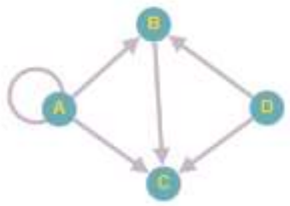
GRAFOS

1) Escribe la matriz asociada a cada uno de los siguientes grafos:

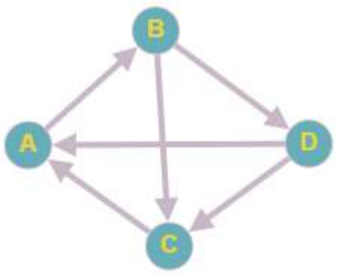
a)



	A	B	C	D
A	1	1	1	0
B	0	0	1	0
C	0	0	0	0
D	0	1	1	0

La matriz asociada al grafo es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

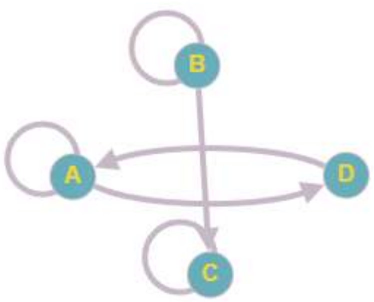
b)



	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	0	0	1	1
C	1	0	0	0
D	1	0	1	0

La matriz asociada al grafo es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c)



	A	B	C	D
A	1	0	0	1
B	0	1	1	0
C	0	0	1	0
D	1	0	0	0

La matriz asociada al grafo es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

MATRICES

2) Escribe la matriz A de dimensiones 3x4 tal que sus elementos aij verifiquen que: aij = 2i -5j

$A_{ij} = 2i - 5j$

$a_{11} = 2\cdot 1 - 5\cdot 1 = -3$ $a_{12} = 2\cdot 1 - 5\cdot 2 = -8$ $a_{13} = 2\cdot 1 - 5\cdot 3 = -13$ $a_{14} = 2\cdot 1 - 5\cdot 4 = -18$

$a_{21} = 2\cdot 2 - 5\cdot 1 = -1$ $a_{22} = 2\cdot 2 - 5\cdot 2 = -6$ $a_{23} = 2\cdot 2 - 5\cdot 3 = -11$ $a_{24} = 2\cdot 2 - 5\cdot 4 = -16$

$a_{31} = 2\cdot 3 - 5\cdot 1 = 1$ $a_{32} = 2\cdot 3 - 5\cdot 2 = -4$ $a_{33} = 2\cdot 3 - 5\cdot 3 = -9$ $a_{34} = 2\cdot 3 - 5\cdot 4 = -14$

$A_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -13 & -18 \\ -1 & -6 & -11 & -16 \\ 1 & -4 & -9 & -14 \end{pmatrix}$

3) Escribe la matriz A de orden 3 tal que sus elementos aij verifiquen que: aij = $\begin{cases} (-2)^{i+j} & \text{si } i > j \\ i(2j-5) & \text{si } i = j \\ -3 & \text{si } i < j \end{cases}$

$a_{11} = 1\cdot(2\cdot 1 - 5) = -3$ $a_{12} = 2\cdot 1 - 5\cdot 2 = -3$ $a_{13} = 2\cdot 1 - 5\cdot 3 = -3$

$a_{21} = (-2)^{1+2} = -8$ $a_{22} = 2\cdot(2\cdot 2 - 5) = -2$ $a_{23} = 2\cdot 2 - 5\cdot 3 = -3$

$a_{31} = (-2)^{3+1} = 16$ $a_{32} = (-2)^{3+2} = -32$ $a_{33} = 3\cdot(2\cdot 3 - 5) = 3$

$A_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -8 & -2 & -3 \\ 16 & -32 & 3 \end{pmatrix}$

4) Escribe la matriz A de orden 2x3 tal que sus elementos aij verifiquen que: aij = $\begin{cases} (-3)^j - 2i & si\ i \neq j \\ 4 - 7j - i & si\ i = j \end{cases}$

$a_{11} = 4 - 7\cdot 1 - 1 = -4$ $a_{12} = (-3)^2 - 2\cdot 1 = 7$ $a_{13} = (-3)^3 - 2\cdot 1 = -29$

$a_{21} = (-3)^1 - 2\cdot 2 = -7$ $a_{22} = 4 - 7\cdot 2 - 2 = -12$ $a_{23} = (-3)^3 - 2\cdot 2 = -31$

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -29 \\ -7 & -12 & -31 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

5) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula (A+B)·C^t **b) Comprueba que (A+B)·C^t = AC^t +BC^t**

a) $A+B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$C^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$(A+B)\cdot C^t = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{3x4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{4x2} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & -3 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$

b) $AC^t + BC^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & -3 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo tanto demostramos que la igualdad se cumple.

6) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula M^2 – N^2

b) Calcula (M +N)·(M-N)

a) $M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & -1 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$M^2 - N^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & -1 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $(M + N) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(M - N) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$(M + N)\cdot(M-N) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -9 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}_{3x3}$

7) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, comprueba que $A^2 = 2A - I$. Además calcula A^4

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$A^2 = 2A - I = 2\cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

Observamos que la igualdad se cumple.

Calculamos ahora A^4, sabiendo que $A^2 = 2A - I$

$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 + I^2 - 4A = 4\,(2A\text{-}I) + I^2 - 4A = 8A - 4I + I^2 - 4A = 8A - 4I + I - 4A = 4A - 3I$

$A^4 = 4A - 3I = 4\cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

8) Dadas las matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -7 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} t & t+1 & t+2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula el valor de t para que el producto AB dé como resultado la matriz nula.
b) Para el valor de t hallado, calcula el resultado de $BA+BAB+BAB^2$

a) $AB = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -7 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & t+1 & t+2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2t - 4 + 2 & 2t + 2 - 8 + 4 & 2t + 4 - 12 + 6 \\ -7t + 12 - 5 & -7t - 7 + 24 - 10 & -7t - 14 + 36 - 15 \\ -5t + 8 - 3 & -5t - 5 + 16 - 6 & -5t - 10 + 24 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2t-2 & 2t-2 & 2t-2 \\ -7t+7 & -7t+7 & -7t+7 \\ -5t+5 & -5t+5 & -5t+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2t-2=0 \\ -7t+7=0 \\ -5t+5=0 \end{cases} \rightarrow t=1$$

b) BA+BAB+BAB^2 → Tenemos que AB=0

BA + B·0 + B·(AB)·B = BA + 0 + B·0·B = BA

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -7 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 22 & -17 \\ -54 & 44 & -34 \\ -27 & 22 & -17 \end{pmatrix}$$

9) Halla todas las matrices X, no nulas, de la forma X = $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ tales que X^2 = X

Calculamos X^2 = $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$

X^2 = X → $\begin{pmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Igualamos término a término $\begin{cases} a^2 = a \\ a+b=1 \\ 0=0 \\ b^2=b \end{cases}$

$a^2 - a = 0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \rightarrow a+b=1 \rightarrow b=1 \\ a=1 \rightarrow a+b=1 \rightarrow b=0 \end{cases}$

$b^2 - b = 0 \rightarrow \begin{cases} b=0 \rightarrow a+b=1 \rightarrow a=1 \\ b=1 \rightarrow a+b=1 \rightarrow a=0 \end{cases}$ Soluciones: $\begin{cases} a=0 \quad b=1 \\ a=1 \quad b=0 \end{cases}$

Las matrices que cumplen la condición son:

X = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ X = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

10) Halla los valores de a y b en la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ de forma que A^2 -2A = B siendo B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos A^2 = $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

A^2 – 2A = B → $\begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a^2-2a & 2ab-2b \\ 0 & a^2-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Igualamos término a término $\begin{cases} a^2-2a=0 \\ 2ab-2b=1 \\ 0=0 \\ a^2-2a=0 \end{cases}$

$a^2 - 2a = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$

- Si a = 0

$2ab - 2b = 1 \rightarrow 2 \cdot 0 \cdot b - 2b = 1 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$

- Si a = 2

$2ab - 2b = 1 \rightarrow 2 \cdot 2 \cdot b - 2b = 1 \rightarrow 2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2}$

Soluciones: $\begin{cases} a = 0 \;\; b = -\frac{1}{2} \\ a = 2 \;\;\; b = \frac{1}{2} \end{cases}$

11) Calcula los valores de x para que la matriz A = $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ verifique la ecuación A^2-6A+9I=0, donde I y O son respectivamente las matrices identidad y nula de orden tres.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 9I = O \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 9 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 - 6x + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualamos cada uno de los términos:

$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow$ Resolvemos la Ec de 2º Grado $\rightarrow \{x = 3 \text{ (doble)}$

12) Halla una matriz B, sabiendo que su primera fila es (1,0), y que verifica

A· B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, siendo A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Para que se pueda realizar el producto A· B , las dimensiones de la matriz B tiene que ser de 3x2

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -1 + 2a + 2c & 2b + 2d \\ 2 + a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Igualamos cada uno de los términos

$$\begin{cases} 2a+2c-1=1 \to 2\cdot(-1)+2c-1=1 \to 2c=4 \to c=2 \\ 2b+2d=0 \to 2\cdot 0+2d=0 \to d=0 \\ 2+a=1 \to a=-1 \\ b=0 \end{cases} \to \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=2 \\ d=0 \end{cases}$$

13) (EBAU Andalucía Extraordinaria 2019)

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Justifica si $A\cdot A^t$ es una matriz simétrica

a) $A\cdot A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Es una matriz simétrica ya que se trata de una matriz cuadrada donde los elementos son simétricos respecto de la diagonal principal.

14) (EBAU P.Vasco 2017 Ordinaria) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$

¿Qué valores deben tomar los parámetros desconocidos $\{x,y,z\}$ para que se verifique la igualdad matricial $A\cdot B=C$?

$A\cdot B=C \to \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x+6y & 2x-6 \\ -9-5y & -6+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$

Igualamos cada uno de los términos: $\begin{cases} 3x+6y=9 \\ 2x-6=z \\ -9-5y=-z \\ -6+5=-1 \end{cases} \to \begin{cases} 3x+6y+0z=9 \\ 2x+0y-z=6 \\ 0x-5y+z=9 \end{cases} \to \begin{array}{l} x+2y+0z=3 \\ 2x+0y-z=6 \\ 0x-5y+z=9 \end{array}$

Resolvemos $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 4F_3-5F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{array}\right)$

$\to \begin{cases} x+2y=3 \\ -4y-z=0 \\ 9z=36 \end{cases} \to \begin{array}{l} x=5 \\ y=-1 \\ z=4 \end{array}$

15) Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^t

b) Calcular A·B

c) Hallar la matriz X = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple A· B· X = C + I donde C = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) A· B· X = C + I

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + 2c = 2 \\ a - c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{5} \\ c = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b + 2d = -2 \\ b - d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{5} \\ d = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

La matriz resultante será: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix}$

16) (EBAU Murcia 2018 Sept)

Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ D = $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Hallar x,y,z para que se cumpla A^t (B+C) = D

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ z+1 \end{pmatrix}$$

$$A^t\,(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ z+1 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} 2x-3y-z-1 \\ -x+y+2z+2 \\ y-z-1 \end{pmatrix}_{3x1}$$

$$A^t\,(B+C) = D \rightarrow \begin{pmatrix} 2x-3y-z-1 \\ -x+y+2z+2 \\ y-z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x-3y-z-1=3 \\ -x+y+2z+2=1 \\ y-z-1=-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-3y-z=4 \\ -x+y+2z=-1 \\ 0x+y-z=-4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightarrow}{F_3 \rightarrow F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} -x+y+2z=-1 \\ -y+3z=2 \\ 2z=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=-5 \\ z=-1 \end{cases}$$

17) (EBAU Madrid 2020) Se considera la matriz A dada por A = $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

a) Calcula el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$A^2 - 5A = -4I \rightarrow \begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & -m+4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} m-4=0 \rightarrow m=4 \\ m^2-5m=-4 \rightarrow \begin{cases} m=4 \\ \cancel{m=1} \end{cases} \end{cases}$$

El único valor que cumple todas las condiciones es m= 4

MATRIZ INVERSA

18) (EBAU Andalucía sep 2019)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) **Demuestra que $A \cdot A^t + B$ posee inversa**

$$A \cdot A^t + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to 2F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Observamos que no tiene matriz inversa

19) Calcula las matrices inversas de:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Para poder realizar la matriz inversa mediante el método de Gauss-Jordan nunca en la posición a_{11} puede existir un 0. Por eso procederemos a cambiar la fila 1 por la fila 2 o 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 6F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to 24F_2 + 5F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & -6 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & -24 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to 24F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & -6 & 14 & 5 \\ 0 & 24 & 0 & -6 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & -24 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{24}F_1,\ F_2 \to \frac{1}{24}F_2,\ F_3 \to -\frac{1}{24}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 7/12 & 5/24 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & -5/12 & 5/24 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/12 & -1/24 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 7/12 & 5/24 \\ -1/4 & -5/12 & 5/24 \\ 1/4 & 1/12 & -1/24 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightarrow}{F_3 \rightarrow 3F_3 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -4 & -8 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 \rightarrow 21F_1 + 3F_3 \\ \rightarrow \\ F_2 \rightarrow 21F_2 + 6F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -21 & 21 & 0 & -12 & -3 & 9 \\ 0 & 63 & 0 & -3 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & -21 & -4 & -8 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightarrow}{F_1 \rightarrow 3F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -63 & 0 & 0 & -33 & -3 & 9 \\ 0 & 63 & 0 & -3 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & -21 & -4 & -8 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 \rightarrow -\frac{1}{63}F_1 \\ F_2 \rightarrow \frac{1}{63}F_2 \\ \rightarrow \\ F_3 \rightarrow -\frac{1}{21}F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11/21 & 1/21 & -1/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1/21 & -2/21 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 4/21 & 8/21 & -1/7 \end{array}\right)$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 11/21 & 1/21 & -1/7 \\ -1/21 & -2/21 & 2/7 \\ 4/21 & 8/21 & -1/7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1 \\ \rightarrow \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{F_3 \rightarrow 3F_3 + 7F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \\ \rightarrow \\ F_2 \rightarrow F_2 + 2F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightarrow}{F_1 \rightarrow 3F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 \rightarrow \frac{1}{3}F_1 \\ F_2 \rightarrow \frac{1}{3}F_2 \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

F = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + F_1}{\overset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{\to}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 -< 3F_3 + 2F_2}{\to}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{F_2 \to 5F_2 + 2F_3}{\overset{F_1 \to 5F_1 - F_3}{\to}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -10 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 15 & 0 & -12 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_1 \to 3F_1 + 2F_2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & -6 & 12 & 3 \\ 0 & 15 & 0 & -12 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 \to \frac{1}{15}F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{15}F_2 \\ \to \\ F_3 \to \frac{1}{5}F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/5 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 & 1/5 \\ -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

RANGO DE UNA MATRIZ

20) Calcula el rango de las siguientes matrices mediante el método de Gauss

- **A** = $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-6} & \mathbf{-5} & \mathbf{6} \end{pmatrix}_{\mathbf{3x4}}$

Calculamos el rango de la matriz dada

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 3F_1}{\overset{F_2 \to F_2 + F_1}{\to}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & 20 & 16 & -16 \end{pmatrix} \overset{F_3 \to F_3 + F_2}{\to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez conseguida la matriz escalonada, observamos cuantas filas no nulas tenemos.

Por lo tanto el rg (A) = 2

- $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{3x3}$

Calculamos el rango de la matriz dada

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Una vez conseguida la matriz escalonada, observamos cuantas filas no nulas tenemos.

Por lo tanto el rg (B) = 3

- $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}_{3x4}$

Calculamos el rango de la matriz dada

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez conseguida la matriz escalonada, observamos cuantas filas no nulas tenemos.

Por lo tanto el rg (C) = 2

- $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{-6} & \mathbf{19} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{4x4}$

Calculamos el rango de la matriz dada

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 - 3F_1]{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 12 & -8 & 24 \\ 0 & 13 & -4 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to 3F_4 - 13F_2]{F_3 \to F_3 - 4F_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} F_3 \leftrightarrow F_4 \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 14 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez conseguida la matriz escalonada, observamos cuantas filas no nulas tenemos.

Por lo tanto el rg (D) = 3

- $\mathbf{E = =} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-8} & \mathbf{9} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-10} & \mathbf{15} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}_{\mathbf{4x4}}$

Calculamos el rango de la matriz dada

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \\ \rightarrow \\ F_4 \rightarrow F_4 - 5F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 10 & -8 \\ 0 & -20 & 20 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2 \\ \rightarrow \\ F_4 \rightarrow F_4 - 4F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez conseguida la matriz escalonada, observamos cuantas filas no nulas tenemos.

Por lo tanto el rg (E) = 2

- $\mathbf{F =} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}_{\mathbf{4x3}}$

Se trata de una matriz de dimensiones 4x3, por lo tanto su rango máximo posible será 3.

Como rg (F) = rg(F^t) , calculamos previamente la traspuesta de la matriz F.

$$F^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de la matriz dada

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2 \to F_2 + 4F_1 \\ \to \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 13 \\ 0 & -2 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_3 \to 3F_3 + 2F_2 \\ \to \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Una vez conseguida la matriz escalonada, observamos cuantas filas no nulas tenemos.

Por lo tanto el rg (F) = 3

- **G =** $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-7} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\mathbf{4x3}}$

Se trata de una matriz de dimensiones 4x3, por lo tanto su rango máximo posible será 3.

Como rg (G) = rg(G^t) , calculamos previamente la traspuesta de la matriz F.

$G^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz dada

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2 \to 4F_2 - 7F_1 \\ \to \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 14 & -35 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_3 \to 7F_3 + F_2 \\ \to \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 14 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{pmatrix}$$

Una vez conseguida la matriz escalonada, observamos cuantas filas no nulas tenemos.

Por lo tanto el rg (G) = 3

- **H =** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}_{\mathbf{4x3}}$

Se trata de una matriz de dimensiones 4x3, por lo tanto su rango máximo posible será 3.

Como rg (H) = rg(H^t) , calculamos previamente la traspuesta de la matriz F.

$H^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz dada

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez conseguida la matriz escalonada, observamos cuantas filas no nulas tenemos.

Por lo tanto el rg (H) = 2

- **I =** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}_{\mathbf{5x4}}$

Se trata de una matriz de dimensiones 5x4, por lo tanto su rango máximo posible será 4.

Como rg (I) = rg(I^t) , calculamos previamente la traspuesta de la matriz F.

$$I^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de la matriz dada

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -9 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4 \to F_4 + 6F_2]{F_3 \to F_3 - 9F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \to 22F_4 + 18F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez conseguida la matriz escalonada, observamos cuantas filas no nulas tenemos.

Por lo tanto el rg (I) = 3