Ejercicio 1 [2,5 puntos]

Para poder llevar a cabo la última obra que le han encargado, una empresa de construcción necesita adquirir 400 kg de cemento, I50 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. Antes de hacer la compra del material consulta precios en dos suministradores, A y B. El suministrador A le ofrece un precio de venta total de 9800 €. El suministrador B, que está en liquidación, le ofrece importantes descuentos. En concreto, baja el precio del cemento a la mitad del que le ofrece el suministrador A, el del ladrillo a una tercera parte y el del azulejo a una cuarta parte, lo que supone un ahorro de 6400 € con respecto al precio total de venta ofrecido por el suministrador A. Se sabe, además, para el suministrador A, que el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos.

A. [l PUNTO] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (en €/kg) del cemento, el ladrillo y el azulejo en el suministrador A.

B. [1,5 PUNTOS) Resuélvalo.

A. x: Precio del kg de cemento
y: Precio del kg de ladrillos
z: precio del kg de azulejos

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{400x + 150y + 120z = 9800} \\ \mathbf{400 \cdot \frac{x}{2} + 150 \cdot \frac{y}{3} + 120 \cdot \frac{z}{4} = 3400} \\ \mathbf{z = 2(y + x)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{40x + 15y + 12z = 980} \\ \mathbf{20x + 5y + 3z = 340} \\ \mathbf{2x + 2y - z = 0} \end{cases}$$

B. Resolvemos el sistema de Ecuaciones

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 40 & 15 & 12 & 980 \\ 20 & 5 & 3 & 340 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 10F_1]{F_2 \to F_2 - 20F_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -25 & 32 & 980 \\ 0 & -15 & 13 & 340 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to 3F_3 - 5F_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -25 & 32 & 980 \\ 0 & 0 & 31 & 1240 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \\ z = 40 \end{cases}$$

El precio del kg de cemento es de 8€/kg.

El precio del kg de ladrillos es de 12€/kg.

El precio del kg de azulejos es de 40€/kg

Ejercicio 2 [2,5 puntos]

Con el objetivo de maximizar beneficios, un obrador cántabro amplía su producción diaria máxima hasta las 400 tartas de queso y 900 quesadas, con las que elabora dos tipos de pack, A y B. El pack A contiene 4 tartas de queso y 12 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 44 €. El pack B contiene 2 tartas de queso y 3 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 16 €.

A.(0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. (l PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C.[0,5 PUNTOS] ¿Cuántos packs de cada tipo debe producir el obrador en un día para que el beneficio obtenido sea máximo?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

A. Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: x → número de Packs tipo A

y → número de Packs tipo B

	Cantidad	Tartas de Queso	Quesadas
Packs tipo A	**x**	**4x**	**12x**
Packs tipo B	**y**	**2y**	**3y**
	x+y	4x+2y	12x+3y

El objetivo es maximizar los beneficios B(x,y) = 44x+16y

Restricciones:

$$\begin{cases} 4x + 2y \leq 400 \\ 12x + 3y \leq 900 \\ \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 200 \\ 4x + y \leq 300 \\ \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

B.

C y D. Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ → A(0,0) → B_A= 44·0 + 16·0 = 0€

B$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 200 \end{cases}$ → $B(0, 200)$ → B_B= 44·0 + 16·200 = 3200€

C$\begin{cases} 2x + y = 200 \\ 4x + y = 300 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 50 \\ y = 100 \end{cases}$ → $C(50,100)$ → B_C= 44·50 + 16·100 = 3800€

D$\begin{cases} y = 0 \\ 4x + y = 300 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 75 \\ y = 0 \end{cases}$ → D(75,0) → B_D= 44·75 +16· 0= 3300€

Para obtener los máximos Beneficios se deben producir 50 packs del Producto A y 100 packs Producto B, siendo el beneficio de 3800€.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS] **. Dada la función f(x) = $\frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8}$**

a) [1 punto] ¿En qué puntos es discontinua f? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?

b) [0,25 puntos] ¿Se puede definir f para evitar alguna de estas discontinuidades? Justifica la respuesta.

c) [0,75 puntos] ¿Cuáles son las asíntotas de f?

d) [0,5 puntos] Esboce la gráfica de f, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY.

a) Se trata de una Función Racional, por lo tanto el dominio de la función existirá en todo R exceptuando los valores que anulan el denominador.

$x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2} = \begin{matrix} -4 \\ 2 \end{matrix}$ D(f) = $\forall x \epsilon \mathbb{R} - \{-4,2\}$

b) Estudiamos la continuidad en los puntos x = -4 y x = 2

Continuidad en x = 2

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \frac{-12}{0} \left[\frac{k}{0}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{-}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

Como los límites laterales tienden a valores infinitos, tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito (Asíntota Vertical) en x =2

Continuidad en x = -4

$$\lim_{x\to -4} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \left[\frac{0}{0}\right] \qquad \lim_{x\to -4} \frac{2(x+4)(x-3)}{(x+4)(x-2)} = \lim_{x\to -4} \frac{2(x-3)}{(x-2)} = \frac{7}{3}$$

Como $\exists \lim_{x\to -4} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8}$ y $\nexists$ f(-4) → tendremos una Discontinuidad Evitable en x = -4

Sólo podremos evitar la Discontinuidad Evitable.

Se puede redefinir, para evitar la discontinuidad evitable en x = -4, de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8}, \ \text{si x} \neq -4 \\ \frac{7}{3}, si\ x = -4 \end{cases}$$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \frac{-12}{0} \left[\frac{k}{0}\right]$

Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \frac{-}{0^-} = +\infty$ Asíntota Vertical en x = 2

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \frac{-}{0^+} = -\infty$

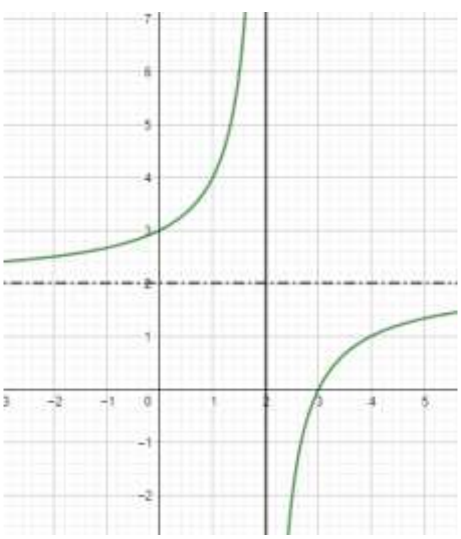
Como los límites laterales tienden a valores infinitos, tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito (Asíntota Vertical)

Como el Grado del Numerador = Grado del Denominador → Asíntota Horizontal

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = 2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = 2 \end{cases}$$

Tenemos una Asíntota Horizontal en y = 2

Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} \text{Con el eje OX} \to (3{,}0)\, y\ \cancel{(-4{,}0)} \text{ ya que el punto x} = -4 \text{ no está en el dominio} \\ \text{Con el eje OY} \to (0{,}3) \end{cases}$



Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Un autónomo del sector del transporte ha determinado que los costes mensuales de su empresa responden a una función C(v), donde v representa el número de vehículos movilizados. Se sabe que la empresa dispone de un total de 36 vehículos y que los costes ascienden a 5000 € si no se moviliza ningún vehículo. Se sabe, además, que C'(v)= v^2- 32v+ 112 es la derivada de C(v).

A. [1,25 PUNTOS) ¿Cuántos vehículos han de movilizarse para minimizar costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?

B.(1,25 PUNTOS] ¿Para qué número de vehículos movilizados serian máximos los costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?

a) C'(v)= v^2- 32v+ 112

C(v) = $\int (v^2 - 32v + 112)\, dv = \frac{v^3}{3} - 32\frac{v^2}{2} + 112v + C$

Nos dan la siguiente condición: C(0)= 5000

C(0) = $\frac{0^3}{3} - 32\frac{0^2}{2} + 112 \cdot 0 + C = 5000 \rightarrow C = 5000$

C(v) = $\frac{v^3}{3} - 32\frac{v^2}{2} + 112v + 5000$ → Función Objetivo

C'(v)= v^2- 32v+ 112 = 0 → $\begin{cases} V_1 = 4 \\ V_2 = 28 \end{cases}$ Posibles Extremos Relativos

	(0,4)	(4,28)	(28, ∞)
Signo de f´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↗

- Tendremos un máximo en x = 4
- Tendremos un mínimo en x = 28

Para maximizar costes se deben movilizar 4 coches siendo el coste de:

X= 4 → C(4) = $\frac{4^3}{3} - 32\frac{4^2}{2} + 112 \cdot 4 + 5000 = 5213{,}33€$

Para minimizar costes se deben movilizar 28 coches siendo el coste de:

X= 28 → C(28) = $\frac{28^3}{3} - 32\frac{28^2}{2} + 112 \cdot 28 + 5000 = 2909{,}33€$

Ejercicio 5 **[2,5 PUNTOS]**

Un agricultor valenciano ha determinado que el peso de sus naranjas sigue una distribución normal con desviación típica de 15 gramos. De una muestra de 100 naranjas escogidas al azar se calcula un peso medio por naranjas de 210 gramos.

A.(1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 93 % para el peso medio de una naranja.
B.[1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de naranjas que habría que considerar para que el error cometido estimar el peso medio por naranja, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 2 gramos?

a) Sea X la variable aleatoria que mide el peso de sus naranjas, donde X ~ N(μ, 15).

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 100 naranjas
$\bar{x} = 210$ gr
$\sigma = 15$ gr

Para una confianza del 93%, Nivel de confianza = 1- α = 0,93 → α = 0,07

$P(Z \leq Z_{\propto/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}965 \rightarrow$ por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0{,}035} = 1{,}81$

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0{,}93}(\mu) = \left(210 - 1{,}81\frac{15}{\sqrt{100}};\ 210 + 1{,}81\frac{15}{\sqrt{100}}\right) = (207{,}285; 212{,}715)$$

b) Para una confianza del 97%, Nivel de confianza = 1- α = 0,97 → α = 0,03

$P(Z \leq Z_{\propto/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}985 \rightarrow$ por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0{,}015} = 2{,}17$

E = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2 \rightarrow n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 \rightarrow n > \left(\frac{2{,}17 \cdot 15}{2}\right)^2 \rightarrow n > 264{,}87$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **265 naranjas**

<u>Ejercicio 6</u> [2,5 PUNTOS]

En una cierta ciudad el 35 % del censo vota al partido A, el 45 % al partido B y el 20 % restante se abstiene. Se sabe, además, que el 20 % de los votantes del partido A, el 30 % de los del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Si se escoge al azar un ciudadano censado:

A. [0,5 PUNTOS) ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?

B.[0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido A y sea mayor de 60 años?

C.[0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?

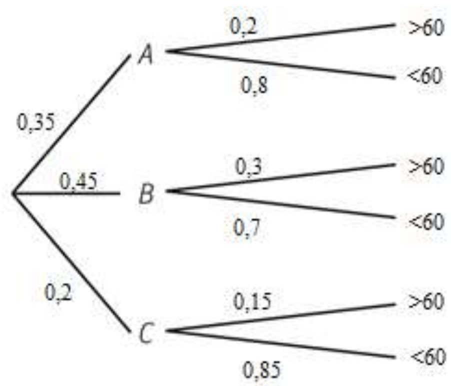
D. (0,75 PUNTOS] Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

Se designan por:

A = " votan al partido A "   B = " votan al partido B "   C = " Se abstienen "

>60 = "Mayores de 60 años"   <60 = "Menores de 60 años"

Diagrama de árbol



a) Se trata de una probabilidad Compuesta: P($B \cap < 60$) = P(B)·P(<60/B)= 0,45· 0,7= 0,315 → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 31,5%

b) Se trata de una probabilidad Compuesta: P($A \cap > 60$) = P(A)·P(>60/A)= 0,35· 0,2= 0,07 → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 7%

c) Se trata de una probabilidad total:

P(>60) = P(A)·P(>60/A)+ P(B)·P(>60/B)+ P(C)·P(>60/C) = 0,35·0,2 + 0,45·0,3 + 0,2·0,15 = 0,235

d) Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes → P (C/>60) = $\frac{P(C\cap>60)}{P(>60)} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{47}{200}} = 0{,}1277$ → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 12,77%