Las ecuaciones matriciales son aquellas en que todos los elementos son matrices.

Para resolver las ecuaciones matriciales debemos despejar la matriz X, teniendo en cuenta las propiedades de la multiplicación de matrices

- La multiplicación entre matrices no admite la propiedad conmutativa. No es lo mismo A·B que B·A:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

- El elemento neutro de las matrices es la matriz identidad, es decir, al multiplicar una matriz por la matriz identidad, el resultado es la misma matriz:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

- Si multiplicamos una matriz por su inversa, por la izquierda o por la derecha, su resultado es la matriz identidad:

$$A \cdot \boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{A^{-1}} \cdot A = I$$

En el caso de las matrices lo que se encuentra multiplicando a la matriz X no pasa al otro miembro de la igualdad dividiendo:

$$X = \cancel{\frac{B}{A}}$$

Los pasos que debes seguir para la resolución de las ecuaciones matriciales son los siguientes:

1) Pasamos todos los elementos que contengan la matriz X a un lado de la igualdad y al otro lado todos aquellos que no la contengan.
2) Multiplicar la matriz que esté al lado de la X por su inversa, por el lado contrario a donde esté situada la matriz X.
3) Multiplicamos el otro miembro por la misma matriz inversa por el mismo lado que se ha multiplicado en el otro miembro.
4) Cuidado Si tenemos varias X, debemos sacar factor común pero teniendo en cuenta donde está colocada la X
    - XA + XB = X(A+B)
    - AX + BX = (A+B)X
5) Sustituir el producto de la matriz por su inversa por la matriz Identidad

$$A^{-1} \cdot A = I \qquad\qquad A \cdot A^{-1} = I$$

6) La matriz identidad multiplicada por la matriz X, es igual a la matriz X.
7) Hallar el valor de la matriz X, realizando la operación de matrices que queda en el miembro contrario.

EJEMPLOS

1) $AX = B$
$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$
$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$
$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

2) $XA = B$
$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$
$X \cdot I = B \cdot A^{-1}$
$\boxed{X = B \cdot A^{-1}}$

3) $AX + B = C$
$AX = C - B$
$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$
$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$
$\boxed{X = A^{-1} \cdot (C - B)}$

4) $AXB = BA$
$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot A \cdot B^{-1}$
$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot B \cdot A \cdot B^{-1}$
$\boxed{X = A^{-1} \cdot B \cdot A \cdot B^{-1}}$

5) $XA + C = XB$
$XA - XB = -C$
$X(A - B) = (-C)$
$X(A - B)(A - B)^{-1} = (-C)(A - B)^{-1}$
$X \cdot I = (-C)(A - B)^{-1}$
$\boxed{X = (-C)(A - B)^{-1}}$

6) $AXA^t = A$
$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^t \cdot (A^t)^{-1} = A^{-1} \cdot A \cdot (A^t)^{-1}$
$I \cdot X \cdot I = I \cdot (A^t)^{-1}$
$\boxed{X = (A^t)^{-1}}$

7) $AX - X = B$
$(A - I)X = B$
$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1} \cdot B$
$I \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B$
$\boxed{X = (A - I)^{-1} \cdot B}$

8) $AXB = C$
$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$
$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$
$\boxed{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}$

9) $BXB = B(X+A)$ (EBAU Junio 2019)
$B^{-1} \cdot BXB = B^{-1} \cdot B \cdot (X+A)$
$I \cdot XB = I \cdot (X+A)$
$XB = (X+A)$
$XB - XI = A$
$X(B-I) = A$
$X(B - I) \cdot (B - I)^{-1} = A \cdot (B - I)^{-1}$
$X \cdot I = A \cdot (B - I)^{-1}$
$\boxed{X = A \cdot (B - I)^{-1}}$

10) $A^{-1}XB + C = I$ (EBAU Septiembre 2018)
$A^{-1}XB = I - C$
$A \cdot A^{-1}XB \cdot B^{-1} = A \cdot (I - C) \cdot B^{-1}$
$I \cdot X \cdot I = A \cdot (I - C) \cdot B^{-1}$
$\boxed{X = A \cdot (I - C) \cdot B^{-1}}$

11) $(A + X)B = C$ (EBAU Septiembre 2017)
$(A + X)B \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1}$
$(A+X) \cdot I = C \cdot B^{-1}$
$(A+X) = C \cdot B^{-1}$
$\boxed{X = C \cdot B^{-1} - A}$

12) $B(A^t + X) = C$ (EBAU Junio 2016)
$B^{-1} \cdot B \cdot (A^t + X) = B^{-1} \cdot C$
$I \cdot (A^t + X) = B^{-1} \cdot C$
$(A^t + X) = B^{-1} \cdot C$
$\boxed{X = B^{-1} \cdot C - A^t}$

13) $AXB^{-1} + C = 0$ (EBAU Septiembre 2016)
$AXB^{-1} = (-C)$
$A^{-1} \cdot AXB^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot (-C) \cdot B$
$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot (-C) \cdot B$
$\boxed{X = A^{-1} \cdot (-C) \cdot B}$

14) $AX + BX = -C$ (EBAU Junio 2015)
$(A+B) \cdot X = (-C)$
$(A + B)^{-1}(A+B) \cdot X = (A + B)^{-1} \cdot (-C)$
$I \cdot X = (A + B)^{-1} \cdot (-C)$
$\boxed{X = (A + B)^{-1} \cdot (-C)}$

15) $AX + C = BX$ (EBAU Septiembre 2015)
$AX - BX = -C$
$(A-B) \cdot X = (-C)$
$(A - B)^{-1} \cdot (A-B) \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot (-C)$
$I \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot (-C)$
$\boxed{X = (A - B)^{-1} \cdot (-C)}$

16) $XA+B = CA$ (EBAU Junio 2014)
$XA = CA - B$
$X = (CA - B) \cdot A^{-1}$
$XA \cdot A^{-1} = (CA - B) \cdot A^{-1}$
$X \cdot I = (CA - B) \cdot A^{-1}$
$\boxed{X = (CA - B) \cdot A^{-1}}$

EJERCICIOS

1) (EBAU 2014 Junio) Resuelve la ecuación $XA + B = CA$,

La matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5-a & -2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ con a = –1donde B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Para a = –1, la matriz A tiene inversa, es decir, existe A-1, por lo que podemos despejar X:

   XA+B = CA → XA = CA-B → XA· A^{-1} = (CA-B) · A^{-1} → X = C -B· A^{-1}

2.1 Calculamos la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 10F_3 - 3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -4 & -3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to 6F_1 + F_3]{F_2 \to 2F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -12 & 0 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -12 & -4 & -3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to 5F_1 + 3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & 0 & 0 & 10 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -12 & -4 & -3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to -\frac{1}{12}F_3]{F_1 \to \frac{1}{30}F_1,\ F_2 \to \frac{1}{20}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/4 & -5/6 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -5/6 \end{pmatrix}$$

2.2 Calculamos la matriz inversa de la matriz A mediante determinantes

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t$$

- Calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

- Calculamos los Adjuntos de Z:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -4 & A_{12} = 0 & A_{13} = -4 \\ A_{21} = 0 & A_{22} = -3 & A_{23} = -3 \\ A_{31} = -8 & A_{32} = 6 & A_{33} = 10 \end{array}$$

- Escribimos la matriz adjunta.

Adj(A) = $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -3 \\ -8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & 6 \\ -4 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t \rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & 6 \\ -4 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

3. $X = C - BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{12}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & 6 \\ -4 & -3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & -17/6 \\ 3 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & -17/6 \\ 3 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

2) (EBAU Septiembre 2015) Resolver la ecuación matricial AX + C = BX.

Donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -k \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ con k = 0 y las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculamos la matriz A

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Despejamos la Ecuación Matricial

AX + C = BX → AX-BX = -C → (A-B)X = (-C) → $(A-B)^{-1}$ · (A-B)·X = $(A-B)^{-1}$ · (-C) →
I·X = $(A-B)^{-1}$ · (-C) → X = $(A-B)^{-1}$ · (-C)

3. Calculamos Z= A – B

$Z = A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4.1 Calculamos la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 4F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 14 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 3F_3 - 2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 14 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to 5F_1 - 2F_3]{F_2 \to 10F_2 + 14F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 5 & 0 & -5 & 4 & -6 \\ 0 & -30 & 0 & 30 & -18 & 42 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to 6F_1 + F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & -30 & 0 & 30 & -18 & 42 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to -\frac{1}{10}F_3]{\substack{F_1 \to \frac{1}{30}F_1 \\ F_2 \to -\frac{1}{30}F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/5 & -3/10 \end{array}\right)$$

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ -1 & 3/5 & -7/5 \\ -1/2 & 1/5 & -3/10 \end{pmatrix}$$

4.2 Calculamos la matriz inversa de la matriz Z mediante determinantes

$$Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot \mathrm{Adj}(Z)^t$$

- Calculamos el determinante de Z:

$$|Z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

- Calculamos los Adjuntos de Z:

$$\begin{array}{lll} Z_{11} = 0 & Z_{12} = -10 & Z_{13} = -5 \\ Z_{21} = 2 & Z_{22} = 6 & Z_{23} = 2 \\ Z_{31} = 2 & Z_{32} = -14 & Z_{33} = -3 \end{array}$$

- Escribimos la matriz adjunta.

$$\mathrm{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & -14 & -3 \end{pmatrix} \to \mathrm{Adj}(Z)^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -10 & 6 & -14 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot \mathrm{Adj}(Z)^t \to Z^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -10 & 6 & -14 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

5. $X = (A - B)^{-1} \cdot (-C) = Z^{-1} \cdot (-C) = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -10 & 6 & -14 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3/5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{16/5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{9/10} \end{pmatrix}$$

3) (EBAU Junio 2015) Resolver la ecuación matricial AX + BX = –C.

Consideremos la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **para a = 1 y las matrices** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$**.**

1. Calculamos el valor de la matriz A= $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2. Despejamos la ecuación matricial → $AX + BX = -C \to$

(A+B)X =(-C)→ $(A+B)^{-1} \cdot (A+B) \cdot I = (A+B)^{-1}(-C) \to$ **X=** $\mathbf{(A+B)^{-1}(-C)}$

3. Calculamos la suma de la matriz A y B.

$$Z=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\ 3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

4.1 Calculamos la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_3\to F_3+F_1}{\overset{F_2\to F_2+3F_1}{\rightarrow}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 9 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_3\to 3F_3-2F_2}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 9 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -12 & -3 & -2 & 3\end{array}\right)\underset{F_1\to 4F_1+F_3}{\overset{F_2\to 4F_2+3F_3}{\rightarrow}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-4 & -4 & 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & -12 & 0 & 3 & -2 & 9\\ 0 & 0 & -12 & -3 & -2 & 3\end{array}\right)\overset{F_1\to 3F_1-F_2}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-12 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & -12 & 0 & 3 & -2 & 9\\ 0 & 0 & -12 & -3 & -2 & 3\end{array}\right)\begin{array}{c}F_1\to-\frac{1}{12}F_1\\ F_2\to-\frac{1}{12}F_2\\ \rightarrow\\ F_3\to-\frac{1}{12}F_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/6 & -3/4\\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/6 & -1/4\end{array}\right)$$

$$Z^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/3 & 0\\ -1/4 & 1/6 & -3/4\\ 1/4 & 1/6 & -1/4\end{pmatrix}$$

4.2 Calculamos la matriz inversa de Z mediante determinantes:

$$Z^{-1}=\frac{1}{|Z|}\cdot Adj(Z)^t$$

- Calculamos el determinante de Z:

$$|Z|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 3\\ 3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-9-3=-12$$

- Calculamos los adjuntos de B:

$$\begin{array}{lll}Z_{11}=0 & Z_{12}=3 & Z_{13}=-3\\ Z_{21}=-4 & Z_{22}=-2 & Z_{23}=-2\\ Z_{31}=0 & Z_{32}=9 & Z_{33}=3\end{array}$$

- Escribimos la matriz adjunta.

$$Adj(Z)=\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ -4 & -2 & -2\\ 0 & 9 & 3\end{pmatrix}\rightarrow Adj(Z)^t=\begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ 3 & -2 & 9\\ -3 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$Z^{-1}=\frac{1}{|Z|}\cdot Adj(Z)^t\rightarrow Z^{-1}=\frac{1}{-12}\cdot\begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ 3 & -2 & 9\\ -3 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

5. $X=(A+B)^{-1}(-C)\rightarrow X=\frac{1}{-12}\cdot\begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ 3 & -2 & 9\\ -3 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -4\end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}-4\\ -44\\ -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{11}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

4) **(EBAU Septiembre 2016) Resolver la ecuación matricial $AXB^{-1}+C=O$**

donde $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, y O la matriz de dimensión 3×2 con todos sus elementos nulos.

1. Lo primero es despejar la ecuación matricial.

$AXB^{-1}=-C \rightarrow A^{-1}AXB^{-1}B=A^{-1}(-C)B \rightarrow I\cdot X\cdot I=A^{-1}(-C)B \rightarrow \boldsymbol{X=A^{-1}(-C)B}$

2.1 Calculamos la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}F_2\rightarrow F_2+F_1\\ \rightarrow\\ F_3\rightarrow F_3+4F_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -10 & 0 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\rightarrow\\ F_3\rightarrow F_3-5F_2\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & -1 & -5 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}F_2\rightarrow 5F_2+F_3\\ \rightarrow\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 0 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 5 & -1 & -5 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}F_1\rightarrow 5F_1-F_2\\ \rightarrow\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -10 & 0 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 5 & -1 & -5 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}F_1\rightarrow -\frac{1}{5}F_1\\ F_2\rightarrow -\frac{1}{10}F_2\\ \rightarrow\\ F_3\rightarrow \frac{1}{5}F_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 1/5\\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 0 & -1/10\\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1 & 1/5\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/5 & 0 & 1/5\\ -2/5 & 0 & -1/10\\ -1/5 & -1 & 1/5\end{pmatrix}$$

2.2 Calculamos la matriz inversa de A mediante determinantes:

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot \mathrm{Adj}(A)^t$

- Calculamos el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 4 & -2 & 0\end{vmatrix}=8+2=10$$

- Calculamos los adjuntos de A:

$$\begin{array}{lll}A_{11}=-2 & A_{12}=-4 & A_{13}=-2\\ A_{21}=0 & A_{22}=0 & A_{23}=-10\\ A_{31}=2 & A_{32}=-1 & A_{33}=2\end{array}$$

- Escribimos la matriz adjunta.

$$\text{Adj(A)} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)^t \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $X = A^{-1}(-C)B \rightarrow X = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 1/2 & 13/10 \\ -3 & 12/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6/5 \\ 1/2 & 49/10 \\ -3 & 6/5 \end{pmatrix}$$

5) (EBAU Junio 2016) Resolver la ecuación matricial $B(A^t + X) = C$

donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, **y A^t es la matriz traspuesta de A.**

1. Despejamos la ecuación matricial:

$B(A^t + X) = C \rightarrow B^{-1} \cdot B \cdot (A^t + X) = B^{-1} \cdot C \rightarrow I \cdot (A^t + X) = B^{-1} \cdot C \rightarrow (A^t + X) = B^{-1} \cdot C \rightarrow X = B^{-1} \cdot C - A^t$

2. Calculamos la matriz traspuesta de A.

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.1 Calculamos la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \rightarrow 2F_3 + F_1}{\overset{F_2 \rightarrow 2F_2 - F_1}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{F_3 \rightarrow F_3 - 3F_2}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right) \overset{F_2 \rightarrow 2F_2 + F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_1 \rightarrow \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 \rightarrow \frac{1}{4}F_2 \\ \rightarrow \\ F_3 \rightarrow -\frac{1}{4}F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3.2 Calculamos la matriz inversa de B.

$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot Adj(B)^t$

- Calculamos el determinante de B:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

- Calculamos los Adjuntos de B:

$B_{11} = -2 \quad B_{12} = -2 \quad B_{13} = 4$
$B_{21} = 0 \quad B_{22} = 2 \quad B_{23} = -6$
$B_{31} = 0 \quad B_{32} = -2 \quad B_{33} = 2$

- Escribimos la matriz adjunta.

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(B)^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot Adj(B)^t \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$X=B^{-1} \cdot C - A^t$

4. $X= \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -8 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 5/2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3/2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7/2} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$$

6) (EBAU Septiembre 2017) Resolver la ecuación matricial $(A+X)B=C$ con $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Lo primero es despejar la ecuación matricial.

(A+X)B = C$\rightarrow$ (A+X) = $C \cdot B^{-1} \rightarrow$ **$X = C \cdot B^{-1} - A$**

2.1 Calculamos la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow 3F_3 - F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow 7F_2 - 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & -9 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow 21F_1 + 2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 21 & 0 & 0 & 3 & 18 & -12 \\ 0 & 21 & 0 & -9 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{F_3 \to \frac{1}{7}F_3}{\overset{\substack{F_1 \to \frac{1}{21}F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{21}F_2}}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/7 & 6/7 & -4/7 \\ 0 & 1 & 0 & -3/7 & 3/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & -1/7 & 3/7 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 6/7 & -4/7 \\ -3/7 & 3/7 & -2/7 \\ 1/7 & -1/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

2.2 Calculamos la matriz inversa de B:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \mathrm{Adj}(B)^t$$

- Calculamos el determinante de B:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 2 = 7$$

- Calculamos los adjuntos de B:

$$\begin{array}{lll} B_{11} = 1 & B_{12} = -3 & B_{13} = 1 \\ B_{21} = 6 & B_{22} = 3 & B_{23} = -1 \\ B_{31} = -4 & B_{32} = -2 & B_{33} = 3 \end{array}$$

- Escribimos la matriz adjunta.

$$\mathrm{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}(B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \mathrm{Adj}(B)^t \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. $\mathbf{X = C \cdot B^{-1} - A} \rightarrow$ $X = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}}$$

6) (EBAU Septiembre 2018) Resolver la ecuación matricial $A^{-1}XB + C = Id$.

Consideremos la matriz A= $\begin{pmatrix} a-2 & 0 & -3 \\ -1 & a+3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **para a = 1, y las matrices:**

B = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **C=** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Despejamos X:

$A^{-1}XB + C = Id \rightarrow A^{-1}XB = Id - C \rightarrow A \cdot A^{-1} X \cdot B \cdot B^{-1} = A \cdot (Id - C) \cdot B^{-1} \rightarrow \rightarrow X = A \cdot (Id - C) \cdot B^{-1}$

2. Calculamos Id – C y el resultado lo vamos a llamar matriz Z

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculamos el producto A·Z

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4.1 Calculamos la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \rightarrow F_3 + F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \rightarrow 2F_3 + F_2}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1 \rightarrow 3F_1 - F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_1 \rightarrow -\frac{1}{3}F_1 \\ F_2 \rightarrow \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \rightarrow \frac{1}{6}F_3}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

4.2 Calculamos la matriz inversa de B.

$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \text{Adj}(B)^t$

- Calculamos el determinante de B:

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

- Calculamos los Adjuntos de B:

$B_{11} = 2$ $\quad B_{12} = 0$ $\quad B_{13} = -2$
$B_{21} = -2$ $\quad B_{22} = -3$ $\quad B_{23} = -1$
$B_{31} = -4$ $\quad B_{32} = 0$ $\quad B_{33} = -2$

- Escribimos la matriz adjunta.

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \text{Adj}(B)^t \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

5. $X = A \cdot (\text{Id} - C) \cdot B^{-1} \rightarrow X = \frac{1}{-6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 8 & -11 & -16 \\ -4 & 4 & -10 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -4/3 & 11/6 & 8/3 \\ 2/3 & -2/3 & 5/3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

8) (EBAU Madrid 2015) Resolver la ecuación matricial 6X = B - 3AX, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Despejamos X:

$6X = B - AX \rightarrow 6X + 3AX = B \rightarrow (6I + 3A)X = B \rightarrow (6I + 3A)^{-1}(6I + 3A)X = (6I + 3A)^{-1} \cdot B \rightarrow$

$X = (6I + 3A)^{-1} \cdot B$

2. Calculamos 6I

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Calculamos 3A

$$3\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&0\\3&0&0\end{pmatrix}$$

4. Calculamos la suma 6I + 3A y la matriz resultante la llamaremos Z

$$Z = 6I + 3A = \begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&0\\3&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6&0&3\\0&9&0\\3&0&6\end{pmatrix}$$

5.1 Calculamos la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&0&3&1&0&0\\0&9&0&0&1&0\\3&0&6&0&0&1\end{array}\right)\underset{F_3\to 2F_3-F_1}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&0&3&1&0&0\\0&9&0&0&1&0\\0&0&9&-1&0&2\end{array}\right)\underset{F_1\to 3F_1-F_3}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}18&0&0&4&0&-2\\0&9&0&0&1&0\\0&0&9&-1&0&2\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_1\to\frac{1}{18}F_1\\ F_2\to\frac{1}{9}F_2\\ F_3\to\frac{1}{9}F_3}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2/9&0&-1/9\\0&1&0&0&1/9&0\\0&0&1&-1/9&0&2/9\end{array}\right)$$

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix}2/9&0&-1/9\\0&1/9&0\\-1/9&0&2/9\end{pmatrix}$$

4.2 Calculamos la matriz inversa de Z mediante determinantes:

$$Z^{-1} = \frac{1}{|Z|}\cdot \mathrm{Adj}(Z)^t$$

- Calculamos el determinante de Z:

$$|Z| = \begin{vmatrix}6&0&3\\0&9&0\\3&0&6\end{vmatrix} = 243$$

- Calculamos los Adjuntos de Z:

$$\begin{array}{lll}Z_{11} = 54 & Z_{12} = 0 & Z_{13} = -27\\ Z_{21} = 0 & Z_{22} = 27 & Z_{23} = 0\\ Z_{31} = -27 & Z_{32} = 0 & Z_{33} = 54\end{array}$$

- Escribimos la matriz adjunta.

$$\mathrm{Adj}(Z) = \begin{pmatrix}54&0&-27\\0&27&0\\-27&0&54\end{pmatrix}\rightarrow (\mathrm{Adj}(Z))^t = \begin{pmatrix}54&0&-27\\0&27&0\\-27&0&54\end{pmatrix}$$

$$Z^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot \mathrm{Adj}(B)^t \rightarrow Z^{-1} = \frac{1}{243}\cdot\begin{pmatrix}54&0&-27\\0&27&0\\-27&0&54\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/9&0&-1/9\\0&1/9&0\\-1/9&0&2/9\end{pmatrix}$$

5. $$X = (6I+3A)^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix}\frac{2}{9}&0&-\frac{1}{9}\\0&\frac{1}{9}&0\\-\frac{1}{9}&0&\frac{2}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}2/3&0&-1/3\\0&1/3&0\\-1/3&0&2/3\end{pmatrix}}$$

9) (EBAU Madrid 2011 sept) Resuelve la siguiente ecuación matricial: $\frac{1}{4}A^2 - AX = B$

Donde A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

1. Despejamos X:

$$\frac{1}{4}A^2 - AX = B \rightarrow \frac{1}{4}A^2 - B = AX \rightarrow AX = \frac{1}{4}A^2 - B \rightarrow A^{-1} \cdot AX = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right) \rightarrow I \cdot X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)$$

$X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)$

2. Calculamos A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

3. Calculamos $\frac{1}{4}A^2$

$$\frac{1}{4}A^2 = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 12 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Calculamos $\frac{1}{4}A^2 - B$ y a la matriz resultante lo llamaremos Z

$$Z = \frac{1}{4}A^2 - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

5.1 Calculamos la matriz inversa de la matriz A por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \rightarrow F_3 - F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \rightarrow F_3 + F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \rightarrow F_1 - F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \rightarrow \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 \rightarrow \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \rightarrow \frac{1}{4}F_3}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

5.2 Calculamos la matriz inversa de A mediante determinantes:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t$$

- Calculamos el determinante de Z:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

- Calculamos los Adjuntos de Z:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 8 & A_{12} = 0 & A_{13} = -4 \\ A_{21} = -8 & A_{22} = 8 & A_{23} = 4 \\ A_{31} = 0 & A_{32} = 0 & A_{33} = 4 \end{array}$$

- Escribimos la matriz adjunta.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -8 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

6. $X = A^{-1}(\frac{1}{4}A^2 - B) = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

10) (EBAU Andalucía 2009 Sept) Resuelve la siguiente ecuación matricial $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{X} - \boldsymbol{I_2} = \boldsymbol{2B^2}$

Donde A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

1. Despejamos X:

$AX - I_2 = 2B^2 \rightarrow AX = 2B^2 + I_2 \rightarrow A^{-1} \cdot AX = A^{-1}(2B^2 + I_2) \rightarrow I \cdot X = A^{-1}(2B^2 + I_2)$

$X = A^{-1}(2B^2 + I_2)$

2. Calculamos B^2

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculamos $2B^2 + I_2$ $\qquad I_2 \rightarrow$ Se trata de la matriz identidad de orden 2

$$2B^2 + I_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1 Calculamos la matriz inversa de la matriz A por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to 2F_1 + F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to \frac{1}{2}F_2]{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

4.2 Calculamos la matriz inversa de A mediante determinantes:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t$

- Calculamos el determinante de Z:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

- Calculamos los Adjuntos de Z:

$A_{11} = 2 \qquad A_{12} = 0$
$A_{21} = 1 \qquad A_{22} = 1$

- Escribimos la matriz adjunta.

$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t \to A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $X = A^{-1}(2B^2 + I_2) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17/2 \\ -4 & 1/2 \end{pmatrix}$

11) (EBAU Andalucía 2018) Resuelve la siguiente ecuación matricial $\frac{1}{5}(B + AX) = C^t$

Donde A = $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Despejamos X:

$\frac{1}{5}(B + AX) = C^t \to B + AX = 5C^t \to AX = 5C^t - B \to A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (5C^t - B) \to IX = A^{-1} \cdot (5C^t - B)$

$X = A^{-1} \cdot (5C^t - B)$

2. Calculamos C^t

$C^t = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. Calculamos $5C^t - B$

$$5C^t - B = 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix}$$

4.1 Calculamos la matriz inversa de la matriz A por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to 3F_2 - F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to \frac{1}{6}F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{12}F_2}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1/12 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ -1/12 & 1/4 \end{pmatrix}$$

4.2 Calculamos la matriz inversa de A mediante determinantes:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t$$

- Calculamos el determinante de Z:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24$$

- Calculamos los Adjuntos de Z:

$$A_{11} = 4 \qquad A_{12} = -2$$
$$A_{21} = 0 \qquad A_{22} = 6$$

- Escribimos la matriz adjunta.

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \to (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t \to A^{-1} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

5. $X = A^{-1} \cdot (5C^t - B) = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$

12) Resuelve la siguiente ecuación matricial $A^2X - 2B = X$

siendo: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Lo primero que deberemos realizar es despejar la ecuación matricial:

$\mathbf{A^2X - 2B = X} \rightarrow A^2X - IX = 2B$

$(A^2 - I)X = 2B$

$(A^2 - I)^{-1} \cdot (A^2 - I) \cdot X = (A^2 - I)^{-1} \cdot (2B)$

$I \cdot X = (A^2 - I)^{-1} \cdot (2B)$

$\mathbf{X = (A^2 - I)^{-1} \cdot (2B)}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Z$$

Calculamos la matriz inversa de la matriz Z $\rightarrow Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot (\mathrm{Adj}(Z))^t$

$$|Z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8 \neq 0 \rightarrow \text{la matriz Z tendrá matriz inversa}$$

Calculamos la matriz Adjunta:

$$Z_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad Z_{12} = (-)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \qquad Z_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$Z_{21} = (-)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad Z_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad Z_{23} = (-)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$Z_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \qquad Z_{32} = (-)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \qquad Z_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\mathrm{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \quad (\mathrm{Adj}(Z))^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Z^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^2 - I)^{-1} \cdot (2B) = Z^{-1} \cdot (2B) = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{2}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & -16 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

13) (EBAU Navarra junio 2019) Resuelve la siguiente ecuación matricial B^t - AX = B

siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Lo primero que deberemos realizar es despejar la ecuación matricial:

B^t - AX = B→ $B^t - AX = B$

$$B^t - B = AX$$

$$AX = B^t - B$$

$$(A)^{-1} \cdot (A) \cdot X = (A)^{-1} \cdot (B^t - B)$$

$$I \cdot X = (A)^{-1} \cdot (B^t - B)$$

X= $(A)^{-1} \cdot (B^t - B)$

2. $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. $B^t - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

4.1 Calculamos la matriz inversa de A mediante determinantes:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t$

- Calculamos el determinante de A:

$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1$

- Calculamos los adjuntos de A:

$$A_{11} = -2 \quad A_{12} = 0 \quad A_{13} = 1$$
$$A_{21} = 2 \quad A_{22} = 1 \quad A_{23} = -2$$
$$A_{31} = 1 \quad A_{32} = 0 \quad A_{33} = -1$$

- Escribimos la matriz adjunta.

$$\mathrm{Adj(A)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj(A)}^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj(A)}^t \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. $X = (A)^{-1} \cdot (B^t - B) \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$