Continuidad de una función

Una función f(x) es continua en el punto x = a, si existe el límite cuando x tiende a "a" y coincide con el valor de la imagen de "a", f(a)

Es continua si → $\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Una función es continua en un punto x = a si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $\exists \lim_{x\to a-} f(x)$; $\exists \lim_{x\to a+} f(x)$ y $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$
2. $\exists$ f(a)
3. Los límites laterales son iguales y coinciden con el valor de la función en ese punto. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

- Para que tenga sentido de hablar de continuidad en un punto, este debe pertenecer al dominio de la función.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x}{x-1}$ D(f) = $x \in \mathbb{R} - \{x = 1\}$

f(x) no sería continua en x = 1

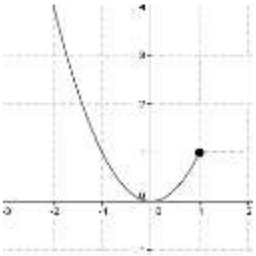
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = \frac{+}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{+}{0^+} = +\infty\end{array}\right\} \text{Por lo tanto } \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1}$$

Por lo tanto la función f(x) tendría una discontinuidad inevitable de salto infinito en x = 1 ya que los límites laterales tienden a valores infinitos.

Continuidad Lateral

Continuidad por la izquierda

Una función f(x) es continua por la izquierda en el punto x = a si:

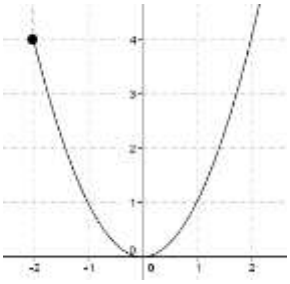


$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 1$$

La función es continua por la izquierda ya que el límite lateral por la izquierda coincide con el valor de la función en ese punto.

Continuidad por la derecha

Una función f(x) es continua por la derecha en el punto x = a si:



$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2) = 4$$

La función es continua por la derecha ya que el límite lateral por la derecha coincide con el valor de la función en ese punto.

Continuidad en un intervalo

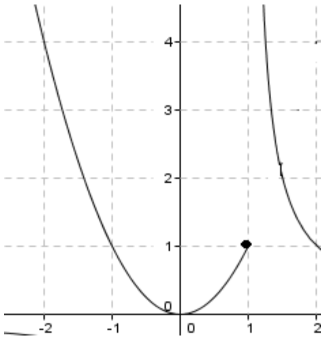
- Una función es continua en un intervalo abierto (a,b) si lo es en cada uno de los puntos interiores.
- Una función es continua en un intervalo cerrado [a,b] si lo es tanto en los puntos interiores como por la derecha en “a” y por la izquierda en b.

Tipos de discontinuidad

Discontinua inevitable de salto infinito

Una discontinuidad es inevitable o de primera especie si los límites laterales en x=a son distintos. Y es de salto Infinito si alguno de los límites laterales es infinito o no existe.

Ejemplo: f(x)=$\begin{cases} x^2 \; si \; x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} \; si \; x > 1 \end{cases}$



$\lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$

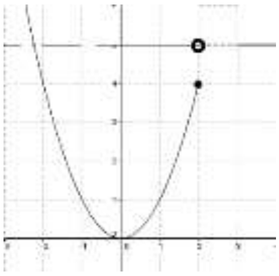
$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

f (1) = 1

Como uno de los límites laterales tiende a valores infinitos → Tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito.

Discontinua inevitable de salto finito

Si los dos límites laterales son finitos pero distintos. El salto es la diferencia, en valor absoluto, de los límites laterales.



$\exists \lim_{x \to a^-} f(x); \exists \lim_{x \to a^+} f(x)$ pero $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ y ambos toman valores finitos

Salto = $\left| \lim_{x \to a^-} f(x) - \lim_{x \to a^+} f(x) \right|$

Ejemplo: f(x)=$\begin{cases} x^2 \; si \; x \leq 2 \\ 5 \; si \; x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$

$\lim_{x \to 2^+} 5 = 5$

f (2) = 4

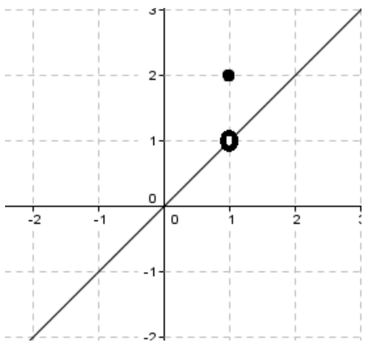
Como $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$ y ambos toman valores finitos, en x=2 tendremos una discontinuidad inevitable de salto finito de valor 1.

Discontinua Evitable

Si los dos límites laterales son finitos e iguales, pero su valor no coincide con f(a) o no existe f(a).

$\exists \lim_{x \to a^-} f(x)$; $\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$ $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

Ejemplo: $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-x}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ 2 & si\ x = 1 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-x}{x-1} = 1$$

f(1)= 2

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq f(1)$$

La función presenta una discontinuidad evitable en x=1porque los límites laterales coinciden, pero ese valor es distinto al valor de la función en ese punto.

Ejercicios Resueltos

1) Estudiar la continuidad de la función f(x)= $\begin{cases} 2^x & si\ x < 2 \\ 4 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

D(f) = x∊ℝ → La función f(x) está definida por una exponencial y función polinómica por lo tanto podemos decir que la función va a ser continua en todo ℝ excepto en el punto de ruptura que estudiaremos.

Estudio de la continuidad para x=2

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 2^-} 2^x = 4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} 4 = 4 \\ f(2) = 4 \end{matrix}\right\}$$

Como los límites laterales son iguales y su valor coincide con el valor de la función en ese punto, la función será continua. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

2) Estudiar la continuidad de la función f(x)= $\begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

La función está definida por una polinómica y una racional la cual no estaría definida para x=0 ya que ese valor anula el denominador. D(f)= x∊ℝ-{0}

También debemos estudiar el punto de ruptura, es decir x=1

Estudio de la continuidad para x=0

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{+}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{+}{0^+} = +\infty \end{matrix}\right\} \text{ Como } \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$$

Debido a que los límites laterales tienden a valores infinitos, presenta una discontinuidad Inevitable de salto infinito en x = 0

Estudio de la continuidad para x=1

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 2x - 1 = 1 \\ f(1) = 1 \end{matrix}\right\} \text{ Como } \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$$

La función será continua en el punto de ruptura x=1 debido a que los límites laterales y la función coinciden.

3) Estudiar la continuidad de la función f(x)= $\begin{cases} \mathbf{3x^2 - 2^x \ si \ x < 0} \\ \mathbf{x^2 - x - 1 \ si \ 0 \le x < 1} \\ \mathbf{1 + \ln x \ \ si \ x \ge 1} \end{cases}$

La primera función está definida para todo $\mathbb{R}$, la segunda función es una polinómica por lo tanto también está definida para todo $\mathbb{R}$ y por último tenemos una función logarítmica que no estaría definida para $x \le 0$ pero no nos importa ya que esa función estaría definida para $x \ge 1$.

También debemos estudiar los puntos de ruptura, es decir para x=0 y x=1

Estudio de la continuidad para x=0

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^-} 3x^2 - 2^x = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - x - 1 = -1 \\ f(0) = -1 \end{array}\right\} \text{Como } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -1 \rightarrow \text{La función es continua en x=0}$$

Estudio de la continuidad para x=1

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 - x - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 1 + \ln x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \text{Como } \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

Como los límites laterales no coinciden y ambos toman valores finitos, la función tendrá en x=1 una discontinuidad Inevitable de salto Finito de valor 2.

4) Estudiar la continuidad de la función f(x)= $\begin{cases} \mathbf{-x^2 + 5x \ \ si \ \ 0 \le x \le 5} \\ \mathbf{x - 5 \quad si \ \ 5 < x \le 10} \end{cases}$

Aquí tenemos dos funciones polinómicas, por lo que la función será continua en el intervalo en el que está definida.

D(f)= x϶[0,10]

También vamos a estudiar el punto de ruptura, es decir para x=5

Estudio de la continuidad para x = 5

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 5^-} -x^2 + 5x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} x - 5 = 0 \\ f(5) = 0 \end{array}\right\} \text{Como } \lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = f(5) \rightarrow \text{En x=5 la función es continua.}$$

Por lo tanto el dominio de la función será: D(f)= x϶[0,10]

5) Estudiar la continuidad de la función f(x) = $\frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}$

Se trata de una función racional. Por lo tanto los puntos que no pertenecen al dominio son aquellos que anulan el denominador.

$x^2 - x - 6 = 0$ → x≠-2 y x≠3 → Por lo tanto D(f) = x$\epsilon\mathbb{R}$-$\{-2,3\}$

<u>Estudio de la continuidad para x = -2</u>

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-2^-} f(x) &= \lim_{x\to-2^-} \frac{x(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \frac{+}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to-2^+} f(x) &= \lim_{x\to-2^+} \frac{x(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \frac{+}{0^+} = +\infty\end{aligned}\right\} \text{Como } \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$$

En x=-2 presenta una discontinuidad Inevitable de salto infinito, ya que los límites laterales tienden a valores infinitos.

<u>Estudio de la continuidad para x = 3</u>

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to3} \frac{x(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)} &= \frac{12}{5} \\ \nexists f(3) &\end{aligned}\right\}$$

Como $\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^+} f(x)$ y ∄ f(3) → En x=3 tendremos una discontinuidad Evitable.

Se evita definiendo f(3) =$\lim_{x\to3} f(x) = \frac{12}{5}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6} & \text{si } x \neq 3 \\ \frac{12}{5} & x = 3 \end{cases}$$

Así conseguiremos que la función sea continua en x= 3, pero seguiremos teniendo una discontinuidad inevitable de salto infinito en x = -2

6) Estudiar la continuidad de la función f(x)= $\begin{cases} \mathbf{3^x} & \mathbf{si\ x < 0} \\ \mathbf{-x^2 + x + 1} & \mathbf{si\ 0 \le x < 1} \\ \mathbf{x + 2} & \mathbf{si\ x > 1} \end{cases}$

Tenemos una función exponencial y dos funciones polinómicas por lo que la función será continua en el intervalo en el que está definida. También vamos a estudiar los puntos de ruptura, es decir para x=0 y x=1

<u>Estudio de la continuidad para x = 0</u>

$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^-} 3^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -x^2 + x + 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\}$ Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ → La función será continua en x = 0

<u>Estudio de la continuidad para x = 1</u>

$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 1^-} -x^2 + x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x + 2 = 2 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\}$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \pm\infty$

Como los límites laterales no coinciden y además toman valores finitos, en x = 1 presenta una discontinuidad Inevitable de salto Finito de valor 1.

7) Estudiar la continuidad de la función f(x) = $\mathbf{\frac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}}$

Se trata de una función racional. Por lo tanto los puntos que no pertenecen al dominio son aquellos que anulan el denominador.

$x^2 + 3x - 10 \neq 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \end{cases}$ → D(f)= x$\epsilon\mathbb{R}$-$\begin{Bmatrix} x = 2 \\ x = -5 \end{Bmatrix}$

<u>Estudio de la continuidad para x = 2</u>

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10} \rightarrow$ Tendremos una indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$

Factorizamos, $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(3x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \frac{10}{7}$

Vemos que el límite existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ pero en x=2 la función no existe → $\nexists f(2)$

Por lo tanto en x=2 tendremos una discontinuidad Evitable. Se evita definiendo f(2)=$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$=$\frac{10}{7}$

Estudio de la continuidad para x = -5

$\lim_{x \to -5} \frac{(3x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \frac{-11}{0} \rightarrow$ Tendremos una indeterminación del tipo $\left[\frac{k}{0}\right]$

Por lo tanto debemos calcular los límites laterales.

$\begin{cases} \lim_{x \to -5^-} f(x) = \frac{-}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \to -5^+} f(x) = \frac{-}{0^+} = -\infty \end{cases} \rightarrow$ Vemos que $\lim_{x \to -5^-} f(x) = +\infty \ y \ \lim_{x \to -5^+} f(x) = -\infty$

Como los límites laterales tienden a valores Infinitos, tendremos una discontinuidad Inevitable de salto Infinito en x=-5. Tendremos una asíntota vertical.

8) Estudiar la continuidad de la función f(x)=$\begin{cases} \boldsymbol{-2x-3 \ \ si \ x < -1} \\ \boldsymbol{x^2 - 2 \ \ si -1 \leq x < 2} \\ \boldsymbol{3x+1 \ \ si \ x \geq 2} \end{cases}$

Todas las funciones son funciones polinómicas, por lo tanto podemos decir que la función va a ser continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en el punto de ruptura que estudiaremos.

Estudio de la continuidad para x = -1

$\begin{cases} \lim_{x \to -1^-} -2x - 3 = -1 \\ \lim_{x \to -1^+} x^2 - 2 = -1 \\ f(-1) = -1 \end{cases} \rightarrow$ Tenemos que $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$ por lo que podemos afirmar que en x= -1 la función es continua.

Estudio de la continuidad para x = 2

$\begin{cases} \lim_{x \to 2^-} x^2 - 2 = 2 \\ \lim_{x \to 2^+} 3x + 1 = 7 \\ f(2) = 7 \end{cases}$

Como $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$ Como los límites laterales no coinciden (no existirá el límite en x=2 ($\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$) y ambos toman valores finitos, en x=2 tendremos una Discontinuidad Inevitable de salto Finito de valor 5.

9) Estudiar la continuidad de la función $\left.\begin{array}{c} \mathbf{1 \ \ si\ x < 0} \\ \mathbf{x + 1 \ \ si\ 0 < x < 1} \\ \mathbf{x^2 - 2x \ \ si\ x \geq 1} \end{array}\right\}$ **=f(x)**

Todas las funciones son funciones polinómicas, por lo tanto podemos decir que la función va a ser continua en el intervalo en los que está definida. D(f) = x$\epsilon\mathbb{R}$-$\{x = 0\}$ porque la función no está definida en x=0

Analizamos los puntos de ruptura, x=0 y x=1

Estudio de la continuidad para x = 0

$$\left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 0^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x + 1 = 1 \\ \nexists f(0) \end{array}\right. \rightarrow \text{Como } \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \text{ y } \nexists f(0)$$

La función tendrá una discontinuidad Evitable en x=0. Se evita definiendo f(0)=$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$=1

Estudio de la continuidad para x = 1

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 1^-} x + 1 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 - 2x = -1 \\ f(1) = -1 \end{array}\right\}$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \pm\infty$. Como los límites laterales no coinciden y ambos toman valores finitos, la función presenta una discontinuidad Inevitable de salto Finito de valor 3.

10) Estudiar la continuidad de la función (Junio 2008)

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

clasificando las discontinuidades que se encuentren. ¿Es posible definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?

La función dada no está definida en los puntos donde se anula el denominador:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \qquad \text{D(f) = x}\epsilon\mathbb{R}\text{-}\{2,3\}$$

Por tanto, la función no es continua si x = 2 o x = 3.

La discontinuidad de una función f(x) es evitable en el punto x = a cuando existe el límite en ese punto. La discontinuidad se evita definiendo f(a)=$\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Estudio de la continuidad para x = 2

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-5x+2}{x^2-5x+6} \to$ Tendremos una indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x+2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x-1)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-1}{x-3} = \frac{7}{-1} = -7$$

Como $\exists \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-5x+2}{x^2-5x+6}$ y $\nexists f(2)$ → tendremos una discontinuidad Evitable en x = 2

Se evita definiendo f(2) = $\lim\limits_{x\to 2}$ f(x) = -7

Estudio de la continuidad para x = 3

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-5x+2}{x^2-5x+6} = \frac{14}{0} \to$ Tendremos una indeterminación del tipo $\left[\frac{k}{0}\right]$

Por lo tanto debemos calcular los límites laterales.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \frac{+}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \frac{+}{0^+} = +\infty \end{cases} \to \text{Vemos que } \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$$

Como los límites laterales tienden a valores Infinitos, tendremos una discontinuidad Inevitable de salto Infinito en x=3. Tendremos una asíntota vertical.

Por tanto, en x = 3, la discontinuidad no puede evitarse. Presenta una discontinuidad Inevitable de salto Infinito.

11) Estudia la continuidad de la función: f(x) = $\begin{cases} \boldsymbol{e^x} & \boldsymbol{si\ x < 0} \\ \boldsymbol{3x^2 + 1} & \boldsymbol{si\ 0 \leq x < 1} \\ \boldsymbol{4 + lnx} & \boldsymbol{si\ x \geq 1} \end{cases}$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Intervalos de Definición</u>

Miramos cada una de las funciones y vemos que la primera función es una exponencial ($\boldsymbol{e^x}$) que está definida en todo su dominio, la segunda función que nos encontramos es una función polinómica $\boldsymbol{3x^2 + 1}$ que está definida en todo su dominio y por último nos encontramos una ecuación logarítmica $\boldsymbol{4 + lnx}$ que estaría definida para x>0 que justamente coincide con el intervalo en el que está definida la función. Por lo tanto cada una de sus funciones en sus intervalos son continuas.

<u>Puntos de división de cada uno de los intervalos</u>

Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en x=0 y x=1.

<u>Estudio de la continuidad para x = 0</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2 + 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \text{Como } \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \to \text{ La función será continua en } x = 0$$

<u>Estudio de la continuidad para x = 1</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2 + 1 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 4 + \ln x = 4 \\ f(1) = 4 \end{array}\right\} \text{ Como } \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \text{ La función será continua en } x = 1$$

La función f(x) es continua en R

12) Dada la función f(x)= $\frac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10}$, estudia su continuidad. Indica el tipo de discontinuidad que hay en los puntos en los que no es continua.

$$f(x) = \frac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10} = \frac{(x+5)(3x^2+1)}{(x+5)(x-2)}$$

- Dominio: D(f) = $\forall x \epsilon R - \{x = -5, x = 2\}$

Estudio de la continuidad para x = -5

$$\lim_{x\to-5} f(x) = \lim_{x\to-5} \frac{3x^2+1}{x-2} = \frac{76}{-7} \rightarrow \lim_{x\to-5^-} \frac{3x^2+1}{x-2} = \lim_{x\to-5^+} \frac{3x^2+1}{x-2} = \frac{76}{-7}$$

Vemos que el límite existe $\lim_{x\to-5} f(x)$ pero en x=-5 la función no existe → $\nexists f(-5)$

Por lo tanto en x=-5 tendremos una discontinuidad Evitable. Se evita definiendo f(-5)= $\lim_{x\to-5} f(x) = \frac{76}{-7}$

Estudio de la continuidad para x = 2

$\lim_{x\to2} \frac{3x^2+1}{x-2} = \frac{13}{0}$ → Tendremos una indeterminación del tipo $\left[\frac{k}{0}\right]$

Calculamos los límites laterales:

$$\begin{cases} \lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{+}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{+}{0^+} = +\infty \end{cases} \rightarrow \text{Vemos que } \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$$

Como los límites laterales tienden a valores Infinitos, tendremos una discontinuidad Inevitable de salto Infinito en x=3. Tendremos una asíntota vertical.

Por tanto, en x = 3, la discontinuidad no puede evitarse. Presenta una discontinuidad Inevitable de salto Infinito.

13) Estudia la continuidad de la siguiente función: f(x)= $\begin{cases} \frac{2x+3}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 3x+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

- Miramos cada función por separado y vemos que $\frac{2x+3}{x}$ no está definida en x=0 pero si miramos en el intervalo en el que está definida esta función es en x<-1 por lo que x=0 no entraría dentro de este intervalo. Esta función sería continua en el intervalo en el que está definida.
- Las demás funciones son una función cuadrática y lineal y estarían definidas en todo su intervalo.

Puntos de división de cada uno de los intervalos

Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en x=-1 y x=2.

Estudio de la continuidad para x = -1

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2x+3}{x} = -1 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x^2 - 2) = -1 \\ f(-1) = -1 \end{array}\right\}$$

Como $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \rightarrow$ La función será continua en x=-1

Estudio de la continuidad para x = 2

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 2) = 2 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x+1) = 7 \end{array}\right\}$$

Como $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \pm\infty$. Como los límites laterales no coinciden y ambos toman valores finitos, la función presenta una discontinuidad Inevitable de salto Finito de valor 5.

14) Estudia la continuidad de f(x)= $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & x<0 \\ \dfrac{3x-9}{x^2-9} & 0\le x<3 \\ \dfrac{3x}{x+3} & x\ge 3 \end{cases}$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

Observamos que:

- f(x) = $\frac{1}{x+1}$ → se trata de una función racional que está definida en todo su dominio, exceptuando en x= -1, donde deberemos realizar el estudio de su continuidad.
- f(x) = $\frac{3x-9}{x^2-9}$ → se trata de una función Racional. La función no está definida en x=-3 y en x=3 pero como estos dos puntos se encuentran fuera de su dominio, la función será continua en (0,3)
- f(x) = $\frac{3x}{x+3}$ → se trata de una función Racional. La función no está definida en x=-3 pero como este punto se encuentran fuera de su dominio, la función será continua en (3,∞)

Estudio de la continuidad para x = -1

- ∄ f(-1)
- $\lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0} = \frac{k}{0}$

  Calculamos los límites laterales:
  - $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{+}{0^-} = -\infty$
  - $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{+}{0^+} = +\infty$

Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{+}{0^+} = +\infty$ → Tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito

Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=0 y x= 3

Estudio de la continuidad para x = 0

- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x+1} = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{3x-9}{x^2-9} = 1$
- f(0)= $\frac{3\cdot 0-9}{0^2-9} = 1$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ → La función será continua en x = 0

Estudio de la continuidad para x = 3

- $\lim_{x\to3^-} \frac{3x-9}{x^2-9} = \left[\frac{0}{0}\right]$ $\lim_{x\to3^-} \frac{3x-9}{x^2-9} = \lim_{x\to3^-} \frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to3^-} \frac{3}{(x+3)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to3^+} \frac{3x}{x+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
- f(3)= $\frac{3\cdot3}{3+3} = \frac{1}{2}$

Como $\lim_{x\to3^-} f(x) \neq \lim_{x\to3^+} f(x)$ y ambos toman valores finitos → Tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Finito de Valor 2

15) Estudia la continuidad de f(x)= $\begin{cases} 3x^2-2^x & si & x<0 \\ x^2-x-1 & si & 0\leq x<1 \\ 1+\ln x & si & x\geq 1 \end{cases}$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

- f(x) = $3x^2 - 2^x$ → La función es continua en $(-\infty, 0)$
- f(x) = $x^2 - x - 1$ → La función es continua en (0,1)
- f(x) = $1 + \ln x$ → Cumple la condición que x > 0. La función es continua en $(1,\infty)$

Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=0 y x= 3

Estudio de la continuidad para x = 0

- $\lim_{x\to0^-} 3x^2 - 2^x = -1$
- $\lim_{x\to0^+} x^2 - x - 1 = -1$
- f(0)= $0^2 - 0 - 1 = -1$

Como $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)$ → La función será continua en x = 0

Estudio de la continuidad para x = 1

- $\lim_{x\to1^-} x^2 - x - 1$ = -1
- $\lim_{x\to1^+} 1 + \ln x = 1$
- f(1)= $1 + \ln 1 = 1$

Como $\lim_{x\to1^-} f(x) \neq \lim_{x\to1^+} f(x)$ y ambos toman valores finitos → Tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Finito de Valor 2

Ejercicios de Continuidad con Parámetros

16) Calcula a y b para que la función será continua

$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases} x^2 - x + 2a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-3}{(x+2)^2} & \text{si } 0 < x < 4 \\ \frac{2}{x-b} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

<u>Estudio de la continuidad para x = 0</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 - x + 2a = 2a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-3}{(x+2)^2} = \frac{-3}{4} \\ f(0) = 2a \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x=0 se tiene que cumplir que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ → 2a=-$\frac{3}{4}$ → a=-$\mathbf{\frac{3}{8}}$

<u>Estudio de la continuidad para x = 4</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x-3}{(x+2)^2} = \frac{1}{36} \\ \lim\limits_{x\to 4^+} \frac{2}{x-b} = \frac{2}{4-b} \\ f(4) = \frac{2}{4-b} \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x = 4 se tiene que cumplir que:

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4) \to \frac{2}{4-b} = \frac{1}{36} \to$ b= -68

17) Calcula el valor de a y b para que la función sea continua

f(x)=$\begin{cases} 2x^3 - x^2 + a \;\; si\; x < -1 \\ x^2 + ax + 1 \;\; si\; x \geq -1 \end{cases}$

Si x≠-1, tenemos dos funciones polinómicas que son funciones continuas.

Estudio de la continuidad para x = -1

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to -1^-} 2x^3 - x^2 + a = -2 - 1 + a = -3 + a \\ \lim_{x\to -1^+} x^2 + ax + 1 = 1 - a + 1 = 2 - a \\ f(-1) = 2 - a \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x=-1 se tiene que cumplir que $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

-3+a=2-a → 2a=5 → a=$\frac{5}{2}$

18) Calcula los valores de a y b para que la función sea continua.

f(x)=$\begin{cases} 2x^3 - x^2 + a \;\; si\; x < -1 \\ x^2 + bx + 1 \;\; si\; -1 \leq x < 1 \\ ax \;\; si\; x \geq 1 \end{cases}$

Tenemos funciones polinómicas que son funciones continuas.

Estudio de la continuidad para x = -1

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to -1^-} 2x^3 - x^2 + a = -2 - 1 + a = -3 + a \\ \lim_{x\to -1^+} x^2 + bx + 1 = 1 - b + 1 = 2 - b \\ f(-1) = 2 - b \end{array}\right\}$$ → Para que la función sea continua en x=-1 se tiene que cumplir que:

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ → -3+a=2-b → a+b=5

Estudio de la continuidad para x = 1

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 1^-} x^2 + bx + 1 = 1 + b + 1 \\ \lim_{x\to 1^+} ax = a \\ f(1) = a \end{array}\right\}$$ → Para que la función sea continua en x=1 se tiene que cumplir que:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ → 2+b=a → a-b=2

Resolvemos el sistema de ecuaciones para que la función f(x) sea continua: $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 2 \end{cases} \to \begin{cases} \mathbf{a = \frac{7}{2}} \\ \mathbf{b = \frac{3}{2}} \end{cases}$

19) Halla los valores de a y b para que la función sea continua:

f(x)=$\begin{cases} -x^2 + bx - 1 & si\ x < 1 \\ 3x - a & si\ 1 \leq x < 2 \\ 2^x + \log_2 x & si\ x \geq 2 \end{cases}$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Intervalos de Definición</u>

Miramos cada función por separado:

En el intervalo $x \geq 2$ Tenemos $\log_2 x$, por lo que x tiene que ser mayor que 0 (x>0) que en nuestro caso si se cumple ya que nuestra función está de finida en $x \geq 2$.

<u>Puntos de división de cada uno de los intervalos</u>

Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en x= 1 y x=2.

<u>Estudio de la continuidad para x = 1</u>

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^2 + bx - 1) = b - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3x - a) = 3 - a \\ f(1) = 3 - a \end{cases}$ → Para que sea continua en x=1, se tiene que cumplir que:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ → b-2=3-a → a + b = 5

<u>Estudio de la continuidad para x = 2</u>

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - a) = 6 - a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2^x + \log_2 x) = 4 + 1 = 5 \\ f(2) = 5 \end{cases}$ → Para que sea continua en x=2, se tiene que cumplir que:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$ → 6 – a = 5 → a=1

Tomo la primera ecuación a + b = 5 y sustituyo a por 1, 1 + b = 5 → b= 4

20) La función $f(x)=\frac{x^2-a}{x^3+x^2+ax+12}$ presenta una discontinuidad evitable en x= -2, ¿para qué valor de a?

Si presenta una discontinuidad evitable tendremos que:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2) \text{ o } \nexists f(2)$$

Si la función no existe en x= -2 quiere decir que el denominador de la función será igual a cero.

$$f(-2) = 0 \to (-2)^3 + (-2)^2 + a\cdot(-2) + 12 = 0 \to -8 + 4 - 2a + 12 = 0 \to a = 4$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^3+x^2+4x+12} = \left[\frac{0}{0}\right] \to \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2-x+6)} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$$

Hemos demostrado que existe el límite en x=-2 pero no la función en ese punto.

21) Determina a y b para que la siguiente función sea continua en todos su puntos:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & si\ x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{x} + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Intervalos de Definición</u>

- Miramos cada función por separado y vemos que $\frac{a}{x} + b$ no está definida en x=0 pero si miramos en el intervalo en el que está definida esta función es en x≥ 1 por lo que x=0 no entraría dentro de este intervalo. Esta función sería continua en el intervalo en el que está definida.
- Las demás funciones son una función cuadrática y lineal y estarían definidas en todo su intervalo.

<u>Puntos de división de cada uno de los intervalos</u>

Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en x= 0 y x=1.

<u>Estudio de la continuidad para x = 0</u>

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax^2 + b = b \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - a = -a \\ f(0) = -a \end{cases}$$

Para que sea continua en x=0, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \to$ b = -a

Estudio de la continuidad para x = 1

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x - a = 1 - a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{a}{x} + b = a + b \\ f(1) = a + b \end{cases}$$

Para que sea continua en x= 1, se tiene que cumplir que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \to 1\text{- } a = a\text{+}b \to 2a + b = 1$$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} b = -a \\ 2a + b = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

22) **Calcula los valores de a,b ∈ R para que la función f(x) =** $\begin{cases} \boldsymbol{x + a} & \textbf{si } \boldsymbol{x \le 0} \\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} & \textbf{si } \boldsymbol{0 < x < 1} \\ \mathbf{bx} & \textbf{si } \mathbf{x \ge 1} \end{cases}$ **sea continua.**

Debemos hacer el estudio de la continuidad en los puntos de ruptura, es decir en los puntos x = 0 y x = 1.

Estudio de la continuidad para x = 0

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x + a) = a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} = \left[\frac{0}{0}\right] \to \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} \cdot \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x}{3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{1}{3} \\ f(0) = a \end{cases}$$

Para que sea continua en x=0, se tiene que cumplir que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \to a = \frac{1}{3}$$

Estudio de la continuidad para x = 1

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} bx = b \\ f(1) = b \end{cases}$$

Para que sea continua en x= 1, se tiene que cumplir que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \to b = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

23) Sea f(x) = $\begin{cases} \boldsymbol{e^{x-1}} & \textbf{si } \boldsymbol{x < 1} \\ \boldsymbol{(x+a)^2} & \boldsymbol{si\ x \geq 1} \end{cases}$ **¿Para qué valores del parámetro a la función es continua.**

Para que la función sea continua en x= 1, se tiene que cumplir que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \mathbf{e^{x-1}} = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+a)^2 = (1+a)^2 = a^2 + 2a + 1 \\ f(1) = a^2 + 2a + 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \rightarrow a^2 + 2a + 1 = 1 \rightarrow a^2 + 2a = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$$

24) La función f(x) está definida en R por f(x) = $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - 1\ si\ x \leq 2} \\ \boldsymbol{a - x\ si\ x > 2} \end{cases}$

a) Calcula el valor de a para que f sea continua en R.

b) Calcula el valor de a para que la función tenga en x=2 u salto de 3 unidades hacia arriba

c) Calcula el valor de a para que la función tenga en x = 2 un salto de 5 unidades hacua abajo

a) Para que la función sea continua en x= 2, se tiene que cumplir que:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \mathbf{x^2} - 1 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (a - x) = a - 2 \\ f(2) = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \rightarrow a - 2 = 3 \rightarrow a = 5$$

b) Para que tenga un salto de tres unidades hacia arriba debe ser a – 2 = 6 → a = 8

c) Para que tenga un salto de cinco unidades hacia arriba debe ser a – 2 = -2 → a = 0

25) Se considera la función. Si f(2) = 3, determinar los valores de a y b para que f(x) sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & si \; 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

Observamos que:

- f(x) = ln x → se trata de una función logarítmica por lo tanto se tiene que cumplir que x>0. En este caso como se cumple, decimos que la función es continua en (0,1)
- f(x) = ax^2 + b → se trata de una función cuadrática por lo tanto está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función será continua en (1,∞)

Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso será en el punto x=1.

Estudio de la continuidad para x = 1

- $\lim_{x \to 1^-} \ln x = 0$
- $\lim_{x \to 1^+} ax^2 + b = a + b$
- f(1)= a + b

Para que la función sea continua en x= 1, se tiene que cumplir que: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

Por lo tanto a + b = 0

El enunciado nos proporciona otra condición que f(2) = 3. Nos está diciendo que cuando x=2, la función vale 3 (y=3). De las dos funciones cogeremos aquella que esté definida en x=2

f(2) = 3 → f(2) = a$(2)^2 + b = 3$ → $4a + b = 3$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 4a + b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

26) Dada la función: Hallar a y b para que la función sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x<0 \\ ax+b & si\ 0\le x<1 \\ 2 & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

Observamos que:

- f(x) = x^2 → se trata de una función cuadrática por lo tanto está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función será continua en $(-\infty, 0)$
- f(x) = ax + b → se trata de una función Lineal por lo tanto está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función será continua en (0,1)
- f(x) = 2 → se trata de una función Constante por lo tanto está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función será continua en $(1,\infty)$

Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=0 y x=1.

Estudio de la continuidad para x = 0

- $\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} ax+b = b$
- f(0)= b

Para que la función sea continua en x= 0, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Por lo tanto b = 0

Estudio de la continuidad para x = 1

- $\lim_{x\to 1^-} ax+b = a+b$
- $\lim_{x\to 1^+} 2 = 2$
- f(1)= 2

Para que la función sea continua en x= 1, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Por lo tanto a +b = 2 Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} b=0 \\ a+b=2 \end{cases} \to \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$

27) Calcular los valores de a y b para que la siguiente función sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & si\ x<0 \\ ax+b & si\ 0\le x\le 3 \\ x-5 & si\ x>3 \end{cases}$$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Intervalos de Definición</u>

Observamos que:

- $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ → se trata de una función racional que está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función es continua en $(-\infty, 0)$
- f(x) = ax + b → se trata de una función Lineal que está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función será continua en (0,3)
- f(x) = x-5 → se trata de una función Lineal que está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función será continua en $(3,\infty)$

<u>Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)</u>

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=0 y x=1.

<u>Estudio de la continuidad para x = 0</u>

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2+1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} ax+b = b$
- f(0)= b

Para que la función sea continua en x= 1, se tiene que cumplir que: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Por lo tanto b = 1

<u>Estudio de la continuidad para x = 3</u>

- $\lim\limits_{x\to 3^-} ax+b = 3a+b$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} x-5 = -2$
- f(3)= 3a + b

Para que la función sea continua en x= 3, se tiene que cumplir que: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

Por lo tanto 3 a +b = -2 Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} b = 1 \\ 3a+b=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

28) Calcular los valores de a y b para que la siguiente función sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & x\leq -3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} & -3<x<3 \\ 2bx-4x & x\geq 3 \end{cases}$$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

Observamos que:

- f(x) = 2x + a → se trata de una función lineal que está definida en todo su dominio. Por lo tanto la función es continua en $(-\infty, -3)$
- f(x) = $\frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6}$ → se trata de una función Racional. La función no está definida en x=-3 pero como este punto se encuentra fuera de su dominio → La función será continua en (-3,3)
- f(x) = 2bx – 4x → La función será continua en $(3,\infty)$

Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=-3 y x=3.

Estudio de la continuidad para x = -3

- $\lim_{x\to -3^-} 2x+a = -6+\mathrm{a}$
- $\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad \lim_{x\to -3^+} \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x^2-x+2)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{x-3}{x^2-x+2} = \frac{-6}{14} = \frac{-3}{7}$
- f(-3)= -6 + a

Para que la función sea continua en x= -3, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^+} f(x) = f(-3)$

Por lo tanto -6 + a = $\frac{-3}{7}$ → $a = \frac{39}{7}$

Estudio de la continuidad para x = 3

- $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} = \frac{0}{48} = 0$
- $\lim_{x\to 3^+} 2bx - 4x = 6b - 12$
- f(3)= 6b -12

Para que la función sea continua en x= 3, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

Por lo tanto 6b-12=0 → $b = 2$

29) Calcular los valores de a y b para que la siguiente función sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} e^x+a & x\le 0 \\ ax+b & 0<x\le 3 \\ \dfrac{x^3-2x^2-3x}{-x^2+9} & x>3 \end{cases}$$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

Observamos que:

- f(x) = $e^x + a$ → La función será continua en (-∞, 0)
- f(x) = $ax + b$ → La función será continua en (0,3)
- f(x) = $\frac{x^3-2x^2-3x}{-x^2+9}$ → se trata de una función Racional. La función no está definida en x=-3 y en x= 3 pero estos puntos se encuentran fuera de su dominio. La función será continua en (3,∞)

Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=0 y x= 3

Estudio de la continuidad para x = 0

- $\lim_{x\to 0^-} e^x + a = 1 + \text{a}$
- $\lim_{x\to 0^+} ax + b = \text{b}$
- f(0)= $e^0 + a = 1 + \text{a}$

Para que la función sea continua en x= 0, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Por lo tanto 1 + a = b

Estudio de la continuidad para x = 3

- $\lim_{x\to 3^-} ax + b = 3a + b$
- $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^3-2x^2-3x}{-x^2+9} = \left[\frac{0}{0}\right]$ $\quad \lim_{x\to 3^+} \frac{x^3-2x^2-3x}{-x^2+9} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x(x-3)(x+1)}{-(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x(x+1)}{-(x+3)} = -2$
- f(3)= $3a + b$

Para que la función sea continua en x= 3, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

Por lo tanto 3 a +b = -2 Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 1 + a = b \\ 3a + b = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$

30) Calcula el valor de a para que la siguiente función sea continua.

f(x)= $\begin{cases} 2x+a & x \le -3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} & x > -3 \end{cases}$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Intervalos de Definición</u>

Observamos que:

- f(x) = $2x + a$ → La función será continua en (-∞, -3)
- f(x) = $\frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6}$ → se trata de una función Racional. La función no está definida en x=-3 pero en este punto se encuentran fuera de su dominio. La función será continua en (-3,∞)

<u>Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)</u>

Miramos la continuidad en el punto de ruptura, en este caso será el punto x= -3

<u>Estudio de la continuidad para x = -3</u>

- $\lim_{x\to -3^-} 2x + a = -6 + \mathrm{a}$
- $\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad \lim_{x\to -3^+} \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x-3(x+3)}{(x+3)(x^2-x+2)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x-3)}{(x^2-x+2)} = \frac{-6}{14} = \frac{-3}{7}$
- f(-3)= $2 \cdot (-3) + a = -6 + \mathrm{a}$

Para que la función sea continua en x= -3, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to -3^-} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to -3^+} \mathrm{f(x)} = \mathrm{f}(-3)$

Por lo tanto -6 + a = $\frac{-3}{7}$ → $a = \frac{39}{7}$

Problemas con límites

31) Una constructora ha comprado una excavadora por 80 000 euros. El departamento financiero ha calculado que puede revenderla al cabo de t años al precio de f(t)=$\frac{80}{1+0,4t}$ miles de euros.

¿Al cabo de cuántos años la excavadora perderá la mitad de su valor de compra?

Calcula el límite $\lim_{t\to\infty} f(t)$ y da una interpretación económica a este resultado.

a) F(t)=$\frac{f(0)}{2}$ → $\frac{80}{1+0,4t} = 40$ → 80=40+16t → t = 2,5 → A los dos años y medio

b) $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{80}{1+0,4t}$ = 0 . Al cabo del tiempo, la excavadora irá perdiendo su valor de compra.

32) El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera. Se prevé que a partir de ahora la siguiente función indicará en cada momento (t, medido en meses) el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera:

$$P(t)=\begin{cases} t^2-8t+50 & si\ 0\le t\le 10 \\ \frac{38t-100}{0,4t} & si\ t>10 \end{cases}$$

a) Confirma que dicha función es continua y que, por tanto, no presenta un salto en t=10

b) Por mucho tiempo que pase, ¿a qué porcentaje no se llegará nunca?

a) Si $t\neq 10$, la función es continua por estar definida por un polinomio o un cociente de polinomios con denominador no nulo en su dominio de definición.

$$\begin{cases} \lim_{t\to 10^-} t^2-8t+50=70 \\ \lim_{t\to 10^+} \frac{38t-100}{0,4t}=70 \\ f(10)=70 \end{cases} \to \text{Como } \lim_{t\to 10^-} f(x)=\lim_{t\to 10^+} f(x)=f(10)$$

Por lo tanto podemos asegurar que en t =10 la función es continua.

b) $\lim_{t\to\infty}\frac{38t-100}{0,4t}=95$ Nunca se llegará al 95% de pacientes operados sin necesidad de entrar en lista de espera.

33) Se ha estimado que la población de un barrio periférico de una gran ciudad evolucionará siguiendo este modelo: P(t)=$\frac{240+20t}{16+t}$ en miles de habitantes, donde t indica los años transcurridos desde su creación en el año 2005.

¿Qué población tenía dicho barrio en el año 2005?

¿Qué población tendrá dicho barrio en el año 2015?

¿Será posible que la población del barrio duplique a la población inicial?

A largo plazo,¿la población se estabilizará o no?

a) P(0)=$\frac{240}{16}=15$ El barrio tenía 15000 habitantes en 2005

b) Habrán pasado 10 años desde su creación y por tanto t=10.

P(10)=$\frac{240+200}{16+10}\approx 16,923$ Habrá 16923 habitantes en 2015

c) P(t)= 2·P(0), P(t)=$\frac{240+20t}{16+t}=30$ → 240+20t=480+30t → t= -24. No , el barrio nunca duplicará su población.

d) $\lim_{t\to\infty}P(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{240+20t}{16+t}=20$ → La población se estabilizará en 20 000 habitantes

34) Un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que el precio unitario que los consumidores aceptan pagar por cierto artículo depende de la cantidad x de dichos artículos que salen a la venta, siguiendo este modelo de demanda: g(x)=$\frac{170}{x+5}$ (g(x) en euros y x en miles de unidades)

Los productores han calculado que el precio unitario satisfactorio para ellos, dependiente de x, se rige según este modelo de oferta: f(x)=3x+2 (f(x) en euros y x en miles de unidades)

Calcula cuántas unidades deben ponerse a la venta para conseguir el punto de equilibrio, en el que la demanda y la oferta se igualan y, por tanto, consumidores y fabricantes quedan satisfechos.

¿Cuál es el precio unitario de este artículo en el punto de equilibrio?

a) g(x)=f(x)→ $\frac{170}{x+5} = 3x + 2$ → 170=(x+5)(3x+2)→ $3x^2 + 17x - 160 = 0$ →
x=5 o x=-$\frac{32}{3}$ (éste último no tiene sentido en este contexto). El punto de equilibrio se consigue fabricando 5000 unidades.

b) El precio unitario es f(5)=17 euros

Ejercicios de Continuidad con valor Absoluto

35) Estudiar la continuidad de la función f(x)=$\begin{cases} 5 - \frac{|x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ 5 & si\ x = 0 \end{cases}$

Calculamos primero la función de valor absoluto

$|x|= \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ Por lo tanto la función nos queda de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} 5 - \frac{-x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \\ 5 - \frac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

<u>Estudio de la continuidad para x = 0</u>

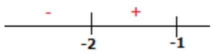
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} 5 + 1 = 6 \\ \lim_{x\to 0^+} 5 - 1 = 4 \\ f(0) = 5 \end{array}\right\}$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ con valores finitos, en x=0 tendremos una discontinuidad Inevitable de salto Finito 2.

36) Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} |x+2| & \text{si } x<-1 \\ x^2 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 2x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

Primero calculamos la función de valor absoluto.

f(x) = $|x+2|$ → $|x+2|$ =0 → x+2=0 → x= -2



$|x+2| = \begin{cases} -x-2 \; si \; x<-2 \\ x+2 \; si \; -2\le x<-1 \end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si } x<-2 \\ x+2 & \text{si } -2\le x<-1 \\ x^2 & \text{si } -1\le x<1 \\ 2x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Todas las funciones son funciones polinómicas, por lo tanto podemos decir que la función va a ser continua en todo $\mathbb{R}$. Pasamos a estudiar los puntos de ruptura.

Estudio de la continuidad para x = -2

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -2^-} -x-2=0 \\ \lim_{x\to -2^+} x+2=0 \\ f(-2)=0 \end{array}\right\}$$

Como $\lim_{x\to -2^-} -x-2 = \lim_{x\to -2^+} x+2 = f(-2)$ → La función será continua en x=-2

Estudio de la continuidad para x = -1

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} x+2=1 \\ \lim_{x\to -1^+} x^2=1 \\ f(-1)=1 \end{array}\right\}$$

Como $\lim_{x\to -1^-} x+2 = \lim_{x\to -1^+} x^2 = f(-1)$ → La función será continua en x=-1

Estudio de la continuidad para x = 1

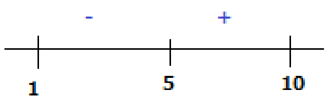
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} x^2=1 \\ \lim_{x\to 1^+} 2x+1=3 \\ f(1)=1 \end{array}\right\}$$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+ f(x)} f(x)$ y los valores son finitos, En x=1 tenemos una discontinuidad Inevitable de salto Finito 2.

37) Estudiar la continuidad de la función f(x)=$\begin{cases} x^2 & si\ x < 1 \\ |x-5| & si\ 1 \le x \le 10 \end{cases}$

Calculamos primero la función valor absoluto.

F(x)=$|x-5|$ → x-5=0 → x=5



$|x-5| = \begin{cases} -(x-5)\ si\ \ 1 \le x < 5 \\ +(x-5)\ si\ 5 \le x \le 10 \end{cases}$, por lo que la función queda f(x)=$\begin{cases} \mathrm{x}^2 \ \ \mathrm{si\ x} < 1 \\ -\mathrm{x}+5 \ \ \mathrm{si}\ 1 \le \mathrm{x} < 5 \\ \mathrm{x}-5 \ \ \ \mathrm{si}\ 5 \le \mathrm{x} \le 10 \end{cases}$

Todas las funciones son polinómicas por lo tanto estarán definidas en todo el intervalo en el que están definidas.

D(f)=xϵ(-∞, 10]

Miramos los puntos de ruptura:

<u>Estudio de la continuidad para x = 1</u>

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} -x+5 = 4 \\ f(1) = 4 \end{array}\right\}$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ y siendo estos finitos, tendremos una discontinuidad Inevitable de salto Finito 3.

<u>Estudio de la continuidad para x = 5</u>

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 5^-} -x+5 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} x-5 = 0 \\ f(5) = 0 \end{array}\right\}$$

Como $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$= f(5) Por lo tanto la función será continua en x=5.