1) Una cadena de montaje está especializada en la producción de un modelo de motocicleta. Los costes de producción en euros, C (x) , se relacionan con el número de motocicletas fabricadas, x mediante la expresión: $C(x) = 10x^2 + 2000x + 250.000$ Si el precio de venta de cada motocicleta es de 8000 euros y se venden todas las fabricadas, se pide: Define la función de ingresos que obtiene la cadena de montaje en función de las unidades vendidas. ¿Qué función expresa los beneficios de la cadena? ¿Cuántas motocicletas debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán los mismos?

Definimos: x→ número de bicicletas fabricadas.
C(x) → costes de producción en euros.

El enunciado nos da la función del coste de producción que es igual a: $C(x) = 10x^2 + 2000x + 250.000$ y por otro lado nosotros vamos a tener que calcular la función de los ingresos:

a) $I(x) = 8000 \cdot x$ (los ingresos serán el número de bicicletas por el precio de cada una de ellas)

b) Los beneficios = Ingresos – Costes
$B(x) = I(x) – C(x) = 8000 \cdot x - (10x^2 + 2000x + 250.000) = -10x^2 + 6000x - 250.000$

c) Si nos fijamos que la función que define el beneficio es una función cuadrática (parábola) cóncava hacia abajo. Por lo tanto si queremos calcular el máximo, lo que debemos hacer es calcular su vértice. Para ello derivamos la función y la igualamos a 0.

- $B´(x) = -20x + 6000$
  $B´(x)= 0 \rightarrow -20x + 6000 = 0 \rightarrow$ **$x = 300$**

- Calculamos el beneficio para x = 300
  $B(300) = -10\cdot300^2 + 6000\cdot300 - 250000 = 650.000$ €

- **Comprobación:** $B´´(x) = -20 \rightarrow B´´(300)= -20 < 0 \rightarrow$ Por lo tanto se trata de un máximo.

- Para alcanzar el máximo beneficio debemos fabricar 300 bicicletas , ascendiendo el beneficio a 650.000 €

2) En una planta depuradora de aguas residuales la expresión que determina el coste de funcionamiento anual en función de la cantidad de agua depurada es: $C(x) = 35x^2 - 140x + 2600$ donde $C(x)$ son los costes expresados en euros y x es el volumen de agua depurada en un año en miles de metros cúbicos. Determina: La cantidad de agua depurada que hace mínimo el coste, El valor de dicho coste mínimo y El coste de la depuración de agua de una localidad de 2000 habitantes, si cada uno genera al año 8 metros cúbicos de agua para depurar.

Definimos: $x \rightarrow$ miles de m^3 de agua depurada en un año.

$C(x) \rightarrow$ costes expresados en euros.

a) Para determinar el mínimo coste debemos derivar nuestra función objetivo $C(x) = 35x^2 - 140x + 2600$ e igualarla a cero.

$C'(x) = 70x - 140$

$C'(x) = 0 \rightarrow 70x - 140 = 0 \rightarrow x = 2$ (como x nos expresa miles de m^3 de agua depurada en un año) . La posible solución será 2000 m^3

- **Comprobación** de que se trata de un mínimo:

  Para ello calcularemos la segunda derivada y $\begin{cases} \text{si para } x = a \;\; C''(a) < 0 \rightarrow \text{tendremos un máximo} \\ \text{si para } x = a \;\; C''(a) > 0 \rightarrow \text{tendremos mínimo} \end{cases}$

  $C''(x) = 70 \rightarrow C''(2) = 70 > 0 \rightarrow$ Por lo tanto tendremos un mínimo

- **Comprobación** (otra forma)**:**

	(0,2)	**(2,∞)**
Signo C´(x)	-	+
Comportamiento de C(x)	↘	↗

Tendremos un mínimo en el punto x = 2

b) El coste para x =2 sólo debemos sustituir este valor en nuestra función objetivo.

$C(x) = 35x^2 - 140x + 2600 \rightarrow C(2) = 35 \cdot 2^2 - 140 \cdot 2 + 2600 = 2460$ la función está expresada en euros, por lo tanto el coste para 2000 m^3 asciende a 2460 €

c) Debemos calcular los m^3 que consumen en total los 2000 habitantes.

$8 \cdot 2000 = 16000$ m^3 Debemos tener en cuenta que la variable x está expresada en miles de m^3 (x=16)

Por lo tanto $C(16) = 35 \cdot 16^2 - 140 \cdot 16 + 2600 = 9320 \rightarrow$ El coste ascenderá a 9320 €

3) En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en km^2 , viene dada por la función f(t)= $\frac{11t+20}{t+2}$, siendo t el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla. ¿Cuál es la superficie afectada inicialmente? Estudia si la mancha crece o decrece con el tiempo. ¿Tiene algún límite la extensión de la mancha?

t → tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla.

f(t) → superficie afectada en km^2

a) Para calcular la superficie afectada inicialmente debemos sustituir t = 0 en nuestra función objetivo.

$f(0) = \frac{11\cdot 0+20}{0+2} = 10$ La superficie inicial afectada será de 10 km^2

b) Para calcular el crecimiento y decrecimiento de la función objetivo deberemos calcular previamente su derivada:

$f´(t) = \frac{11\cdot(t+2)-1\cdot(11t+20)}{(t+`2)^2} = \frac{11t+22-11t-20}{(t+2)^2} = \frac{2}{(t+2)^2}$

- Igualamos la derivada a 0 : $f´(t) = \frac{2}{(t+2)^2} = 0$ y observamos que no tiene solución, por lo tanto no tendremos ni máximos ni mínimos.

  El tiempo inicial será t = 0 por lo tanto definimos los intervalos de la función de la siguiente manera:

	$(0,\infty)$
Signo de f´(x)	+
Comportamiento de f(x)	↗

Por lo tanto la función crecerá siempre. La función será creciente $(0,\infty)$

Observamos que $f´(t)= \frac{2}{(t+2)^2}$ es siempre positivo por lo tanto la función siempre crecerá.

c) En el último apartado nos pregunta cuál será la superficie de la mancha en el futuro. Para ello deberemos calcular el límite cuando t tiende a ∞ .

$\lim_{x\to\infty} \frac{11t+20}{t+2} = 11 \rightarrow$ Por lo tanto la superficie se estabilizará en 11 km^2

4) La cotización de las acciones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley: $C(x) = x^3 – 45x^2 +243x + 30000$, con x el número de días. ¿Cuál ha sido la cotización en Bolsa el día 2? Determina los días en que alcanza las cotizaciones máxima y mínima y Calcula esas cotizaciones máxima y mínima.

x → días de un mes de 30 días [0,30]

C(x) → Cotización de las acciones.

a) Debemos calcular la cotización en bolsa el día 2, es decir x = 2

$C(2) = 2^3 - 45\cdot 2^2 + 243\cdot 2 + 30000 =$ 30314 (como no nos dan las unidades, diremos que el valor ascenderá a 30314 unidades monetarias)

b) Para determinar los días en los que la cotización es máxima y mínima, debemos hallar primero la primera derivada de la función.

$C´(x) = 3x^2 – 90x + 243$

$C´(x) = 0 \rightarrow 3x^2 – 90x + 243 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 27 \end{cases}$

Para construir la tabla debemos tener en cuenta también que los intervalos de x van de [0,30]

	(0,3)	(3,27)	(27,30)
Signo de C´(x)	+	-	+
Comportamiento de C(x)	↗	↘	↗

La función será creciente : (0,3) ∪ (27,30)

La función será decreciente: (3,27)

Deberemos tener cuidado en los ejercicios donde tengamos varios intervalos. Tendremos que tener en cuenta los extremos del intervalo para calcular los valores del máximo y mínimo, en este caso [0,30].

Calculamos el valor de la función para x=0, x=3, x= 27 y x=30

$C(x) = x^3 – 45x^2 +243x + 30000$

$C (0) = 0^3 - 45\cdot 0^2 + 243\cdot 0 + 30000 = 30.000$ $C (3) = 3^3 - 45\cdot 3^2 + 243\cdot 3 + 30000 = 30.351$

$C (27) = 27^3 - 45\cdot 27^2 + 243\cdot 27 + 30000 = 23.439$ $C (30) = 30^3 - 45\cdot 30^2 + 243\cdot 30 + 30000 = 23.790$

La máxima cotización se alcanzará en el tercer día y ascenderá a 30.351 unidades monetarias.

La mínima cotización se alcanzará en el día 27 y ascenderá a 23.439 unidades monetarias.

5) Una agencia inmobiliaria maneja 40 apartamentos. Cuando el alquiler es de 270 dólares mensuales, todos están ocupados, mientras que por cada 20 euros de aumento se produce, en término medio, una vacante. Cada apartamento ocupado requiere un promedio de 10 euros mensuales de conservación y servicios. ¿Qué alquiler debe cobrarse para obtener el beneficio máximo?

Definimos: x→ Número de veces que aumentamos el precio en 20 €

f(x) → Beneficio obtenido en dólares

Los beneficios = Ingresos – Costes → B(x) = I(x) – C(x)

Ingresos → $I(x) = (40 - x)\cdot(270 + 20x)$

Costes → $C(x) = 10\cdot(40 - x)\cdot$

$B(x) = I(x) - C(x) = (40 - x)\cdot(270 + 20x) - 10\cdot(40 - x) = 10.800 - 270x + 800x - 20x^2 - 400 + 10x$

$B(x) = -20x^2 + 540x + 10.400$ → Función objetivo

Para poder calcular el máximo o el mínimo de la función objetivo debemos derivar nuestra función objetivo:

$B'(x) = -40x + 540$

$B'(x) = 0 \rightarrow -40x + 540 = 0 \rightarrow x = 13,5$ veces debemos aumentar el precio en 20€

	(0;13,5)	(13,5;∞)
Signo de B´(x)	+	-
Comportamiento de B(x)	↗	↘

El crecimiento de la función objetivo será: (0;13,5)

El decrecimiento de la función objetivo será (13,5; ∞)

El máximo se encontrará en x= 13,5

Comprobación: $B''(x) = -40 \rightarrow B''(13,5) = -40 < 0$ → Tendremos por lo tanto un máximo

El alquiler de cada apartamento ascenderá a $270 + 13,5\cdot 20 =$ **540 dólares**

El beneficio máximo ascenderá a : $B(13,5) = -20\cdot(13,5)^2 + 540\cdot(13,5) + 10.400 =$ **14045 dólares**

6) Un móvil se desplaza según la función: e (t) = $600t + 150t^3 - 115t^4 + 27t^5 - 2t^6$, que nos da el espacio en metros recorrido por el móvil en t minutos. Determina a cuántos metros de la salida está el punto en el que alcanza la máxima velocidad.

t→ minutos

e(t) → espacio recorrido en metros

Para poder calcular la máxima velocidad debemos calcular la derivada de la función objetivo.

$v(t) = e'(t) = 600 + 450\,t^2 - 460\,t^3 + 135\,t^4 - 12t^5$

Para calcular la velocidad máxima debemos derivar la función velocidad:

$v'(t) = 900t - 1380\,t^2 + 540\,t^3 - 60\,t^4$

Igualamos la derivada de la función velocidad a cero:

$v'(t) = 900t - 1380\,t^2 + 540\,t^3 - 60\,t^4 = 0 \rightarrow -60t\,(t^3 - 9t^2 + 23t - 15) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 3 \\ t = 5 \end{cases}$

	(0,1)	(1,3)	(3,5)	(5,∞)
Signo de v´(t)	+	-	+	-
Comportamiento de la función	↗	↘	↗	↘

Tendremos máximos en x=1 y en x=5

Tendremos un mínimo en x=3

Calculamos la velocidad para t = 0, t=1, t=3 y para t=5

$v(t) = e'(t) = 600 + 450\,t^2 - 460\,t^3 + 135\,t^4 - 12t^5$

- Para x = 0 → $v(0) = 600 + 450\cdot 0^2 - 460\cdot 0^3 + 135\cdot 0^4 - 12\cdot 0^5 = 600$ m/s
- Para x = 1 → $v(1) = 600 + 450\cdot 1^2 - 460\cdot 1^3 + 135\cdot 1^4 - 12\cdot 1^5 = 713$ m/s
- Para x = 3 → $v(3) = 600 + 450\cdot 3^2 - 460\cdot 3^3 + 135\cdot 3^4 - 12\cdot 3^5 = 249$ m/s
- Para x = 5 → $v(5) = 600 + 450\cdot 5^2 - 460\cdot 5^3 + 135\cdot 5^4 - 12\cdot 5^5 = 1225$ m/s

Por lo tanto la máxima velocidad se alcanzará para t = 5

El espacio recorrido será e (5) = $600\cdot 5 + 150\cdot 5^3 - 115\cdot 5^4 + 27\cdot 5^5 - 2\cdot 5^5 = 28.000$ metros

7) Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿A qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cuál será ese beneficio?

Definimos: x→ número de céntimos que aumentamos.

B(x)→ Beneficio medido en céntimos

Lo primero que debemos calcular es la función objetivo:

Los beneficios = Ingresos – Costes → B(x) = I(x) – C(x)

Ingresos → $I(x) = (50 + x)\cdot (200 - 2x)$

Costes → $C(x) = 40\cdot (200 – 2 x)$

$B(x) = I(x) – C(x) = (50 + x)\cdot (200 - 2x) - 40\cdot (200 – 2 x) = 10.000 + 200x -100x -2x^2 -8000 + 80x$

$B(x) = -2x^2 +180x + 2000$ → función objetivo

Derivamos nuestra función objetivo y la igualamos a cero:

$B´(x) = -4x + 180$

$B´(x) = 0 \rightarrow -4x + 180 = 0 \rightarrow x = 45$ céntimos

Comprobación:

$B´´(x) = -4 \rightarrow B´´(45) = - 4 < 0 \rightarrow$ Se trata un máximo

	(0, 45)	(45,∞)
Signo de B´(x)	+	-
Comportamiento de B(x)	↗	↘

Tendremos un máximo en x = 45

a) El precio de venta para que el beneficio sea máximo asciende a 50 + 45 = 95 céntimos
b) El beneficio máximo ascenderá a :

   $B(x) = -2x^2 +180x + 2000$

   $B(45) = -2\cdot 45^2 + 180\cdot 45 + 2000 = 6.050$ céntimos = 60,5 euros

Aumentando el precio de cada helado 45 céntimos (95 céntimos) obtendremos el máximo beneficio que ascenderá a 60,5 euros.

8) Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Definimos: x→ número adicional de árboles que se plantan

P(x)→ producción de los árboles

Nuestra función objetivo será:

$P(x) = (24 + x)(600 - 15x) = -15x^2 + 240x + 14\,400$

Buscamos x para que f (x) sea máxima, para ello derivamos nuestra función objetivo y la igualamos a 0:

$P'(x) = -30x + 240$

$P'(x) = 0 \rightarrow -30x + 240 = 0 \rightarrow x = 8$

Comprobación:

$P''(x) = -30 \rightarrow P''(8) < 0 \rightarrow$ Se trata de un máximo, que coincide con el vértice de la parábola.

	(0,8)	(8,∞)
Signo de P´(x)	+	-
Comportamiento de P(x)	↗	↘

Tendremos un máximo en x = 8

a) El número de árboles que debemos plantar para obtener el beneficio máximo será: 24 + 8 = 32 árboles.
b) La producción será máxima cuando x = 8 y ascenderá a:

$P(x) = (24 + x)(600 - 15x) = -15x^2 + 240x + 14\,400$

$P(8) = -15\cdot 8^2 + 240\cdot 8 + 14400 =$ 15360 frutos

9) Un agricultor estima que si vende el kilogramo de cebollas a x céntimos de euro, entonces su beneficio por kilogramo sería igual a b(x)=100x – x^2 – 2475 ¿Qué niveles de precios suponen beneficios para el agricultor? ¿Cuál es el precio que maximiza el beneficio del agricultor? Si dispone de 50000 kg de cebollas. ¿cuál es el beneficio?

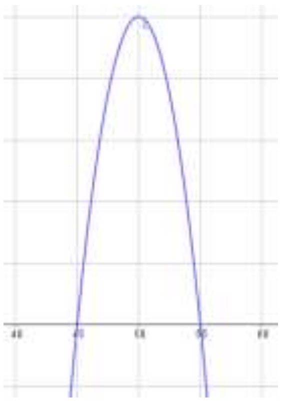
Definimos: x→ precio del kg de cebollas en céntimos de euro.

f(x) → beneficio por kg en céntimos.

a) Para que los niveles de precios produzcan beneficios debemos calcular el intervalo donde el valor de la función sea positivo. Nos damos cuenta que la función objetivo se trata de una parábola cóncava hacia abajo (ya que el término cuadrático es negativo)

Calculamos primero los puntos de corte de la función con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow 100x - x^2 - 2475 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 45 \\ x = 55 \end{cases}$$



Como observamos en la gráfica, la función es positiva (beneficio positivo) en el intervalo **[45,55]**

Comprobación: (Signo de la función)

	(-∞, 45)	(45,55)	(55,∞)
Signo de f(x)	-	+	-

Para que los beneficios sean positivos el precio del kg de cebollas debe estar comprendido entre los 45 y 55 céntimos.

b) Para calcular el beneficio máximo debemos calcular la derivada de la función objetivo y la igualaremos a cero.

$f'(x) = 100 - 2x = 0 \rightarrow x = 50$

Comprobación: $f''(x) = -2 \rightarrow f''(50) = -2 < 0 \rightarrow$ Por lo tanto se trata de un máximo

	(0,50)	(50,∞)
Signo de f´(x)	+	-
Comportamiento de f(x)	↑	↓

Tendremos un máximo en x = 50

c) El beneficio para 1 kg de cebollas será máximo cuando vendemos el kg a 50 céntimos (x=50)

$f(x) = 100x - x^2 - 2475 \rightarrow f(50) = 100 \cdot 50 - 50^2 - 2475 = 25$ céntimos

Disponemos de 50000 cebollas, el beneficio será:

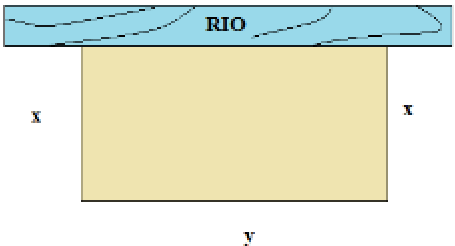
50000·25 = 1.250.000 céntimos = 12.500 euros

El beneficio al vender 50.000 cebollas a un precio de 50 céntimos cada kg será de 12.500 euros.

10) Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180.000 m^2 para producir suficiente forraje para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de forma que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado?

Definimos: x→ ancho de la finca.

y→ longitud de la finca



La función objetivo: (utilización de la mínima cantidad de valla, es decir que el perímetro sea mínimo teniendo en cuenta que el lado del río no está vallado).

Función Objetivo: $P(x,y) = 2x + y$

Condición : $x \cdot y = 180.000 \rightarrow y = \frac{180.000}{x}$

$P(x) = 2x + \frac{180.000}{x}$

Derivamos la función objetivo y lo igualamos a cero.

$P'(x) = 2 - \frac{180.000}{x^2}$

$P'(x) = 0 \rightarrow 2 - \frac{180.000}{x^2} = 0$

$2x^2 - 180.000 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -300 \text{ m (no vale ya que longitud no puede ser negativa)} \\ x = 300 \text{ m} \end{cases}$

Comprobación:

$P''(x) = 2 + \frac{360.000}{x^3} \rightarrow P''(300) = 2 + \frac{360.000}{50^3} > 0 \rightarrow$ tendremos un mínimo

Las dimensiones que debe tener la valla para que el perímetro sea mínimo:

$x = 300$ m

$y = \frac{180.000}{x} = \frac{180.000}{300} = 600$ m

11) Hallar dos números cuya suma es 18, sabiendo que el producto del uno por el cuadrado del otro ha de ser máximo.

x → Primer número

y → Segundo número

Función Objetivo: La función objetivo es aquella que maximiza el producto de uno por el cuadrado del otro.

$P(x,y) = x\cdot y^2$

Condición: x + y =18 → y = 18 – x

$P(x) = x\cdot(18-x)^2$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$P'(x) = (18-x)^2 + 2\cdot(18-x)\cdot(-1)\cdot x = 324 + x^2 - 36x - 36x + 2x^2 = 3x^2 - 72x + 324$

$P'(x) = 0 \rightarrow P'(x) = 3x^2 - 72x + 324 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 18 \end{cases}$

Comprobación: Para realizar la comprobación debemos calcular la segunda derivada.

$P''(x) = 6x - 72$

Para x= 6 → $P''(6) = 6\cdot 6 - 72 = -36 < 0$ → Tendremos un máximo en x= 6

Para x = 18 → $P''(18) = 6\cdot 18 - 72 = 108 - 72 = 36 > 0$ → Tendremos un mínimo en x = 18 (Nos piden un máximo)

	(-∞, 6)	(6,18)	(18,∞)
Signo de P´(x)	+	-	+
Comportamiento de P(x)	↗	↘	↗

Tendremos un máximo en x=6

Tendremos un mínimo en x= 18

En este caso nos piden calcular el máximo por lo que nuestra solución será x = 6

La solución: El primer número será x = 6

El segundo número será y = 18-x = 18 -6 = 12

12) La cantidad de agua recogida en un determinado año (en millones de litros) en cierto pantano, como función del instante (en meses) viene dada a través de la expresión: f(t)=$\frac{10}{(t-6)^2+1}$¿En qué instante se obtuvo la cantidad máxima de agua?¿Cuál fue esa cantidad máxima?

x→ Instante expresado en meses.

y→ Cantidad de agua en millones de litros

a) Para calcular el instante en el que encontramos la máxima cantidad de agua, debemos derivar la función objetivo e igualarla a cero.

$f'(t) = \frac{0\cdot[(t-6)^2+1]-2(t-6)\cdot 10}{((t-6)^2+1)^2}$

$f'(t) = 0 \rightarrow \frac{0\cdot[(t-6)^2+1]-2(t-6)\cdot 10}{((t-6)^2+1)^2} = 0 \rightarrow -20\cdot(t-6) = 0 \rightarrow t = 6$

Comprobación:

	(0,6)	(6,∞)
Signo de f´(t)	+	-
Comportamiento de f(x)	↗	↘

Tendremos un máximo en t= 6

La máxima cantidad de agua se registrará en el 6º mes, es decir en el mes de Junio.

b) La cantidad máxima embalsada corresponderá en el mes de Junio, es decir para t = 6

$f(6) = \frac{10}{(6-6)^2+1} = 10$ (millones de litros)

La máxima cantidad de agua embalsada será de 10 millones de litros que corresponderá al mes de Junio

13) Una agencia organiza un viaje para el que ya se han inscrito 25 personas. Ha contratado un avión por 3.000 euros y además debe asumir unos gastos por persona de 450 euros. Cada viajero debe pagar 1.500 euros. La agencia propone la siguiente oferta: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará en 6 euros el precio del viaje. ¿Cuál será el número óptimo de viajeros que maximice los beneficios? ¿A cuánto ascienden esos máximos beneficios? (CANTABRIA JUNIO 2009)

x→ número de viajeros adicionales en el viaje.

B(x)→ beneficio en euros

Los beneficios = Ingresos – Costes

$B(x) = I(x) – C(x) = (1500-6x)(25+x) – (3000 + 450(25+x))$

$B(x) = 37.500 – 150x + 1500x - 6x^2 – 3000 – 11250 - 450x = -6x^2+900x+23250$ → Función Objetivo

$B(x) = -6x^2+900x+23250$ → Función Objetivo

Para calcular el valor que maximiza la función objetivo debemos derivar la función e igualarla a cero:

$B'(x) = -12x + 900$

$B'(x) = 0 \rightarrow B'(x) = -12x + 900 = 0 \rightarrow x = 75$

Demostración:

$B''(x) = -12 \rightarrow B''(75) = -12 < 0$ → Se trata de un máximo

	(0,75)	(75,∞)
Signo de B´(x)	+	-
Comportamiento de B(x)	↗	↘

Tendremos un máximo en x= 75

Para que el beneficio sea máximo el número de personas que deberán ir al viaje será de : 25+75 = 100 personas

El beneficio ascenderá a: **$B(x) = -6x^2+900x+23250$**

$B(75) = -6\cdot 75^2+900\cdot 75+23250 =$ 57.000€

14) En una empresa la relación entre la producción x (en miles de toneladas) y el coste medio de fabricación C(x) (en miles de euros) es de la forma: $C(x)= 2+x+\frac{9}{x}$ $1 \leq x \leq 10$ Calcula la cantidad de producción que maximiza el coste medio y cuál es dicho coste máximo. Calcula la cantidad de producción que minimiza el coste medio y cuál es dicho coste mínimo. Si no se desea superar los 12 mil euros de coste medio, ¿entre qué valores deberá estar comprendida la producción?

$x \rightarrow$ miles de toneladas. $x \in [1,10]$

$C(x) \rightarrow$ coste en miles de euros

Para calcular las toneladas que maximizan o minimizan el coste debemos derivar la función objetivo e igualarlo a cero.

$\mathbf{C(x)= 2+x+\frac{9}{x}}$ $\qquad C'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$

$C'(x) = 0 \rightarrow C'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ (no vale ya que } x \in [1,10]) \\ x = 3 \end{cases}$

Para realizar la tabla debemos tener en cuenta que $x \in [1,10]$

	(1,3)	(3,10)
Signo de C´(x)	-	+
Comportamiento de C(x)	↘	↗

Tenemos un mínimo en x=3

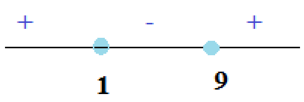
Debemos calcular el coste para estos 3 valores :

- $x = 1 \rightarrow C(1)= 2+1+\frac{9}{1} = 12$ miles de euros
- $x = 3 \rightarrow C(3)= 2+3+\frac{9}{3} = 8$ miles de euros
- $x = 10 \rightarrow C(1)= 2+10+\frac{9}{10} = 12{,}9$ miles de euros

a) La producción que maximiza la función será 10.000 toneladas y el coste ascenderá a 12.900 euros.
b) La producción que minimiza la función será 3.000 toneladas y el coste ascenderá a 8.000 euros.
c) Como el coste no debe superar los 12 mil euros :

$C(x)= 2+x+\frac{9}{x} \leq 12$ (ya que el coste está expresado en miles)

$x^2 -10x + 9 \leq 0$ (Se trata de resolver esta inecuación)



Solución: $x \in [1,9]$ por lo tanto para que el coste no supere los 12 mil euros, la producción deberá oscilar entre las 1000 y las 9000 toneladas.

15) (EBAU 2017- Septiembre) El representante de una firma de perfumes tiene un sueldo fijo mensual de 1500 euros. También recibe una comisión, -0.05$x^2 + 0.7x + 30$, que depende del número de tiendas, x, que incluye al mes en su cartera de clientes. Por otro lado, sus gastos fijos mensuales ascienden a 425 euros. ¿Cuántas tiendas debería incorporar al mes para obtener una ganancia máxima?

x → número de tiendas

Ingresos → I(x) = 1500 +(-0.05$x^2 + 0.7x + 30$)

Gastos → G(x) = 425

Ganancia = Ingresos – Gastos → f(x) = I(x) – G(x) = I(x) = 1500 -0.05$x^2 + 0.7x + 30$ – 425

f(x) = -0.05x^2 +0.7x+1105 → Función Objetivo

- **Derivamos nuestra función objetivo y lo igualamos a cero para calcular los posibles extremos relativos:**

  f´(x)= -0.1x + 0.7 = 0 → x = $\frac{0.7}{0.1}$ = 7 tiendas

- **Comprobación:**

  f´´(x) = -0.1 → f´´(7) = -0.1 < 0 → Se trata de un máximo

- Para obtener la máxima ganancia el representante de una firma debe incorporar 7 tiendas al mes en su cartera de clientes, ascendiendo su ganancia a :

  f(7) = -0.05·$7^2 + 0.7 \cdot 7 + 1105$ = 1107.45 euros

16) (EBAU Junio -2017) Durante el anterior periodo de rebajas, una tienda ofreció un artículo a 50 euros la unidad y las ventas fueron de 20 unidades. Un estudio revela que por cada euro que disminuya el precio en las próximas rebajas, conseguirá vender 4 unidades más. Por otro lado la tienda ha asumido un coste de 35 euros por cada unidad del producto. ¿Qué precio de venta por unidad debe fijar para maximizar los beneficios obtenidos durante el nuevo periodo de rebajas?

Definimos: x→ número de euros que disminuimos

Beneficios = Ingresos – costes → B(x) = I(x) – C(x)

I(x) = (20+4x)·(50-x)

C(x) = 35 · (20+4x)

B(x) = I(x) – C(x) = (20+4x)·(50-x) - 35 · (20+4x) → **B(x) = -4$x^2 + 40x + 300$ → Función Objetivo**

- Derivamos nuestra función Objetivo y lo igualamos a cero para calcular los posibles extremos relativos:

  B´(x) = -8x+ 40 → B´(x) = 0 → -8x +40 = 0 → x= 5 euros

- Comprobación:

  B´´(x) = -8 → B´´(5) = -8 < 0 → Se trata de un máximo

Para maximizar los beneficios el precio de venta debe ser de (50 -5) = 45 euros la unidad, ascendiendo los beneficios a:

B(x) = -4x$^2 + 40x + 300$ → B(5) = -4·$5^2 + 40 \cdot 5 + 300$ = 400 euros

17) (PAU- Junio-2016) El coste de producción de x unidades mensuales de un determinado producto es $C(x)=\frac{x^2}{2}+25x+25$, y el precio de venta de cada unidad es $70-\frac{x}{3}$ euros. Hallar el número de unidades que deben venderse mensualmente para que el beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio?¿Y los ingresos?

Definimos: x→ unidades mensuales de un determinado producto

C(x) → Coste

I(x) → Ingresos

B(x)→ Beneficio

Beneficio = Ingresos – Coste → B(x) = I(x) – C(x)

$I(x) = x\cdot(70-\frac{x}{3})$ lo hemos multiplicado por x porque el precio de venta que nos dan es por cada unidad

$C(x) = \frac{x^2}{2}+25x+25$

$B(x) = I(x) - C(x) = x\cdot(70-\frac{x}{3}) - (\frac{x^2}{2}+25x+25) = \boldsymbol{-\frac{5}{6}x^2+45x-25}$ → **Función Objetivo**

- **Derivamos la función objetivo y lo igualamos a cero para calcular los extremos relativos:**

  $B'(x) = -\frac{10}{6}x+45$

  $B'(x) = 0 \rightarrow -\frac{10}{6}x+45 = 0 \rightarrow x = 27$ unidades mensuales

- **Comprobación:**

  $B''(x) = -\frac{10}{6} \rightarrow B''(27) = -\frac{10}{6} < 0 \rightarrow$ Tendremos un máximo

Para obtener el máximo beneficio de producir 27 unidades mensuales de un determinado producto, ascendiendo el beneficio a:

$B(27) = -\frac{5}{6}27^2+45\cdot 27-25 =$ 582,5 euros mensuales

Los Ingresos serán de: $I(x) = x\cdot(70-\frac{x}{3})$

$I(27) = 27\cdot(70-\frac{27}{3}) =$ 1647 euros mensuales

18) **(PAU Septiembre 2012) La confitería de una pequeña localidad elabora un dulce típico, una tarta de hojaldre y crema, para venderlo durante las fiestas del pueblo. En las fiestas del año anterior fijó el precio de venta en 15 € la unidad, vendiendo así 20 tartas en total. Este año quiere bajar el precio y calcula que por cada euro menos, venderá 4 tartas más. Por otro lado, la elaboración de cada tarta le supone un gasto de 6 euros. ¿A qué precio debe vender cada tarta para maximizar los beneficios obtenidos con este dulce durante las fiestas? ¿Qué beneficios se alcanzan?**

Definimos: x→ número de euros que descuenta.

C(x) → Coste

I(x) → Ingresos

B(x)→ Beneficio

Beneficio = Ingresos – Coste → B(x) = I(x) – C(x)

$I(x) = (15-x)(20+4x) = 300+60x-20x-4x^2 = -4x^2+40x+300$

$C(x) = 6\cdot(20+4x) = 120 +24x$

$B(x) = I(x) – C(x) = -4x^2+40x+300 – (120 +24x) = -4x^2+ 16x +180$ → **Función Objetivo**

- **Derivamos la función objetivo y lo igualamos a cero para calcular los extremos relativos:**

  $B´(x) = -8x +16 = 0 \rightarrow x= 2$ euros descuenta

- **Comprobación:**

  $B´´(x) = -8 \rightarrow B´´(2) = -8 < 0$ → Se trata de un máximo

Para maximizar los beneficios el precio de venta debe ser de (15 -2) = 13 euros la unidad, ascendiendo los beneficios en las fiestas a:

$B(x) = -4x^2+ 16x +180 \rightarrow B(2) = -4\cdot 2^2+ 16\cdot2 +180 = 196$ euros

19) (EBAU Septiembre 2022) Se sabe que la evolución del precio del oro en el mercado (P, expresado en €/kg) a lo largo de un mes de 31 días viene dado por la siguiente función: P(d) = $\frac{1}{3}d^3 - 15d^2 + 144d + 1500$, con $1 \leq d \leq 31$ donde d indica el día del mes. ¿Qué día del mes habría que vender el oro para obtener la máxima ganancia? ¿A cuánto ascendería dicha ganancia si se vendiesen 4 kg de oro? ¿Qué día del mes es el peor para vender oro? ¿Cuál sería la ganancia si se vendiesen los 4 kg de oro ese día? Si se viese obligado a vender 1 kg de oro entre los días 20 y 31 del mes y quisiera obtener la máxima ganancia, ¿en qué día lo haría? ¿Cuánto ganaría con la venta?

Se trata de un ejercicio de Optimización.

Sea d→ día del mes

Función Objetivo → Beneficio → P(d) = $\frac{1}{3}d^3 - 15d^2 + 144d + 1500$

- Derivamos la función objetivo y lo igualamos a cero:

  P´(d) = $d^2 - 30d + 144d = 0 \rightarrow \begin{cases} d = 6 \\ d = 24 \end{cases}$

- Vamos a comprobar que se trata de un máximo o un mínimo:

  B´´(x) = 2d -30

  B´´(6)= $2 \cdot 6 - 30 = -18 < 0$ → por lo tanto tendremos un máximo

  B´´(24)= $2 \cdot 24 - 30 = 18 > 0$ → por lo tanto tendremos un mínimo

a) El mejor día para vender oro y obtener la máxima ganancia es el 6 día del mes. La ganancia para este sexto día es :
P(6) = $\frac{1}{3} \cdot 6^3 - 15 \cdot 6^2 + 144 \cdot 6 + 1500 = 1896€/kg$
Como nos piden para 4kg: 4· 1896 = 7584€

b) El peor día para vender oro y obtener la mínima ganancia es el día 24 del mes. La ganancia para este 24 día es
P(24) = $\frac{1}{3} \cdot 24^3 - 15 \cdot 24^2 + 144 \cdot 24 + 1500 = 924€/kg$

Como nos piden para 4kg: 4· 924 = 3696€

c) Observamos que:
Del [20,24] la función decrecerá hasta alcanzar el mínimo en el día 24
Del [24,30] la función crecerá hasta alcanzar nuevamente un máximo en el día 6, a partir de ese momento la función volverá a decrecer.
Calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo y en uno de ellos estará el máximo. Aunque según lo que hemos comentado anteriormente, el máximo estará en el día 31.
P(20) = $\frac{1}{3} \cdot 20^3 - 15 \cdot 20^2 + 144 \cdot 20 + 1500 = 1046{,}67€/kg$
P(24) = $\frac{1}{3} \cdot 24^3 - 15 \cdot 24^2 + 144 \cdot 24 + 1500 = 924€/kg$
P(31) = $\frac{1}{3} \cdot 31^3 - 15 \cdot 31^2 + 144 \cdot 31 + 1500 = 1479{,}34€/kg$

Debería venderlo el día 31, siendo la ganancia de 1479,34 €/kg

20) (EBAU Julio 2021) Una agencia de viajes organiza una excursión para los empleados de una empresa. Eso le supone gastos fijos por viajero de 475 euros además de los 850 euros del alquiler del autocar. Con un grupo de 20 personas, cobra a cada viajero 525 euros, pero presenta la siguiente oferta a la empresa: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará el precio del viaje en 1,25 euros. ¿Con cuántos viajeros consigue unos beneficios máximos?¿Cuánto paga cada viajero?

Se trata de un ejercicio de Optimización.

Sea x→ número de viajeros nuevos inscritos

Vamos a calcular la función objetivo:

Beneficio = Ingresos – Costes → B(x) = I(x) – C(x)

Ingresos = I(x) = (20+x)·(525-1,25x)

Costes = C(x) = 475·(20+x)+850

Función Objetivo → B(x) = (20+x)·(525-1,25x)-[475·(20+x)+850]= $= -x^2$+40x+300

$$B(x)= \mathbf{-1,25x^2}+25x+150$$

- Derivamos la función objetivo y lo igualaremos a cero:

  B´(x) = -2,5x+25 =0→ x= $\frac{25}{2,5} = 10$ viajeros nuevos inscritos

- Vamos a comprobar que se trata de un máximo:

  B´´(x) = -2,5 → B´´(10)= -2,5<0 → por lo tanto tendremos un máximo

- Calculamos el beneficio:

  B(x)= $-1,25x^2$+25x+150 → B(10)= -1,25·10^2+25·10+150= 275 euros

Para maximizar el beneficio, el número de viajeros inscritos nuevos debe ser de 10 (por lo tanto deben contratar el viaje 30 viajeros), ascendiendo el beneficio a 275 €.

Cada viajero debe pagar 525 – 1,25· 10 = 512,5€

21) (EBAU Junio 2019) Una empresa juguetera puede vender x unidades al mes de un determinado modelo de tren eléctrico, al precio de 518-x^2 euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de 275x euros que dependen del número x de unidades. Hallar el número de unidades que maximizan el beneficio mensual. ¿A cuánto ascienden los ingresos?

Se trata de un ejercicio de Optimización.

Sea x→ número de unidades vendidas al mes de un tren eléctrico

Vamos a calcular la función objetivo:

Beneficio = Ingresos – Costes → B(x) = I(x) – C(x)

Ingresos → I(x) = x· $(518 - x^2)$

Costes → C(x) = 225 + 275 x

Función Objetivo → Beneficio → B(x) = I(x) – C(x) = x· $(518 - x^2) -$ (225 + 275 x) = $\boldsymbol{-x^3 + 243x - 225}$

- Derivamos la función objetivo y lo igualamos a cero:

  B´(x) = - $3x^2 + 243$ → - $3x^2 + 243$= 0 → x= $\pm\sqrt{\frac{243}{3}} = \pm 9$ unidades vendidas al mes. Únicamente nos quedamos con la solución positiva.

- Vamos a comprobar que se trata de un máximo:

  B´´(x) = -6x → B´´(9)= -54<0 → por lo tanto tendremos un máximo

- Calculamos el beneficio:

  B(x)= $-x^3 + 243x - 225$ → B(9)= $-9^3 + 243 \cdot 9 - 225 = 1233$€

Para maximizar el beneficio, deberíamos vender al mes 9 trenes eléctricos, ascendiendo el beneficio a 1233€

Los Ingresos ascenderán a: I(9)= 9· $(\mathbf{518 - 9^2}) =$ **3933€**

22) (EBAU Junio 2018) Un agricultor cultiva árboles frutales. En concreto tiene a su cargo 10 limoneros y cada uno produce 70 frutos. Tiene pensado ampliar el huerto pero ha calculado que por cada nuevo árbol plantado, disminuye en 5 unidades el número de limones producido por cada ejemplar. ¿Cuántos árboles más debería plantar para obtener la producción total máxima?

Se trata de un ejercicio de Optimización.

Sea x→ número de árboles adicionales que plantamos

Función Objetivo → Producción → $P(x) = (10 + x)\cdot(70-5x) = -5x^2 + 20x + 700$

- Derivamos la función objetivo y lo igualamos a cero:

  $P'(x) = -10x + 20 \rightarrow -10x + 20 = 0 \rightarrow x = \frac{20}{10} = 2$ árboles adicionales que debemos plantar.

- Vamos a comprobar que se trata de un máximo:

  $P''(x) = -10 \rightarrow P''(2) = -10 < 0 \rightarrow$ por lo tanto tendremos un máximo

- Calculamos la producción:

  $P(x) = -5x^2 + 20x + 700 \rightarrow P(2) = -5\cdot 2^2 + 20\cdot 2 + 700 = 720$ limones

Para maximizar la producción, deberíamos plantar 2 limoneros, ascendiendo la producción a 720 limones.

23) (EBAU Septiembre 2018) El coste, en euros, de fabricar x unidades de un producto es C(x) = 3x + 25. Se ha fijado un precio de venta por unidad que también depende del número de unidades producidas: $\mathbf{13 - \frac{x^2}{750}}$ euros. ¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtener los máximos beneficios? ¿Cuál es el precio de venta por unidad que debe fijarse para obtener dichos beneficios?

a) Definimos: x → unidades que se deben fabricar para obtener el máximo beneficio

El beneficio es igual a los ingresos menos los costes. Si el precio de venta de cada unidad es $\mathbf{13 - \frac{x^2}{750}}$, los ingresos por la venta de x unidades serán: $I(x) = x\left(13 - \frac{x^2}{750}\right)$ Como la función de costes de x unidades es $C(x) = 3x + 25$, entonces, la función de beneficios será: $B(x) = I(x) - C(x) = x\left(13 - \frac{x^2}{750}\right) - (3x + 25) \rightarrow B(x) = \frac{-x^3}{750} + 10x - 25$

El beneficio máximo se da en la solución de $B'(x) = 0$ que haga negativa a $B''(x)$:

$B'(x) = -\frac{3}{750}x^2 + 10 = 0 \rightarrow x^2 = 2500 \rightarrow x = \pm 50$ unidades → Cogemos únicamente la solución positiva

Como $B''(x) = -\frac{6x}{750} \rightarrow B''(50) = -\frac{6\cdot 50}{750} < 0$, para x = 50 se obtiene el beneficio máximo.

Ese beneficio máximo es $B(50) = \frac{-50^3}{750} + 10\cdot 50 - 25 = 308,\hat{3}$ €

El número de unidades que se deben fabricar para obtener el máximo beneficio será de 50 unidades

El precio de venta por unidad será de : $13 - \frac{x^2}{750} = 13 - \frac{50^2}{750} = 9,\hat{6}$ euros