1) **Determinar los valores de a y b para quien la siguiente función sea derivable en todos sus puntos:**

$$\mathbf{f(x)=}\begin{cases} \mathbf{bx^2+ax} & \mathbf{si\ x\leq -1} \\ \mathbf{\frac{x^2+2ax+1}{x-1}} & \mathbf{si\ -1<x<0} \\ \mathbf{\sqrt{x+4}} & \mathbf{si\ x\geq 0} \end{cases}$$

Continuidad

En x≠-1 y x≠0 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

Estudio de la continuidad para x= -1

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} bx^2+ax = b-a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^2+2ax+1}{x-1} = \frac{2-2a}{-2} = -1+a \\ f(-1) = b-a \end{cases}$$

Para que la función sea continua en x= -1 se tiene que cumplir $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

Por lo tanto b-a= -1+a → 2a-b = 1

Estudio de la continuidad para x= 0

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2+2ax+1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x+4} = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

→ La función no es continua en x=0 ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Como los límites no coinciden y ambos toman valores finitos → Tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Finito de valor 3.

Derivabilidad

Si x≠ -1 y x≠0 → f (x) es derivable, y su derivada es →

$$f'(x)=\begin{cases} 2bx+a & x<-1 \\ \frac{(2x+2a)\cdot(x-1)-1\cdot(x^2+2ax+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2a-1}{(x-1)^2} & -1<x<0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+4}} & x>0 \end{cases}$$

Estudio de la derivabilidad para x= 0

En x = 0 no es derivable ya que no es continua, cualesquiera que sean a y b.

Estudio de la derivabilidad para x= -1

Para que f (x) sea derivable en *x*=-1, han de ser iguales las derivadas laterales $\rightarrow f'(-1^-) = f(-1^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = \lim\limits_{x\to -1^-} 2bx + a = -2b + a \\ f'(-1^+) = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^2-2x-2a-1}{(x-1)^2} = \frac{1+2-2a-1}{4} = \frac{2-2a}{4} \end{array}\right\} \rightarrow -2b+a = \frac{2-2a}{4} \rightarrow -8b+4a=2-2a \rightarrow 6a-8b= 2$$

Por tanto, f(x) será derivable en $\mathbb{R}$ - {0} cuando y solo cuando: $\left.\begin{array}{l} 2a - b = 1 \\ 6a - 8b = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{array}$

2) **Dada la función (Junio 2010)**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-7x}{3} + 5 & \text{si } -3 < x \le 1 \\ -x^2 + ax + 4 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ \frac{bx-15}{x-1} & \text{si } 3 < x < 6 \end{cases}$$

a) Determinar los valores de a y b para los que se obtiene una función continua en todo su dominio.

b) ¿En qué puntos de su dominio la función obtenida en el apartado anterior es derivable?

a) La función dada está definida en todo R; y cada una de las tres funciones que la determinan es continua y derivable en todo su dominio: las dos primeras son de tipo polinómico; la tercera es racional con una discontinuidad en x = 1, pero ese punto no está en su dominio de definición, que es el intervalo (3, 6).

Por tanto, la única dificultad para su continuidad y derivabilidad se da en los puntos x = 1 y x = 3.

Para que la función sea continua en esos puntos debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \frac{8}{3}$ y que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) = 3a - 5$; y para ello es necesario que los límites laterales existan y sean iguales.

Estudio de la continuidad para x= 1

$\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{-7x}{3} + 5\right) = \frac{8}{3}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} (-x^2 + ax + 4) = a + 3$

$f(1) = \frac{8}{3}$

Para que la función sea continua, se tiene que cumplir: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \rightarrow \frac{8}{3} = a + 3 \rightarrow a = -\frac{1}{3}$

Estudio de la continuidad para x= 3

$\lim\limits_{x\to 3^-} \left(-x^2 - \frac{1}{3}x + 4\right) = -6$

$\lim\limits_{x\to 3^+} \left(\frac{bx-15}{x-1}\right) = \frac{3b-15}{2}$

f(3) = -6

Para que la función sea continua, se tiene que cumplir: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \rightarrow -6 = \frac{3b-15}{2} \rightarrow b = 1$

Luego, la función continua es: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-7x}{3}+5 & \text{si} -3<x\le 1\\ -x^2-\dfrac{1}{3}x+4 & \text{si}\ 1<x\le 3\\ \dfrac{x-15}{x-1} & \text{si}\ 3<x<6\end{cases}$.

b) Salvo en los puntos x = 1 y x = 3, su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-7}{3} & \text{si} -3<x<1\\ -2x-\dfrac{1}{3} & \text{si}\ 1<x<3\\ \dfrac{14}{(x-1)^2} & \text{si}\ 3<x<6\end{cases}$$

La derivada de f(x) = $\frac{x-15}{x-1}$ es: f´(x) = $\frac{1\cdot(x-1)-(x-15)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{14}{(x-1)^2}$

Para que sea derivable en los puntos x = 1 y x = 3 deben coincidir las derivadas laterales.

$f'(1^-)=f(1^+)$ y $f'(3^-)=f(3^+)$

Estudio de la derivabilidad para x= 1

$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-7}{3}\right)=\frac{-7}{3}$

$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(-2x-\frac{1}{3}\right)=-\frac{7}{3}$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en x = 1.

Estudio de la derivabilidad para x= 3

$f'(3^-)=\lim_{x\to 3^-} f'(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(-2x-\frac{1}{3}\right)=\frac{-19}{3}$

$f'(3^+)=\lim_{x\to 3^+} f'(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{14}{(x-1)^2}=\frac{7}{2}$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en x = 3.

3) **Dada la función:** $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\ x<1 \\ cx & si\ x\geq 1 \end{cases}$ **calcula a,b y c para que la función sea derivable en x=1, sabiendo que f(0)=f(4)**

Continuidad

En x≠1 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

Estudio de la continuidad para x= 1

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} x^2+ax+b = 1+a+b \\ \lim_{x\to 1^+} cx = c \\ f(1)=c \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x=1 se tiene que cumplir $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Por lo tanto tendremos que 1+a+b =c

Derivabilidad

Si x≠ 1 → f (x) es derivable, y su derivada es →

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si\ x<1 \\ c & si\ x>1 \end{cases}$$

Estudio de la derivabilidad para x= 1

Para que f (x) sea derivable en x=1, han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(1^-) = f(1^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x+a = = 2+a \\ f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} c = c \end{array}\right\} \rightarrow 2+a=c$$

- Otra condición que nos da el problema es f(0)=f(4)

  Pues calculamos el valor de la función para x=0 y x=4 . El valor de la función para x=0 debemos coger la función f(x)= x^2+ax+b ya que es donde está definida y para x=4 debemos coger la función f(x)=cx ya que es donde está definida.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0^2+a\cdot 0+b \\ f(4) = 4c \end{array}\right\} \rightarrow f(0)=f(4) \rightarrow b=4c$$

Con las tres ecuaciones se plantea un sistema: $\begin{cases} 1+a+b=c \\ 2+a=c \\ b=4c \end{cases}$

Se cumplen las condiciones del enunciado para la función f(x) si → $\begin{cases} a=\frac{-7}{4} \\ b=1 \\ c=\frac{1}{4} \end{cases}$

4) **Se sabe que la función f:[0,5] → ℝ dada por f(x) = $\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0,5) y verifica que f(0)=f(5). ¿Cuánto valen a,b y c?**

- En primer lugar, como f(0)=f(5)

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(5) &= c+\sqrt{5-1} = c+2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Como } f(0)=f(5) \rightarrow 0=c+2 \rightarrow c=-2$$

Continuidad

En x≠2 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

Estudio de la continuidad para x= 2

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^-} ax+bx^2 = 2a+4b \\ &\lim_{x\to 2^+} c+\sqrt{x-1} = c+1 \\ &f(2) = c+1 \end{aligned}\right\}$$

Para que la función sea continua en x= 2 se tiene que cumplir $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

Por lo tanto tendremos que 2a+4b= c+1 → 2a+4b=-2+1 → 2a + 4b=-1

Derivabilidad

Si x≠ 2 → f (x) es derivable, y su derivada es → f´(x)= $\begin{cases} a+2bx & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } 2 < x < 5 \end{cases}$

Estudio de la derivabilidad para x= 2

Para que f (x) sea derivable en x=2, han de ser iguales las derivadas laterales → $f´(2^-) = f(2^+)$

$$\left.\begin{aligned} f´(2^-) &= \lim_{x\to 2^-} f´(x) = \lim_{x\to 2^-} a+2bx = a+4b \\ f´(2^+) &= \lim_{x\to 2^+} f´(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

Así pues, para que f sea derivable en x=2 debe ser $a+4b=\frac{1}{2}$

Con las ecuaciones obtenidas se plantea un sistema y se resuelve:

$$\begin{cases} 2a+4b=-1 \\ -2a-8b=-1 \end{cases} \rightarrow a=\frac{-3}{2} \text{ y } b=\frac{1}{2}$$

Para que la función f cumpla las condiciones de enunciado $a=\frac{-3}{2}$ $b=\frac{1}{2}$ $c=-2$

5) **Explica por qué no existe la derivada de f(x)=$|x^2-7x+12|$ en x=4**

Primero se define la función a trozos, estudiando qué valores de x anulan el valor absoluto y para qué valores es positiva y para cuáles negativa: g(x)= $x^2-7x+12$ **,** se hace cero si x=3 o si x=4, es positiva si x<3 o si x>4 y es negativa si 3<x4

Así pues, la función es f(x)=$\begin{cases} x^2-7x+12 & \text{si } x<3 \\ -x^2+7x-12 & \text{si } 3\le x\le 4 \\ x^2-7x+12 & \text{si } x>4 \end{cases}$, que es continua en todo $\mathbb{R}$

<u>Estudio de la continuidad para x= 3</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} x^2-7x+12=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} -x^2+7x-12=0 \\ f(3)=0 \end{array}\right\} \text{Como } \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3) \text{ la función es continua}$$

<u>Estudio de la continuidad para x= 4</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} -x^2+7x-12=0 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} x^2-7x+12=0 \\ f(4)=0 \end{array}\right\} \text{Como } \lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=f(4) \text{ la función es continua}$$

<u>Derivabilidad</u>

Si x≠ 3 y x≠ 4 → f (x) es derivable, y su derivada es →

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-7 & \text{si } x<3 \\ -2x+7 & \text{si } 3<x<4 \\ 2x-7 & \text{si } x>4 \end{cases}$$

<u>Estudio de la derivabilidad para x= 3</u>

Para que f (x) sea derivable en *x*=3, han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(3^-)=f(3^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 2x-7=-1 \\ f(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} -2x+7==+1 \end{array}\right\} \to \text{Como } f'(3^-)\neq f(3^+) \text{ no es derivable}$$

<u>Estudio de la derivabilidad para x= 4</u>

Para que f (x) sea derivable en *x*=4, han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(4^-)=f(4^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-)=\lim\limits_{x\to 4^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} -2x+7=-1 \\ f(4^+)=\lim\limits_{x\to 4^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} 2x-7=+1 \end{array}\right\} \to \text{Como } f'(4^-)\neq f(4^+) \text{ no es derivable}$$

La función será continua y no derivable en x=3 y x=4

6) **Se considera la función f(x) =** $\begin{cases} \mathbf{ax + b} & \mathbf{si\ x < 1} \\ \boldsymbol{x^2} \mathbf{- bx + a} & \mathbf{si\ x \geq 1} \end{cases}$

a) Halle el valor de b para que f sea continua en *R*.

b) Para b = $\frac{1}{2}$**, halle el valor de a para que f sea derivable en R.**

<u>Continuidad</u>

En x≠ 1 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

<u>Estudio de la continuidad para x= 1</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} ax + b = a + b \\ \lim_{x\to 1^+} x^2 - bx + a = 1 - b + a \\ f(1) = 1 - b + a \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x=1 se tiene que cumplir $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Por lo tanto tendremos que a+b = 1-b+a →b = $\frac{1}{2}$

<u>Derivabilidad</u>

Si x≠ 1 → f (x) es derivable, y su derivada es → f´(x)= $\begin{cases} a & si\ x < 1 \\ 2x - b & si\ x > 1 \end{cases}$

<u>Estudio de la derivabilidad para x= 1</u>

Para que f (x) sea derivable en x=1, han de ser iguales las derivadas laterales → $f´(1^-) = f(1^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f´(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f´(x) = \lim_{x\to 1^-} a = a \\ f´(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f´(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x - b = 2 - b \end{array}\right\} \rightarrow 2+a = c \rightarrow a = 2 - \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

7) **(EBAU Andalucía 2021) El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:** f(x)= $\begin{cases} \mathbf{-t^2+2t-0,3} & \mathbf{si\ 0,2 \leq t \leq 1,8} \\ \mathbf{0,1t-0,12} & \mathbf{si\ 1,8 < t \leq 5} \\ \mathbf{-0,5t^2+8,3t-28,62} & \mathbf{si\ 5 < t \leq 10} \end{cases}$

En donde t es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio

<u>Continuidad</u>

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Intervalos de Definición</u>

Miramos cada una de las funciones y vemos que la primera función es una polinómica $(-t^2+2t-0,3)$ que está definida en todo su dominio, la segunda función que nos encontramos es una función lineal $0,1t-0,12$ que está definida en todo su dominio y por último nos encontramos una función polinómica $(-0,5t^2+8,3t-28,62)$ que está definida en todo su dominio. Por lo tanto cada una de sus funciones en sus intervalos son continuas.

<u>Puntos de división de cada uno de los intervalos</u>

Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en t=1,8 y t=5.

<u>Estudio de la continuidad para t= 1,8</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 1,8^-} -t^2+2t-0,3=0,06 \\ \lim\limits_{t\to 1,8^+} 0,1t-0,12=0,06 \\ f(1,8)=0,06 \end{array}\right\}$$

Como se cumple $\lim\limits_{t\to 1,8^-} f(x) = \lim\limits_{t\to 1,8^+} f(x) = f(1,8)$ la función es continua en t=1,8

<u>Estudio de la continuidad para t= 5</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 5^-} 0,1t-0,12=0,38 \\ \lim\limits_{t\to 5^+} -0,5t^2+8,3t-28,62=0,38 \\ f(5)=0,38 \end{array}\right\}$$

Como se cumple $\lim\limits_{t\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{t\to 5^+} f(x) = f(5)$ la función es continua en t=5

<u>Derivabilidad</u>

Si x≠ 1 → f (x) es derivable, y su derivada es → f´(x)= $\begin{cases} -2t+2 & si\ 0,2 < t < 1,8 \\ 0,1 & si\ 1,8 < t < 5 \\ -t+8,3 & si\ 5 < t < 10 \end{cases}$

Estudio de la derivabilidad para t = 1,8

Para que f (x) sea derivable en t = 1,8; han de ser iguales las derivadas laterales $\rightarrow f'(1{,}8^-) = f(1{,}8^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1{,}8^-) = \lim\limits_{t\to 1{,}8^-} f'(x) = \lim\limits_{t\to 1{,}8^-} -2t+2 = -2\cdot(1{,}8)+2 = -1{,}6 \\ f'(1{,}8^+) = \lim\limits_{t\to 1{,}8^+} f'(x) = \lim\limits_{t\to 1{,}8^+} 0{,}1 = 0{,}1 \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en t = 1,8

Estudio de la derivabilidad para t = 5

Para que f (x) sea derivable en t=5; han de ser iguales las derivadas laterales $\rightarrow f'(5^-) = f'(5^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5^-) = \lim\limits_{t\to 5^-} f'(x) = \lim\limits_{t\to 5^-} 0{,}1 = 0{,}1 \\ f'(5^+) = \lim\limits_{t\to 5^+} f'(x) = \lim\limits_{t\to 5^+} -t+8{,}3 = -5+8{,}3 = 3{,}3 \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en t = 5

8) **Se considera la función f(x) =** $\begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en todo su dominio

Continuidad

En x≠0 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

Estudio de la continuidad para x= 0

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} (x+1)^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1)^2 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\}$$

Como se cumple que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, la función es continua en x=0

Derivabilidad

Si x≠ 0 → f (x) es derivable, y su derivada es → f´(x)= $\begin{cases} 2 \cdot (x+1) & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2 \cdot (x-1) & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$

Estudio de la derivabilidad para x=0

Para que f (x) sea derivable en x=0, han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(0^-) = f(0^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2(x+1) = 2 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2(x-1) = -2 \end{array}\right\}$$

Como $f'(0^-) \neq f(0^+) \rightarrow$ la función no es derivable en $x = 0$

9) (EBAU Andalucía Extraordinaria 2020) Se considera la función f(x) = $\begin{cases} 2+\frac{a}{x-1} & \text{si } x<0 \\ a+be^{x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ **Calcule los valores a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.**

La función dada está definida en todo R; y cada una de las tres funciones que la determinan es continua y derivable en todo su dominio: la primera es racional con una discontinuidad en x = 1, pero ese punto no está en su dominio de definición, que es el intervalo $(-\infty, \mathbf{0})$, 6), las segunda es de tipo exponencial que está definida en todo su dominio. Por lo tanto cada una de sus funciones en sus intervalos son continuas.

La única dificultad para su continuidad y derivabilidad se da en los puntos x = 0.

<u>Estudio de la continuidad para x= 0</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} 2+\frac{a}{x-1} = 2-a \\ \lim_{x\to 0^+} a+be^{x} = a+b \\ f(0) = a+b \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua se tiene que cumplir que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

2 – a = a + b → 2a +b = 2

<u>Derivabilidad</u>

Si x≠ 0 → f (x) es derivable, y su derivada es → f´(x)= $\begin{cases} 0+\frac{0\cdot(x-1)-1\cdot a}{(x-1)^2} & \text{si } x<0 \\ be^{x}\cdot 1\cdot \ln e & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ → f´(x)= $\begin{cases} \frac{-a}{(x-1)^2} & \text{si } x<0 \\ be^{x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

<u>Estudio de la derivabilidad para x = 0</u>

Para que f (x) sea derivable en x=0, han de ser iguales las derivadas laterales → $f´(0^-) = f(0^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f´(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f´(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-a}{(x-1)^2} = -a \\ f´(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f´(x) = \lim_{x\to 0^+} be^{x} = b \end{array}\right\} \to \text{Para que la función sea derivable } f´(0^-) = f(0^+) \to -a = b$$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 2a+b=2 \\ -a=b \end{cases} \to \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$

10) **(EBAU Andalucía Extraordinaria 2020. Se considera la función** $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x \le 2 \\ -x^2+6x-8 & \text{si } 2 < x < 4 \\ \frac{x-3}{x} & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

Estudie la continuidad y derivabilidad de f en su dominio.

En x≠ 2 y x≠ 4 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

Estudio de la continuidad para x = 2

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} -x+2 = 0 \\ \lim_{x\to 2^+} -x^2+6x-8 = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\}$$

Como se cumple $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ la función es continua en x=2

Estudio de la continuidad para x = 4

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 4^-} -x^2+6x-8 = 0 \\ \lim_{x\to 4^+} \frac{x-3}{x} = \frac{1}{4} \\ f(4) = \frac{1}{4} \end{array}\right\}$$

Como $\lim_{x\to 4^-} f(x) \ne \lim_{x\to 4^+} f(x)$ Como los límites laterales no coinciden (no existirá el límite en x=4 ($\nexists \lim_{x\to 4} f(x)$) y ambos toman valores finitos, en x=4 tendremos una Discontinuidad Inevitable de salto Finito de valor $\frac{1}{4}$.

Derivabilidad

Si x≠ 2 y x≠ 4 → f (x) es derivable, y su derivada es →

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ -2x+6 & \text{si } 2 < x < 4 \\ \frac{1\cdot x - 1\cdot(x-3)}{x^2} & \text{si } x > 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ -2x+6 & \text{si } 2 < x < 4 \\ \frac{3}{x^2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Estudio de la derivabilidad para x = 2

Para que f (x) sea derivable en x =2; han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(2^-) = f(2^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} -1 = -1 \\ f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} -2x+6 = -2\cdot 2+6 = 2 \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en x=2

Estudio de la derivabilidad para x = 4

En x = 4 no es derivable ya que no es continua.

La función es continua en R - {4} y la función es derivable en R - {2,4}

11) **(EBAU Canarias Extraordinaria 2021) Durante los últimos 10 años, los costos en comunicaciones de una empresa, en decenas de miles de euros, vienen dados por la función:**

$$f(x)=\begin{cases} \frac{(t-1)^2}{3}+4 & \text{si } t\in[0,4] \\ \frac{18-t}{2} & \text{si } t\in(4,10] \end{cases}$$ **siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:**

a) ¿Es continua (t)? b) ¿Cuándo (t) es derivable?

La función dada está definida en todo R; y cada una de las dos funciones que la determinan es continua y derivable en todo su dominio: la primera es cuadrática, la segunda es de tipo lineal.

<u>Puntos de división de cada uno de los intervalos</u>

Por último miro si la función es continua en el punto de división, en nuestro caso en t=4.

<u>Estudio de la continuidad para t = 4</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 4^-} \frac{(t-1)^2}{3}+4=7 \\ \lim\limits_{t\to 4^+} \frac{18-t}{2}=7 \\ f(4)=7 \end{array}\right\}$$

Como se cumple $\lim\limits_{t\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{t\to 4^+} f(x)=f(4)\to$ la función es continua [0,10] en t=4

<u>Derivabilidad</u>

Si t≠ 4 → f (x) es derivable, y su derivada es → $f'(x)=\begin{cases} \frac{2(t-1)}{3} & \text{si } t\in(0,4) \\ \frac{-1}{2} & \text{si } t\in(4,10) \end{cases}$

<u>Estudio de la derivabilidad para t = 4</u>

Para que f (x) sea derivable en t =4; han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(4^-)=f(4^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-)=\lim\limits_{t\to 4^-} f'(x)=\lim\limits_{t\to 4^-}\frac{2(t-1)}{3}=\frac{2(4-1)}{3}=2 \\ f'(4^+)=\lim\limits_{t\to 4^+} f'(x)=\lim\limits_{t\to 4^+}\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2} \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en t=4

La función es continua en [0,10] y la función es derivable en [0,4)∪ (4,10]

12) **(Madrid. EVAU Extraordinaria 2021) Dada la función real de variable real definida por:**

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2 - x - 1} & \mathbf{si\ x \leq 3} \\ \mathbf{\frac{3a}{x}} & \mathbf{si\ x > 3} \end{cases}$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que la función f(x) sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es f(x) derivable?

La función dada está definida en todo R; y cada una de las dos funciones que la determinan es continua y derivable en todo su dominio: la primera es cuadrática, la segunda es de tipo racional con una discontinuidad en x = 0, pero ese punto no está en su dominio de definición, que es el intervalo (3, ∞).

<u>Puntos de división de cada uno de los intervalos</u>

Por último miro si la función es continua en el punto de división, en nuestro caso en x = 3.

<u>Estudio de la continuidad para x = 3</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} x^2 - x - 1 = 5 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{3a}{x} = \frac{3a}{3} = a \\ f(3) = 5 \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua se tiene que cumplir que $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3) \rightarrow a = 5$

<u>Derivabilidad</u>

Si x≠ 3 → f (x) es derivable, y su derivada es → $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si\ x < 3 \\ \frac{-3a}{x^2} = \frac{-15}{x^2} & si\ x > 3 \end{cases}$

<u>Estudio de la derivabilidad para x = 3</u>

Para que f (x) sea derivable en x =3; han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(3^-) = f(3^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 2x - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ f'(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{-15}{x^2} = \frac{-15}{3^2} = \frac{-5}{3} \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en x=3

La función no es derivable en x= 3 cuando a = 5

13) **(Navarra EBAU Extraordinaria 2020) Considere la siguiente función definida a trozos:**

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si } 1 < x < 4 \\ 2x - 11 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}}$$

Calcule las derivadas laterales de f(x) en x = 4, utilizando la definición de derivada. ¿La función f(x) es derivable en x = 4?

En x≠1 y x≠4 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

<u>Estudio de la continuidad para x = 1</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} 1 - x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} \text{Como se cumple } \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \rightarrow \text{la función es continua en x= 1}$$

<u>Estudio de la continuidad para x = 4</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} x^2 - 6x + 5 = -3 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} 2x - 11 = -3 \\ f(4) = -3 \end{array}\right\}$$

Como se cumple $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4) \rightarrow$ la función es continua en x= 4

<u>Derivabilidad</u>

Si x≠ 1 y x ≠ 4 → f (x) es derivable, y su derivada es → $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 6 & \text{si } 1 < x < 4 \\ 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

<u>Estudio de la derivabilidad para x = 1</u>

Para que f (x) sea derivable en x =1; han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(1^-) = f(1^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} -2x = -2\cdot 1 = -2 \\ f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x - 6 = 2\cdot 1 - 6 = -4 \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en x = 1

<u>Estudio de la derivabilidad para x = 4</u>

Para que f (x) sea derivable en x =4; han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(4^-) = f(4^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-) = \lim\limits_{x\to 4^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} 2x - 6 = 2\cdot 4 - 6 = 2 \\ f'(4^+) = \lim\limits_{x\to 4^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} 2 = 2 \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en x=4

La función es continua en R y la función es derivable en R - {1}

14) **(Navarra. EvAU Junio 2017) Dada la función f(x) =** $\begin{cases} \mathbf{2x+5} & \mathbf{si\ x<-2} \\ \mathbf{x^2+2x+1} & \mathbf{si\ -2\leq x<1} \\ \mathbf{-x^2+2} & \mathbf{si\ x\geq 1}\end{cases}$

su continuidad y derivabilidad en todo R.

La función dada está definida en todo R; y cada una de las dos funciones que la determinan es continua y derivable en todo su dominio: la segunda y la tercera función son cuadráticas, la primera es lineal. Por lo tanto cada una de sus funciones en sus intervalos son continuas.

__Puntos de división de cada uno de los intervalos__

Por último miro si la función es continua en el punto de división, en nuestro caso en x = -2 y x = 1.

__Estudio de la continuidad para x = -2__

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} 2x+5 = 1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} x^2+2x+1 = 1 \\ f(-2) = 1 \end{array}\right\}$$ Se cumple $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) \to$ la función es continua en x= -2

__Estudio de la continuidad para x = 1__

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} x^2+2x+1 = -3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} -x^2+2 = 1 \\ f(1) = -3 \end{array}\right\}$$

Como se cumple $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y ambos toman valores finitos $\to$ la función no es continua en x= 1

Presenta una Discontinuidad Inevitable de Salto Finito de valor 4

__Derivabilidad__

Si x$\neq -2$ y $x \neq 1 \to$ f (x) es derivable, y su derivada es $\to$ f´(x)= $\begin{cases} 2 & si\ x<-2 \\ 2x+2 & si\ -2<x<1 \\ -2x & si\ x>1 \end{cases}$

__Estudio de la derivabilidad para x = -2__

Para que f (x) sea derivable en x =-2; han de ser iguales las derivadas laterales $\to f'(-2^-) = f(-2^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = \lim\limits_{x\to -2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} 2 = 2 \\ f'(-2^+) = \lim\limits_{x\to -2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} 2x+2 = 2\cdot(-2)+2 = -2 \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en x=-2

__Estudio de la derivabilidad para x = 1__

Como f (x) no es continua en x = 1, tampoco será derivable en este punto.

La función es continua en R - $\{1\}$ y la función es derivable en R - $\{-2,1\}$

15) **(Andalucía. PEvAU Junio 2019). Sea la función f(x) =** $\begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.

La función dada está definida en todo R; y cada una de las dos funciones que la determinan es continua y derivable en todo su dominio: la segunda es cuadrática, la primera es de tipo racional con una discontinuidad en x = 1, pero ese punto no está en su dominio de definición, que es el intervalo $(-\infty, \mathbf{0})$.

Puntos de división de cada uno de los intervalos

Por último miro si la función es continua en el punto de división, en nuestro caso en x = 0.

Estudio de la continuidad para x = 0

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x-1} = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} x^2 + a = a \\ f(0) = a \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua se tiene que cumplir que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \to$ a = -1

Derivabilidad

Si x≠ 0 → f (x) es derivable, y su derivada es →

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Estudio de la derivabilidad para x = 0

Para que f (x) sea derivable en x =0; han de ser iguales las derivadas laterales $\to f'(0^-) = f(0^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(0-1)^2} = -1 \\ f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 2\cdot 0 = 0 \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en x=3

La función es continua en R si a = -1 y la función es derivable en R - {0}

16) **(Andalucía. PEvAU Septiembre 2018) El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara lo largo de 50 años viene dado por : B(t) =** $\begin{cases} -0,04\,t^2 + 2,4t & \text{si } 0 \le t < 40 \\ \frac{40t-320}{t} & \text{si } 40 \le t \le 50 \end{cases}$

donde t es el tiempo transcurrido. a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función B(t) en el intervalo [0, 50].

La función dada está definida en todo R; y cada una de las dos funciones que la determinan es continua y derivable en todo su dominio: la primera es cuadrática, la segunda es de tipo racional con una discontinuidad en t=0, pero ese punto no está en su dominio de definición, que es el intervalo (40, 50).

Puntos de división de cada uno de los intervalos

Por último miro si la función es continua en el punto de división, en nuestro caso en t = 40.

Estudio de la continuidad para t = 40

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 40^-} -0,04\,t^2 + 2,4t = 32 \\ \lim\limits_{t\to 40^+} \frac{40t-320}{t} = 32 \\ f(40) = 32 \end{array}\right\}$$

Como se cumple $\lim\limits_{t\to 40^-} f(x) = \lim\limits_{t\to 40^+} f(x) = f(40) \to$ la función es continua en t= 40

Derivabilidad

Si t$\neq$ 40 → f (x) es derivable, y su derivada es →

$$f'(x) = \begin{cases} -0,08t + 2,4 & \text{si } 0 < t < 40 \\ \frac{40\cdot t - 1\cdot(40t-320)}{t^2} = \frac{320}{t^2} & \text{si } 40 < t < 50 \end{cases}$$

Estudio de la derivabilidad para t = 40

Para que f (x) sea derivable en t = 40; han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(40^-) = f(40^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(40^-) = \lim\limits_{t\to 40^-} f'(x) = \lim\limits_{t\to 40^-} -0,08t + 2,4 = -\,0,08\cdot 40 + 2,4 = -0,8 \\ f'(40^+) = \lim\limits_{t\to 40^+} f'(x) = \lim\limits_{t\to 40^+} \frac{320}{t^2} = \frac{320}{40^2} = 0,2 \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en t=40

La función es continua en R y la función es derivable en R - {40}

17) **(EBAU Cantabria Junio 2017) Dada la función** $f(x) = \begin{cases} ax^2+5x-2 & \text{si } x \le -1 \\ \frac{x+3}{x^2+5} & \text{si } -1 < x \le 7 \\ \frac{bx+1}{(x-5)^2} & \text{si } x > 7 \end{cases}$ **, determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales es continua en x = –1 y x = 7.**

Estudio de la continuidad para x = -1

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} ax^2+5x-2 = a-7 \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{x+3}{x^2+5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ f(-1) = a(-1)^2+5\cdot(-1)-2 = a-7 \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x=-1, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

$$a-7 = \frac{1}{3} \to a = \frac{22}{3}$$

Estudio de la continuidad para x =7

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 7^-} \frac{x+3}{x^2+5} = \frac{10}{54} = \frac{5}{27} \\ \lim_{x\to 7^+} \frac{bx+1}{(x-5)^2} = \frac{7b+1}{2^2} = \frac{7b+1}{4} \\ f(7) = \frac{7+3}{7^2+5} = \frac{10}{54} = \frac{5}{27} \end{array}\right\}$$ Para que la función sea continua, se tiene que cumplir: $\lim_{x\to -7^-} f(x) = \lim_{x\to -7^+} f(x) = f(7)$

$$\frac{7b+1}{4} = \frac{5}{27} \to \mathbf{b = -\frac{1}{27}}$$

Para que la función sea continua en x=-1 y x= 7 $\begin{cases} \mathbf{a = \frac{22}{3}} \\ \mathbf{b = -\frac{1}{27}} \end{cases}$

Derivabilidad

Si $x \neq -1$ y $x \neq 7 \to$ f (x) es derivable, y su derivada es $\to$

$$f´(x) = \begin{cases} 2ax+5 = \frac{44x}{3}+5 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1\cdot(x^2+5)-2x\cdot(x+3)}{(x^2+5)^2} = \frac{-x^2-6x+5}{(x^2+5)^2} & \text{si } -1 < x < 7 \\ \frac{b\cdot(x-5)^2-2\cdot(x-5)\cdot(bx+1)}{(x-5)^4} = \frac{-bx-5b-2}{(x-5)^3} = \frac{\frac{x}{27}+\frac{5}{27}-2}{(x-5)^3} & \text{si } x > 7 \end{cases}$$

Estudio de la derivabilidad para x = -1

Para que f (x) sea derivable en x= -1; han de ser iguales las derivadas laterales $\to f´(-1^-) = f(-1^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f´(-1^-) = \lim_{x\to -1^-} f´(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{44x}{3}+5 = \frac{44\cdot(-1)}{3}+5 = -\frac{29}{3} \\ f´(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} f´(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x^2-6x+5}{(x^2+5)^2} = \frac{-(-1)^2-6(-1)+5}{((-1)^2+5)^2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en x = -1

Estudio de la derivabilidad para x = 7

Para que f (x) sea derivable en x= 7; han de ser iguales las derivadas laterales $\rightarrow$ $f´(7^-) = f(7^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f´(7^-) = \lim\limits_{x\to7^-} f´(x) = \lim\limits_{x\to7^-} \frac{-x^2-6x+5}{(x^2+5)^2} = \frac{-7^2-6\cdot7+5}{(7^2+5)^2} = \frac{-86}{2916} = -\frac{43}{1458} \\ f´(7^+) = \lim\limits_{x\to7^+} f´(x) = \lim\limits_{x\to7^+} \frac{\frac{x}{27}+\frac{5}{27}-2}{(x-5)^3} = \frac{\frac{x}{27}+\frac{5}{27}-2}{(x-5)^3} = \frac{-13}{54} \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en x = 7

18) **(Aragón EBAU Ordinaria 2022) Siendo a, b parámetros reales, se considera la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 + 2\sqrt{3}} & \textbf{si } x \le 0 \\ \boldsymbol{\sqrt{ax+b}} & \textbf{si} 0 < x \le 3 \\ \frac{7}{2} - \frac{x}{6} & \textbf{si } x > 3 \end{cases}$$

Determine el valor de los parámetros para que f(x) sea continua. Para dichos valores, analice si f(x) es derivable en x = 0 y en x = 3.

Estudio de la continuidad para x = 0

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^-} x^2 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{ax+b} = \sqrt{b} \\ f(0) = \sqrt{b} \end{array}\right\} \rightarrow$$

Para que la función sea continua en x= 0, se tiene que cumplir que: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{b} \rightarrow b = 12$$

Estudio de la continuidad para x =3

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to3^-} \sqrt{ax+b} = \sqrt{3a+b} \\ \lim\limits_{x\to3^+} \frac{7}{2} - \frac{x}{6} = 3 \\ f(3) = \sqrt{3a+b} \end{array}\right\} \rightarrow$$

Para que la función sea continua en x=3, se tiene que cumplir: $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} f(x) = f(3)$

$$\sqrt{3a+b} = 3 \rightarrow \mathbf{a} = -1$$

Para que la función sea continua en x=0 y x= 3 $\begin{cases} \mathbf{a} = -1 \\ \mathbf{b} = 12 \end{cases}$

Derivabilidad

Si x≠ 0 y x ≠ 3 → f (x) es derivable, y su derivada es → f´(x)= $\begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} & \text{si } 0 < x < 3 \\ -\frac{1}{6} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Estudio de la derivabilidad para x = 0

Para que f (x) sea derivable en x= 0; han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(0^-) = f(0^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2x = 0 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-1}{2\sqrt{-x+12}} = -\frac{1}{2\sqrt{12}} \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en x = 0

Estudio de la derivabilidad para x = 3

Para que f (x) sea derivable en x= 3; han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(3^-) = f(3^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = \lim\limits_{x\to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{-1}{2\sqrt{-x+12}} = \frac{-1}{6} \\ f'(3^+) = \lim\limits_{x\to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} -\frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en x = 3

19) **(Canarias. EBAU Extraordinaria 2020). Durante los últimos 10 años el déficit en las cuentas de una institución, en millones de euros, viene dado por la función: f(x) =** $\begin{cases} -\frac{(t-2)^2}{4} + 5 & \text{si } t \in [0,4] \\ \frac{(t-7)^2}{9} + 3 & \text{si } t \in (4,10] \end{cases}$ **siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta: a) ¿Es continua D(t)? Representarla gráficamente. b) ¿Es D(t) derivable?**

La función dada está definida en todo R; y cada una de las dos funciones que la determinan es continua y derivable en todo su dominio: las dos funciones son cuadráticas.

Puntos de división de cada uno de los intervalos

Por último miro si la función es continua en el punto de división, en nuestro caso en t = 4.

Estudio de la continuidad para t = 4

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 4^-} -\frac{(t-2)^2}{4}+5 = 4 \\ \lim\limits_{t\to 4^+} \frac{(t-7)^2}{9}+3 = 4 \\ f(4) = 4 \end{array}\right\}$$

Como se cumple $\lim\limits_{t\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{t\to 4^+} f(x) = f(4) \rightarrow$ la función es continua en t= 4

Derivabilidad

Si t$\neq$ 4 $\rightarrow$ f (x) es derivable, y su derivada es $\rightarrow$

$$f'(x)= \begin{cases} -\frac{2(t-2)}{4} = -\frac{(t-2)}{2} & \text{si } 0 < t < 4 \\ \frac{2(t-7)}{9} & \text{si } 4 < t < 10 \end{cases}$$

Estudio de la derivabilidad para t = 4

Para que f (x) sea derivable en t = 4; han de ser iguales las derivadas laterales $\rightarrow f'(4^-) = f(4^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-) = \lim\limits_{t\to 4^-} f'(x) = \lim\limits_{t\to 4^-} -\frac{(t-2)}{2} = -1 \\ f'(4^+) = \lim\limits_{t\to 4^+} f'(x) = \lim\limits_{t\to 4^+} \frac{2(t-7)}{9} = \frac{-2}{3} \end{array}\right\}$$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en t=4

La función es continua en el intervalo [0,10] y la función es derivable en [0,4)∪ (4,10]