Ejercicio 1 [2,5 puntos]

En un día de playa y bajo un sol radiante Fabiola se acerca al chiringuito y compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando un total de 20 €. Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5 €. Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2 €, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales.

A. [1,25 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (sin descuento) de un helado, un granizado y una horchata.

B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

A. x: Precio expresado en euros sin descuento de un helado

y: Precio expresado en euros sin descuento de un granizado

z: Precio expresado en euros sin descuento de una horchata

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{4x + 2y + 3z = 20} \\ \mathbf{x + z = 5} \\ \mathbf{\frac{50}{100}x + \frac{50}{100}y = 2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{4x + 2y + 3z = 20} \\ \mathbf{x + z = 5} \\ \mathbf{x + y = 4} \end{cases}$$

B. Resolvemos el sistema de Ecuaciones

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 20 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to 4F_3 - 10F_1]{F_2 \to 4F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

El precio sin descuento de un helado es de 3€.

El precio sin descuento de un granizado es de 1€.

El precio sin descuento de una horchata es de 2€.

Ejercicio 2 [2,5 puntos]

Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio neto de 350 €, y por cada frisona uno de 500 €. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

A. Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: x → número de vacas de raza parda

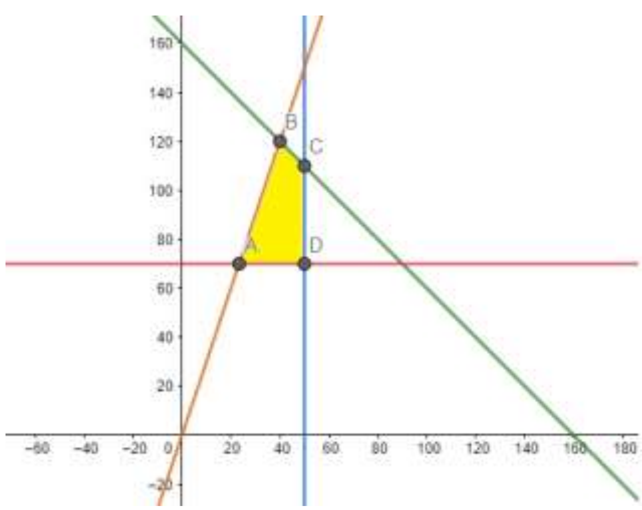
y → número de vacas de raza frisona

El objetivo es maximizar los beneficios B(x,y) = 350x + 500y

Restricciones:

$$\begin{cases} x+y\le 160 \\ x\le 50 \\ y\ge 70 \\ x\ge \frac{1}{3}y \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y\le 160 \\ x\le 50 \\ y\ge 70 \\ y\le 3x \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

B.



C y D. Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los beneficios máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} y = 70 \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow A(70/3,70) \rightarrow B_A = 350 \cdot 70/3 + 500 \cdot 70 = 43.166{,}67€$

B$\begin{cases} x + y = 160 \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow B(40, 120) \rightarrow B_B = 350 \cdot 40 + 500 \cdot 120 = 74.000€$

C$\begin{cases} x = 50 \\ x + y = 160 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 110 \end{cases} \rightarrow C(50,110) \rightarrow B_C = 350 \cdot 50 + 500 \cdot 110 = 72.500€$

D$\begin{cases} x = 50 \\ y = 70 \end{cases} \rightarrow D(50,70) \rightarrow B_D = 350 \cdot 50 + 500 \cdot 70 = 52.500€$

Para obtener los máximos Beneficios se deben comprar 40 vacas tipo parda y 120 vacas tipo frisona, siendo el beneficio de 74.000€.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dadas las funciones f(x) = -x^2-2x+8 y g(x) = 2x^2-2x-4

A. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?

C. [0,5 PUNTOS] Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre f y g.

D. [1 PUNTO] Calcule el área de la región que queda encerrada entre las funciones f y g.

a) Calculamos el dominio de la funciones:

D(f) = $\forall x \epsilon \mathbb{R}$ D(g) = $\forall x \epsilon \mathbb{R}$

Monotonía

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

f(x) = $-x^2 - 2x + 8$

f´(x) = 0→ f´(x) = $-2x - 2 = 0$ → $\{x = -1$

	(-∞, -1)	($-1, \infty$)
Signo de f´(x)	+	-
Comportamiento de f(x)	↗	↘

- Crecimiento: ($-\infty, -1$)
- Decrecimiento: (-1,∞)
- Mínimo : No hay
- Máximo en x= -1 → (-1, 9)

g(x) = $2x^2 - 2x - 4$

g´(x) = 0→ g´(x) = $4x - 2 = 0$ → $\{x = 1/2$

	(-∞, $1/2$)	($1/2, \infty$)
Signo de f´(x)	-	+
Comportamiento de f(x)	↘	↗

- Crecimiento: ($1/2, \infty$)
- Decrecimiento: (-∞, $1/2$)
- Mínimo en x = 1/2 → (1/2, -9/2)
- Máximo: No hay

b) f (x) → $\begin{cases} \text{Mínimo : No hay} \\ \text{Máximo en x} = -1 \rightarrow (-1{,}9) \end{cases}$

g (x) → $\begin{cases} \text{Mínimo en x} = 1/2 \rightarrow (1/2, -9/2) \\ \text{Máximo: No hay} \end{cases}$

c) Puntos de corte con los ejes

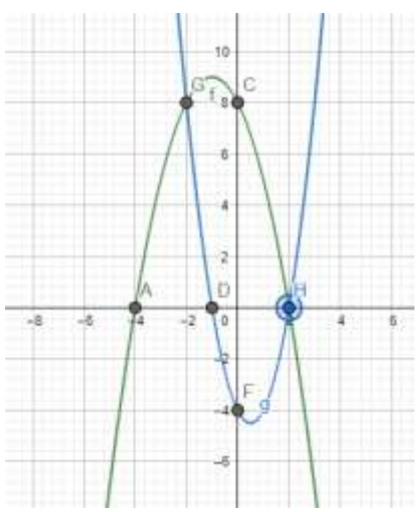
- Función f (x)
  - Con el eje X : f(x) = 0 → $-x^2 - 2x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -4 \rightarrow A(-4{,}0) \\ x = 2 \rightarrow B(2{,}0) \end{cases}$
  - Con el eje Y: x=0 → f(0) = 8 → $C\ (0{,}8)$
- Función g (x)
  - Con el eje X : g(x) = 0 → $2x^2 - 2x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow D(-1{,}0) \\ x = 2 \rightarrow E(2{,}0) \end{cases}$
  - Con el eje Y: x=0 → g(0) = -4 → $F(0, -4)$

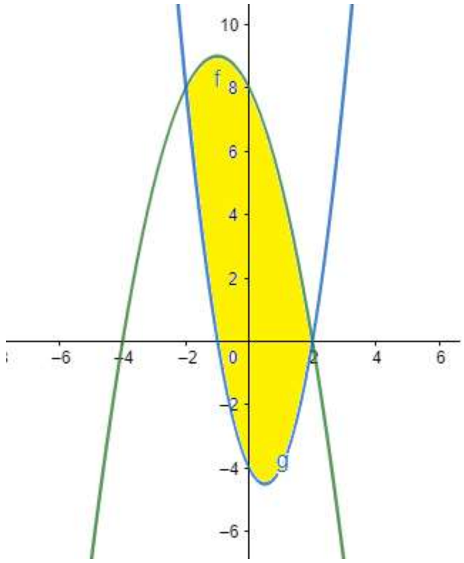
Puntos de Corte de ambas funciones:

Igualamos ambas funciones: f (x) = g(x) → $-x^2 - 2x + 8 = 2x^2 - 2x - 4 \rightarrow -3x^2 + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

f(-2) = $-(-2)^2 - 2(-2) + 8 = 8 \rightarrow G(-2{,}8)$

f(2) = $-(2)^2 - 2(2) + 8 = 0 \rightarrow H(2{,}0)$





D) Calculamos el área

A = $\int_{-2}^{2}(f(x) - g(x)dx = \int_{-2}^{2}(-3x^2 + 12)dx = \left[\frac{-3x^3}{3} + 12x\right]_{-2}^{2}$

A = $[-x^3 + 12x]_{-2}^{2} = \big((-8 + 24) - (8 - 24)\big) = 16 + 16 = 32u^2$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Se sabe que la evolución del precio del oro en el mercado (P, expresado en €/kg) a lo largo de un mes de 31 días viene dado por la siguiente función: P(d) = $\frac{1}{3}d^3 - 15d^2 + 144d + 1500$, con $1 \leq d \leq 31$ donde d indica el día del mes.

A. [1 PUNTO] ¿Qué día del mes habría que vender el oro para obtener la máxima ganancia? ¿A cuánto ascendería dicha ganancia si se vendiesen 4 kg de oro?

B. [1 PUNTO] ¿Qué día del mes es el peor para vender oro? ¿Cuál sería la ganancia si se vendiesen los 4 kg de oro ese día?

C. [0,5 PUNTOS] Si se viese obligado a vender 1 kg de oro entre los días 20 y 31 del mes y quisiera obtener la máxima ganancia, ¿en qué día lo haría? ¿Cuánto ganaría con la venta?

Se trata de un ejercicio de Optimización.

Sea d→ día del mes

Función Objetivo → Beneficio → P(d) = $\frac{1}{3}d^3 - 15d^2 + 144d + 1500$

- Derivamos la función objetivo y lo igualamos a cero:

  P´(d) = $d^2 - 30d + 144d = 0 \rightarrow \begin{cases} d = 6 \\ d = 24 \end{cases}$

- Vamos a comprobar que se trata de un máximo o un mínimo:

  B´´(x) = 2d -30

  B´´(6)= $2 \cdot 6 - 30 = -18 < 0$ → por lo tanto tendremos un máximo

  B´´(24)= $2 \cdot 24 - 30 = 18 > 0$ → por lo tanto tendremos un mínimo

a) El mejor día para vender oro y obtener la máxima ganancia es el 6 día del mes. La ganancia para este sexto día es :

   P(6) = $\frac{1}{3} \cdot 6^3 - 15 \cdot 6^2 + 144 \cdot 6 + 1500 = 1896€/\text{kg}$

   Como nos piden para 4kg: 4· 1896 = 7584€

b) El peor día para vender oro y obtener la mínima ganancia es el día 24 del mes. La ganancia para este 24 día es :

   P(24) = $\frac{1}{3} \cdot 24^3 - 15 \cdot 24^2 + 144 \cdot 24 + 1500 = 924€/\text{kg}$

   Como nos piden para 4kg: 4· 924 = 3696€

c) Observamos que:

   Del [20,24] la función decrecerá hasta alcanzar el mínimo en el día 24

Del [24,30] la función crecerá hasta alcanzar nuevamente un máximo en el día 6, a partir de ese momento la función volverá a decrecer.

Calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo y en uno de ellos estará el máximo. Aunque según lo que hemos comentado anteriormente, el máximo estará en el día 31.

P(20) = $\frac{1}{3} \cdot 20^3 - 15 \cdot 20^2 + 144 \cdot 20 + 1500 = 1046{,}67€/\text{kg}$

P(24) = $\frac{1}{3} \cdot 24^3 - 15 \cdot 24^2 + 144 \cdot 24 + 1500 = 924€/\text{kg}$

P(31) = $\frac{1}{3} \cdot 31^3 - 15 \cdot 31^2 + 144 \cdot 31 + 1500 = 1479{,}34€/\text{kg}$

Debería venderlo el día 31, siendo la ganancia de 1479,34 €/kg

Ejercicio 5 **[2,5 PUNTOS]**

El 65 % de los clientes de un cierto supermercado compra leche de origen animal, el 25 % compra leche de origen vegetal y el 10 % restante no compra leche de ningún tipo. Además, el 20 % de los que compran leche de origen animal, el 70 % de los que compran leche de origen vegetal y el 10 % de los que no compran leche de ningún tipo compran también galletas de soja. Si se escoge al azar un cliente del supermercado:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen animal y galletas de soja?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal y no compre galletas de soja?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre galletas de soja?

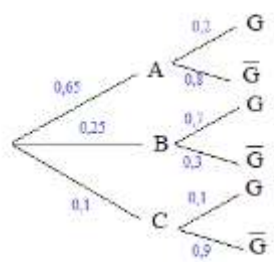
D. [0,75 PUNTOS] Si no compra galletas de soja, ¿cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal?

Se designan por

A = “compra leche de origen animal” B = “compra leche de origen vegetal “ C = “no compra leche”

G = “compran galletas de soja ” $\overline{G}$ = “No compran galletas de soja”

Diagrama de árbol



a) Se trata de una probabilidad Compuesta:

   $P(A \cap G) = P(A) \cdot P(G/A) = 0,65 \cdot 0,2 = 0,13$ → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 13%

b) Se trata de una probabilidad Compuesta:

   $P(B \cap \bar{G}) = P(B) \cdot P(\bar{G}/B) = 0,25 \cdot 0,3 = 0,075$ → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 7,5%

c) Se trata de una Probabilidad Total

   $P(G) = P(A) \cdot P(G/A) + P(B) \cdot P(G/B) + P(C) \cdot P(G/C) = 0,65 \cdot 0,2 + 0,25 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,315$

   $P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0,315 = 0,685$

d) Se trata de una Probabilidad Condicionada

   Aplicamos el Teorema de Bayes → $P(B/\overline{G}) = \frac{P(B \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{0,25 \cdot 0,3}{0,685} = 0,1095$ → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 10,95%

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

La enóloga de una bodega ha determinado que el porcentaje de alcohol presente en sus botellas de vino sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,53 %. Una muestra de 120 botellas, escogidas al azar, arroja un valor promedio para el porcentaje de alcohol por botella de 12,05 %.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de alcohol por botella.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de botellas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de alcohol por botella, con un nivel de confianza del 97,5 %, fuese de 0,1 %?

a) Sea X la variable aleatoria que mide el porcentaje de alcohol presente en las botellas de vino de una determinada bodega, donde X ~ N(μ; 0,53).

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 120 botellas
$\bar{x} = 12{,}05$
$\sigma = 0{,}53$

Para una confianza del 95%, Nivel de confianza = 1- α = 0,95 → α = 0,05

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,975 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,025}$= 1,96

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1-\alpha$.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,95}(\mu) = \left(12{,}05 - 1{,}96\frac{0{,}53}{\sqrt{120}};\ 12{,}05 + 1{,}96\frac{0{,}53}{\sqrt{120}}\right) = (11{,}9552; 12{,}1448)$$

b) Para una confianza del 97,5%, Nivel de confianza = 1- α = 0,975 → α = 0,025

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,9875 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,0125}$= 2,24

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0{,}1 \to n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{E}\right)^2 \to n > \left(\frac{2{,}24\cdot 0{,}53}{0{,}1}\right)^2 \to n > 140{,}94$$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **141 botellas**