

## DETERMINANTES

Se trata de una herramienta matemática que **sólo** se puede utilizar cuando nos encontramos con matrices cuadradas (matrices con el mismo número de filas y columnas)

Debemos distinguir entre matriz y determinante. La matriz se trata de un conjunto ordenado de números reales y el determinante es un número real.

El determinante de la matriz A se denota por  $|A|$  o  $\det(A)$

### Determinante de orden 1

$$|a_{11}| = a_{11}$$

### Determinante de orden 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

### Determinante de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

## REGLA DE SARRUS

Los términos positivos (signo +) están formados por los elementos de la diagonal principal y las diagonales paralelas con sus respectivos vértices.

Los términos negativos (signo -) están formados por los elementos de la diagonal secundaria y las diagonales paralelas con sus respectivos vértices.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

POSITIVOS

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

NEGATIVOS

## ADJUNTO DE UN ELEMENTO

Denominaremos **adjunto del elemento**  $a_{ij}$  de una matriz cuadrada al determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j en la que se encuentre dicho elemento, cuyo valor viene multiplicado por  $(-1)^{i+j}$ . Lo denotaremos por  $A_{ij}$

**Ejemplo:** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  Calculamos los adjuntos  $A_{23}$  y  $A_{42}$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-61) = 61 \quad A_{42} = (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-72) = 72$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \boxed{-2} & 1 \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{5} & 2 \\ 6 & -3 & \boxed{7} & 1 \\ 4 & 1 & \boxed{0} & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & -2 & 1 \\ 1 & \boxed{0} & 5 & 2 \\ 6 & -3 & \boxed{7} & 1 \\ 4 & 1 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

## DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA DE CUALQUIER ORDEN

El determinante de una matriz cuadrada de cualquier orden se calcula sumando cada uno de los elementos de una fila o una columna multiplicada por cada uno de sus adjuntos.

**Importante:** para minimizar el proceso se recomienda utilizar filas o columnas con el mayor número de ceros.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{Miramos que fila o columnas tienen el mayor número de ceros, por eso para que el proceso me resulte más sencillo cogeré la 2ª columna o la 3ª fila.}$$

En este caso voy a elegir la 3ª fila

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ \boxed{4} & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{34} \cdot A_{34} = 4 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + (-1) \cdot A_{33} + 2 \cdot A_{34} = \\ &= 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 30 - 1 \cdot (-17) - 2 \cdot 8 \end{aligned}$$

$$|A| = 121$$

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ | & - & | & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & - & - & + \end{array}$$

Tenemos un gráfico en el que podemos observar el signo de los adjuntos de una manera rápida.

Los elementos que ocupan las posiciones pares, sus adjuntos serán positivos y los elementos que ocupan las posiciones impares, sus adjuntos serán negativos.

## PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

- 1) Si una de las filas o columnas tiene todos elementos nulos, el determinante será igual a 0.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- 2) Si dos filas (o columnas) son iguales o proporcionales entre si, el determinante es igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0 \text{ El determinante es igual a 0 debido a que la } 2^{\text{a}} \text{ fila y la } 3^{\text{a}} \text{ fila son iguales. } F_2 = F_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 6 & 30 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ El determinante es igual a 0 ya que la } 2^{\text{a}} \text{ columna y la } 3^{\text{a}} \text{ columna son proporcionales. } C_3 = 5C_2$$

- 3) Si una fila (o columna) es combinación lineal de las otras filas (o columnas), el determinante es igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0 \text{ El determinante es igual a 0 debido a que la } 3^{\text{a}} \text{ fila es igual a la suma de la } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}}. \quad F_3 = F_1 + F_2$$

- 4) Si sumamos a una fila (o columna) la combinación lineal de las otras el resultado del determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 46 \quad F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 46$$

**Cuidado** La fila o la columna que modifiquemos (en este caso ha sido la  $F_3$ ) no podemos multiplicarla por un número que no sea 1. Es decir no podemos hacer lo siguiente

$F_3 \rightarrow F_1 - F_3$  en este caso hemos multiplicado esa fila por -1.

$F_3 \rightarrow 2F_3 - F_1$  en este caso hemos multiplicado la fila por 2

- 5) Si permutamos (cambiamos) dos filas o dos columnas entre sí, el resultado del determinante de una matriz cuadrada no varía pero si su signo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Permutamos la  $1^{\text{a}}$  fila por la  $3^{\text{a}}$   $F_1 \leftrightarrow F_3$   $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

Observamos que el resultado es igual pero cambiando el signo.

- 6) Si multiplicamos todos los elementos de una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$\begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -28 \quad 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-14) = -28$$

De manera inversa, si los elementos de una fila o columna son múltiplos de un determinado número, podremos sacar dicho número como factor común.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad F_1 \rightarrow \frac{1}{2}F_1 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

**Ejemplo:** Si tenemos un determinante donde todos los términos son múltiplos del mismo número.

$|3A| \rightarrow$  Aplico la propiedad  $|\alpha \cdot A| = \alpha^n \cdot |A|$  siendo "n" el orden de la matriz A

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 3 & 9 & 9 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -27$$

El orden es 3 ( $n=3$ ) y  $\alpha=3$  (número en común)  $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 3 & 9 & 9 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 3^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 27 \cdot (-1) = -27$

Es decir puedo sacar un tres por cada una de las filas o columnas, como saco 3, pues puedo sacar  $3^3$  fuera del determinante.

- 7) El determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su matriz transpuesta.

$$|A| = |A^t|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

- 8) El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad |A \cdot B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 36$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \rightarrow 36 = 9 \cdot 4 \rightarrow 36 = 36$$

- 9) Si sumamos dos determinantes que solo se diferencian en una fila ( o una columna), su suma final será igual a la suma de las filas ( o columnas) que son distintas, dejando intactas aquellas filas o columnas que son iguales.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

- 10) El determinante de una matriz triangular será igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$$

## CÁLCULO DE DETERMINANTES

Vamos a intentar que todos los elementos de una fila o columna sean igual a ceros, exceptuando uno de ellos. Este elemento le llamaremos **pivote**.

Dado el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & \textcolor{blue}{-1} & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{Vamos a coger como pivote el } -1.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \rightarrow c_1 + 4c_3} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 \\ 14 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4 \rightarrow c_4 + 2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 14 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 14 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 14 & -1 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot (-121) = \boxed{121}$$

## CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ POR DETERMINANTES

Vamos a calcular el rango de una matriz a través de los determinantes.

### Menor de una matriz

Un menor de una matriz A es el determinante de alguna submatriz, que se obtiene de la matriz A con la eliminación de una o más filas o columnas. Los menores que se obtienen con la eliminación de una única fila y columna de matrices cuadradas son necesarios para hallar la matriz de cofactores, que es útil para calcular la inversa y el determinante.

Ejemplo: Dada la matriz la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -3 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 8 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- Elegimos las dos primeras filas y las dos primeras columnas, obteniendo el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

- Si elegimos la 1<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> y 4<sup>a</sup> fila y la 4<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup> y 7<sup>a</sup> columna obtenemos el menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -400$$

### Rango de una matriz

El rango es el orden de la mayor submatriz cuadrada no nula

Podemos descartar una fila o una columna:

- Si tenemos dos filas ( o dos columnas) iguales.
- Todos los elementos de una fila o columna son 0.
- Cuando una fila o columna es proporcional a otra.
- Cuando una fila o columna es combinación lineal de otras.

Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Escogemos una menor de orden 2 cuyo determinante sea distinto de 0. Si no existiera ninguno el rango de la matriz sería 1 o 0 si se tratase de una matriz nula.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ por lo tanto el rango es } \operatorname{rg}(A) \geq 2$$

- Añadimos una fila y una columna para formar una menor de orden 3. Si no existe ningún determinante distinto de 0, pues el  $\text{rg}(A)=2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ por lo tanto el rango es } \text{rg}(A) \geq 3$$

- Repetiremos el proceso hasta que encontremos un determinante de orden mayor que sea distinto de cero. Si este sucede el rango de la matriz será la dimensión de dicho determinante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 114 \neq 0 \text{ por lo tanto el } \text{rg}(A) \geq 4 \text{ Como no hay más filas el } \text{rg}(A) = 4$$

## CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA MEDIANTE DETERMINANTES

Vamos a calcular la matriz inversa mediante el cálculo de la matriz adjunta.

### Cálculo de la matriz adjunta

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  sus adjuntos son los siguientes:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

La matriz adjunta de A será  $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

## Cálculo de la matriz inversa

Para que una matriz tenga inversa (matriz regular) su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{por lo tanto tendrá inversa}$$

Para calcular la matriz inversa  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$

$$(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Resumen: Para calcular una matriz inversa debemos seguir los siguientes pasos:

Calculamos  $|A| \begin{cases} \text{si } |A| = 0 \text{ la matriz no tendrá inversa} \\ \text{si } |A| \neq 0, \text{ existe inversa } (A^{-1}) \rightarrow \text{calculamos } A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t \end{cases}$