

1) Sea la matriz A : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Calcula A^n
b) Calcula $A^{20} - I + 2 \cdot A^5$

a) Calcula A^n

- 1º Calculamos las primeras potencias de A:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2º Viendo los resultados calculamos la matriz enésima.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3º Comprobamos el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcula $A^{20} - I + 2 \cdot A^5$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{20} - I + 2 \cdot A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 30 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Siendo A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Halla A^n para cada número natural n.
b) Calcular $A^{22} - 12 \cdot A^2 + 2A$

a) Halla A^n para cada número natural n.

- 1º : Calculamos las primeras potencias de A:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2º Viendo los resultados calculamos la matriz enésima.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3º Comprobamos el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1) \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos $A^{22} - 12 \cdot A^2 + 2A$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{22} - 12 \cdot A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = -9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -9 \cdot I$$

3) Siendo A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Halla A^n para cada número natural n.
- Calcular A^{49}

a) Halla A^n para cada número natural n.

- 1º : Calculamos las primeras potencias de A:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/7 & 4/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2º Viendo los resultados calculamos la matriz enésima.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3º Comprobamos el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)/7 & (n+1)/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos A^{49}

$$A^{49} = \begin{pmatrix} 1 & 49/7 & 49/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Consideramos las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Determina los valores de x e y para que se cumpla la siguiente igualdad $A \cdot B = B \cdot A$
 b) Halla A^{2005} y A^{2006}

- a) Determina los valores de x e y para que se cumpla la siguiente igualdad $A \cdot B = B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \text{ Igualamos las matrices } \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

- b) Halla A^{2005} y A^{2006}

- 1º : Calculamos las primeras potencias de A:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

- 2º Viendo los resultados calculamos la matriz enésima.

$$A^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ es par} \\ A & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Calculamos $A^{2006} = I$ (ya que 2006 es par) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos $A^{2005} = A$ (ya que 2005 es impar) = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) Calcula A^n para todo valor de n entero positivo, siendo A la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculamos A^n

- 1º : Calculamos las primeras potencias de A :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2º Viendo los resultados calculamos la matriz enésima.

$$A^n = \begin{cases} A & \text{si } n = 1 \\ A^2 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

6) Calcula A^n de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- 1º : Calculamos las primeras potencias de A :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

- 2º Viendo los resultados calculamos la matriz enésima.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

- 3º Comprobamos el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+n & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

7) Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Se pide:

- Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 + I = 0$, siendo I la matriz unidad y 0 la matriz nula.
- Calcula A^{10}

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 + I = 0$

- 1º : Calculamos las primeras potencias de A:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$A^3 + I = 0 \rightarrow -I + I = 0$ vemos que se verifica la igualdad.

$$b) A^{10} = A^9 \cdot A = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio propuesto

- 1) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
- a) Calcular $A^n \rightarrow$ Solución: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$
- b) Calcular $A^{350} - A^{250} \rightarrow$ Solución: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$