

E= $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,81 \cdot \frac{2}{\sqrt{450}}$

El enunciado nos pide que el error sea un tercio del apartado anterior $\frac{1}{3} \cdot 1,81 \cdot \frac{2}{\sqrt{450}}$ = 0,0569

E= $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0,0569 \to n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 \to n > \left(\frac{1,645 \cdot 2}{0,0569}\right)^2 \to n > 3343,23$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **3344 personas**