PRIMITIVA Integración es el proceso Recíproco de la Derivación

Primitiva de una función f(x): F(x) es una primitiva de f(x) si F´(x) = f(x)

Ejemplos:	**Función: f(x)**	**Primitiva: F(x)**
	2x	x^2
	3^x	$\frac{3^x}{Ln3}$
	$\frac{1}{x}$	$\text{Ln}\lvert x\rvert$

Una función tiene infinitas primitivas

Ejemplos:	**Función: f(x)**	**Primitiva: F(x)**
	2x	x^2
	2x	x^2-1
	2x	x^2+7
	2x	x^2+C

Integral Indefinida de f(x)

Llamamos integral indefinida o simplemente integral de f(x) al conjunto de todas sus primitivas y se denota:

$\int f(x)dx = F(x) + C$ se tiene que cumplir que F´(x)=f(x)

Ejemplos:

- $\int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + C$
- $\int 4^{2x}dx = \frac{1}{2}\int 2 \cdot 4^{2x}\ dx = \frac{1}{2}\frac{4^{2x}}{\ln 4} + C$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \text{Ln}|x| + C$

Operaciones con Integrales

- $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$
- $\int (f \pm g)(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int (f \cdot g)(x)dx \neq [\int f(x)dx] \cdot \int g(x)dx$
- $\int \left(\frac{f}{g}\right)(x)\ dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

Propiedades de Integración

Función	Integral	Función	Integral
$\int kdx$	$\text{Kx} + \text{C}$		
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{C}$	$\int f'(x) \cdot f^n(x) dx$	$\frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + \text{C}$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$	$\sqrt{x} + \text{C}$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx$	$\sqrt{f(x)} + \text{C}$
$\int \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} dx$	$\sqrt[n]{x} + \text{C}$	$\int \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}} dx$	$\sqrt[n]{f(x)} + \text{C}$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{Lna} + \text{C}$	$\int f'(x) \cdot a^{f(x)} dx$	$\frac{a^{f(x)}}{Lna} + \text{C}$
$\int e^x dx$	$e^x + \text{C}$	$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx$	$e^{f(x)} + \text{C}$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\text{Ln } \lvert x \rvert + \text{C}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$\text{Ln } \lvert f(x) \rvert + \text{C}$

Integrales Tipo Constante

$\int dx = x + C$

$$\int 1000 \, dx = 1000 \cdot \int dx = 1000x + C$$

$$\int -36dx = -36 \int dx = -36x + C$$

$$\int \frac{3}{5} dx = \frac{3}{5} \int dx = \frac{3}{5} x + C$$

Integrales Tipo Potencial

$$\int \mathbf{f'(x)\cdot f^{n}(x)dx} = \frac{\mathbf{f^{n+1}(x)}}{\mathbf{n+1}} + C$$

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$

$\int (x^2+4)^3 \cdot 5x\, dx = 5\cdot \int (x^2+4)^3 \cdot x\, dx = \frac{5}{2}\cdot \int (x^2+4)^3 \cdot 2x\, dx = \frac{5(x^2+4)^4}{8} + C$

$\int 2x^3 dx = 2\int x^3 dx = 2\cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{2} + C$

$\int \sqrt[3]{2x^2}\, dx = \sqrt[3]{2}\int x^{2/3} dx = \sqrt[3]{2}\cdot \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x^5} + C = \frac{3x\sqrt[3]{2x^2}}{5} + C$

$\int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$

$\int \frac{5}{x^3}\, dx = 5\int x^{-3} dx = 5\frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{5}{2x^2} + C$

$\int (2x+1)(x^2+x+1)^{20} dx = \frac{(x^2+x+1)^{21}}{21} + C$

$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3}\right) dx = \int x^{-1/2} dx + \frac{1}{3}\int x\, dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{1}{3}\frac{x^2}{2} + C = 2\sqrt{x} + \frac{x^2}{6} + C$

$\int (2x^3 - 3x + 5) dx = \int 2x^3 dx - \int 3x dx + \int 5 dx = 2\int x^3 dx - 3\int x dx + 5\int dx = \frac{2x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 5x + C$

Integrales Tipo Exponencial

$$\int \boldsymbol{f'(x)\cdot a^{f(x)}\, dx} = \frac{\boldsymbol{a^{f(x)}}}{\boldsymbol{Lna}} + C$$

$$\int \boldsymbol{f'(x)\cdot e^{f(x)}\, dx} = \boldsymbol{e^{f(x)}} + C$$

$\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x+1} dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$

$\int 5^{3x} dx = \frac{1}{3}\int 3\cdot 5^{3x}\, dx = \frac{1}{3}\frac{5^{3x}}{\ln 5} + C$

$\int 3^{4x^2-3x}\cdot (8x-3) dx = \frac{3^{4x^2-3x}}{\ln 3} + C$

Integrales Tipo Logarítmico

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \text{Ln}\,|f(x)| + C$$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int \frac{1}{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{5}\ \ln|x| + C$

$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

$\int \frac{x^2}{x^3+6}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+6}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+6| + C$

$\int \frac{3x}{x^2+2}\,dx = 3\int \frac{x}{x^2+2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \frac{3}{2}\text{Ln}|x^2+2| + C$

Integración de Funciones Racionales

1) Cociente de Polinomios

Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, dividiremos numerador entre denominador. La división la expresamos como cociente + resto/divisor.

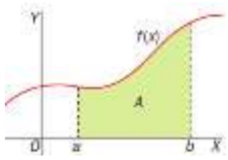
$\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int (1 + \frac{1}{x})\,dx = x + \ln|x| + C$

$\int \frac{2x^3+x^2-x}{x^2}\,dx = \int \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{2x^2}{2} + x + \ln|x| + C$

$\int \frac{x^2-3x+4}{x-1}\,dx = \int \left(x - 2 + \frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\text{Ln}|x-1| + C$

Integral Definida. Área bajo una curva (Regla de Barrow)

El área entre la gráfica de la función y=f(x) y el eje X, en el intervalo [a,b] se designa:



$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$ = F(b)-F(a)

Ejemplos:

- $\int_{-2}^{3}(3x^2 - x)dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{3} = \left[27 - \frac{9}{2}\right] - \left[-8 - \frac{4}{2}\right] = 27 - \frac{9}{2} + 8 + 2 = 37 - \frac{9}{2} = \frac{65}{2}$
- $\int_0^1 \frac{2}{x+3}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x+3}dx = [2\ln|x+3|]_0^1$ = 2ln 4 – 2ln 3 = ln $4^2 - \text{Ln}3^2 = \text{Ln}\frac{16}{9}$
- $\int_{-1}^{0} e^{3x+3}dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} 3e^{3x+3}dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x+3}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{1}{3}\, e^{0+3}\right] - \left[\frac{1}{3}e^{0}\right] = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{e^3-1}{3}$
- $\int_0^1 \left(\frac{-x^4}{3} + 2x^2\right) dx = \left[\frac{-x^5}{15} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{-1}{15} + \frac{2}{3}\right] - [0] = \frac{-1+10}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$
- $\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}dx = \; [\ln|x+1|]_0^{e-1} = [\ln(e)] - \ln 1 = 1 - 0 = 1$
- $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx = \left[\frac{1}{2}\,\text{Ln}|x^2-1|\right]_2^3 = \left[\frac{1}{2}\,\text{Ln}8\right] - \left[\frac{1}{2}\,\text{Ln}3\right] = \text{Ln}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \text{Ln}\sqrt{\frac{8}{3}}$

Propiedades de la integral Definida

- $\int_a^a f(x) = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Signo de la Integral:
  - Si f(x)>0 y continua en [a,b], entonces $\int_a^b f(x)dx > 0$
  - Si f(x)<0 y continua en [a,b], entonces $\int_a^b f(x)dx < 0$
- Propiedad de aditividad del intervalo: si f es integrable en los dos intervalos cerrados definidos por a, b y c entonces:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

- Si f(x)≤ g(x) en cada xϵ [a,b] → $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Operaciones con Integrales definidas

- Suma y resta : $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- Multiplicación por un escalar: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

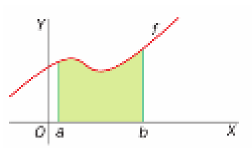
Cálculo de Áreas

Área entre una función y el Eje X

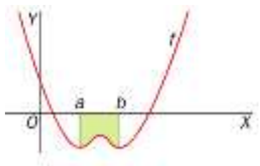
Sea f(x) una función y estamos interesados en calcular el área comprendida entre la gráfica f(x) y el eje OX y las rectas x=a , x=b (a<b)

I. * Si f(x)>0 en [a,b], el área del recinto limitado por la curva de ecuación y=f(x), el eje OX y las rectas x=a, y=b (a<b) es:

Área = $\int_a^b f(x)dx$

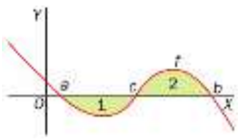


- Si f(x)<0 en [a,b] , el área será : Área= $\int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx$



- Si la función cambia de signo en [a,b] por ejemplo, f(x)≤ 0 en [a,c] y f(x)≥ 0 en [c,b], se define:

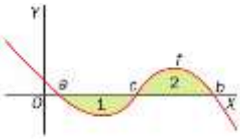
$\int_a^b f(x)dx = -(Área\ 1) + (Área\ 2)$= $|Área\ 1| + |Área\ 2|$



1) Calculamos los puntos de Corte de nuestra función f(x) con el eje OX.

2) Ordenamos de menor a mayor las soluciones que hayamos obtenido. Sólo tendremos en cuenta los valores que estén dentro de nuestro intervalo [a,b]

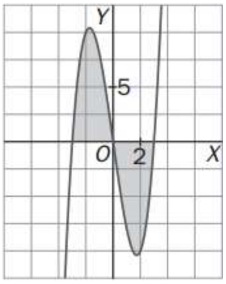
3) Si las soluciones que hemos obtenido con el corte con el eje son x_1 y x_2 $a< x_1< x_2 < b$



El área pedida será:

$$A= \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

Ejemplo: **Calcula el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función $g(x)= x^3-9x$ en el eje OX.**



1) Calculamos los puntos de Corte de nuestra función f(x) con el eje OX.

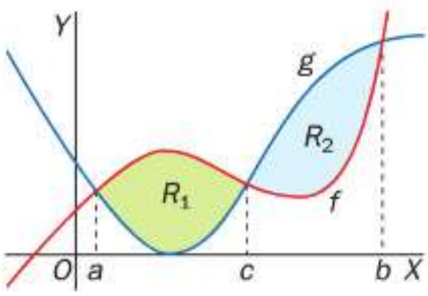
$x^3-9x=0 \rightarrow x= -3, x=0$ y $x=3$

2) Se forman dos recintos, uno sobre el eje X para x en el intervalo [-3,0] y otro bajo el eje X para x en el intervalo [0,3]

3) El área buscada es:

$$A= \left|\int_{-3}^{0}(x^3-9x)dx\right| + \left|\int_0^3(x^3-9x)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right| = \frac{81}{2}\,u^2$$

Área del recinto limitado por dos curvas



- En primer lugar se obtienen los puntos de corte de las dos funciones. Las abscisas de dichos puntos son a,b y c.
- Estos puntos dividen el intervalo [a,b] en dos subintervalos [a,c] y [c,b].
- El área del recinto se puede calcular entonces como la suma de las áreas de los recintos determinados por las curvas en cada uno de los subintervalos.

- Cada una de estas áreas (R_1 y R_2) lo calculamos restando la función que está por encima menos la función que está por debajo.

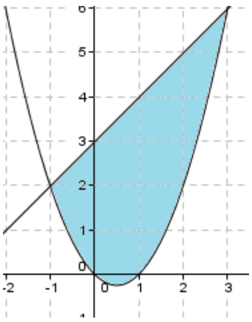
  Área R_1= $\int_a^c [f(x) - g(x)]dx$ → Observamos que en este área f(x) está por encima de g(x)

  Área R_2= $\int_c^b [g(x) - f(x)]dx$ → Observamos que en este área g(x) está por encima de f(x)

  Área_{total}= Área R_1+ Área R_2 = $\int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]dx$

Nota: Siempre que el área nos dé un valor negativo aplicaremos el valor absoluto y podremos ese resultado con un valor positivo.

Ejemplo: Halla el área del recinto limitado entre las dos curvas f(x)= x^2-x y g(x)=x+3



- Calculamos los puntos en donde se cortan las funciones f(x) y g(x) : (-1,2) y en (3,6)

- Calculamos el Área, sabiendo que la función g(x)=x+3 está por encima de $f(x) = x^2 - x$

Área= $\int_{-1}^{3}[\mathrm{g(x) - f(x)}]\mathrm{dx} = \int_{-1}^{3}[(\mathrm{x}+3) - (\mathrm{x}^2 - \mathrm{x})]\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^{3}[-\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 3]\mathrm{dx} = \left[\frac{-\mathrm{x}^3}{3} + \frac{2\mathrm{x}^2}{2} + 3\mathrm{x}\right]_{-1}^{3} =$

$=\left[\frac{-3^3}{3} + \frac{2\cdot 3^2}{2} + 3\cdot 3\right] - \left[\frac{-(-1)^3}{3} + \frac{2(-1)^2}{2} + 3(-1)\right] = [-9+9+9] - \left[\frac{1}{3} + 1 - 3\right] = [9] - \left[\frac{-5}{3}\right] = 9 + \frac{5}{3} =$

$\text{Área} = \frac{32}{3}\mathrm{u}^2$