

$$f(x) = x^3 - x$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

Simetrías

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x) \quad \text{Tiene simetría impar}$$

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{El punto de corte será el } (0,0)$$

$$\rightarrow x = 1 \quad \text{El punto de corte será el } (1,0)$$

$$\rightarrow x = -1 \quad \text{El punto de corte será el } (-1,0)$$
- Corte con el eje OY :

$$f(0) = (0)^3 - 0 = 0 \quad \text{El punto de corte será el } (0,0)$$

Asíntotas Verticales:

No hay ya que el $D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$

Asíntota Horizontal

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x = \infty$ No tiene asíntota horizontal.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x = -\infty$

Asíntota Oblicua

No hay asíntota oblicua

Signo de la función

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f(x)$	-	+	-	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = +\sqrt{\frac{1}{3}} \text{ y } x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

	$(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(+\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Comportamiento de $f(x)$	\nearrow	\searrow	\nearrow

- Crecimiento : $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty)$
- Decrecimiento: $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$
- Tenemos un mínimo en $(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{2\sqrt{3}}{9})$
- Tenemos un máximo en $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{9})$

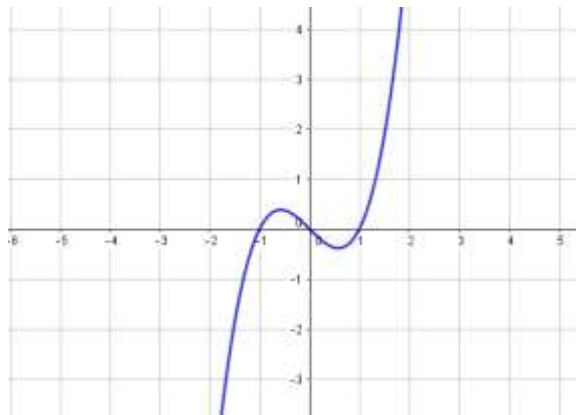
Concavidad

$$f''(x) = 6x \quad f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \quad x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+
Comportamiento de $f(x)$	\cap	\cup

- Cóncava hacia arriba: $(0, \infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0)$
- Punto de inflexión $(0, 0)$

Representación gráfica



$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

Simetrías

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 + (-x) - 1 = -x^3 - x^2 - x - 1 \quad f(-x) \neq f(x) \quad \text{No tiene simetría par}$$

$$f(-x) \neq -f(x) \quad \text{No tiene simetría impar}$$

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 1 \quad \text{El punto de corte será el (1,0)}$$

- Corte con el eje OY :

$$f(0) = (0)^3 - (0)^2 + 0 - 1 = -1 \quad \text{El punto de corte será el (0,-1)}$$

Asíntotas Verticales

No hay ya que el $D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$

Asíntota Horizontal

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2 + x - 1 = \infty$ No tiene asíntota horizontal.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x^2 + x - 1 = -\infty$

Asíntota Horizontal

No hay asíntota oblicua

Signo de la función

	$(-\infty, 1)$	$(1, 0)$
Signo de $f(x)$	-	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución real}$$

	$(-\infty, \infty)$
Signo $f'(x)$	+
Comportamiento de $f(x)$	↗

- Crecimiento : $(-\infty, \infty)$
- Decrecimiento: No hay
- No hay ni mínimo ni máximo

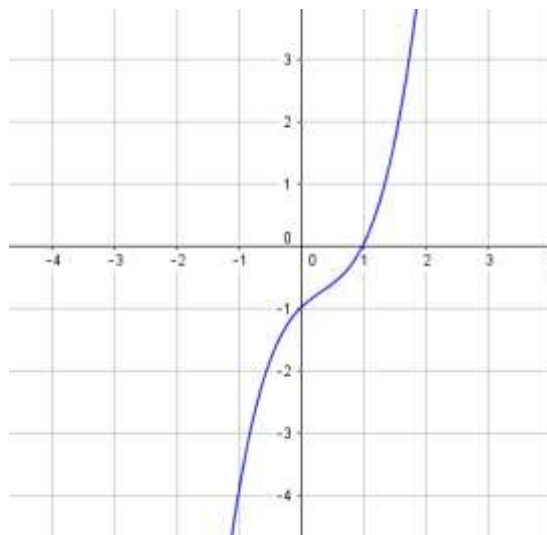
Concavidad

$$f''(x) = 6x - 2 \quad f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 2 = 0 \quad x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+
Comportamiento de $f(x)$	\cap	U

- Cóncava hacia arriba: $(\frac{1}{3}, \infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, \frac{1}{3})$
- Punto de inflexión $(\frac{1}{3}, -\frac{20}{27})$

Representación gráfica



$$f(x) = x^3 + x^2 - 12x \quad (\text{EBAU 2018 Septiembre})$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

Simetrías

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 - 12(-x) = -x^3 - x^2 + 12x \quad f(-x) \neq f(x) \text{ No tiene simetría par}$$

$$f(-x) \neq -f(x) \text{ No tiene simetría impar}$$

Puntos de corte con los ejes

$$\begin{aligned} \text{Con el eje OX} \rightarrow x^3 + x^2 - 12x = 0 \rightarrow & \begin{cases} x_1 = -4 & (-4,0) \\ x_2 = 0 & (0,0) \\ x_3 = 3 & (3,0) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Con el eje OY} \rightarrow f(0) = 0^3 + 0^2 - 12 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0,0)$$

Asíntotas Verticales

No hay ya que el $D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$

Asíntota Horizontal

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + x^2 - 12x = \infty$ No tiene asíntota horizontal.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x^2 - 12x = -\infty$

Asíntota Horizontal

No hay asíntota oblicua

Signo de la función

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $f(x)$	-	+	-	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 - \sqrt{148}}{6} = -2,36 \\ x_2 = \frac{-2 + \sqrt{148}}{6} = 1,69 \end{cases} \rightarrow \text{Posibles extremos relativos}$$

	$(-\infty, -2,36)$	$(-2,36; 1,69)$	$(1,69; \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-	+
Comportamiento de $f(x)$	\nearrow	\searrow	\nearrow

- Crecimiento: $(-\infty, -2,36) \cup (1,69, \infty)$
- Decrecimiento: $(-2,36; 1,69)$
- Máximo: $(-2,36; 20,75)$
- Mínimo: $(1,69; -12,6)$

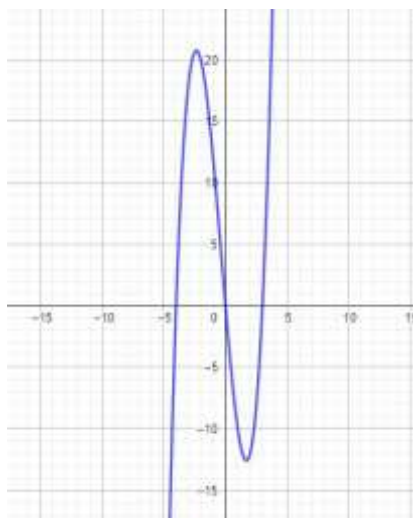
Concavidad

$$f''(x) = 6x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+
Comportamiento de $f(x)$	\cap	\cup

- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -\frac{1}{3})$
- Cóncava hacia arriba: $(-\frac{1}{3}, \infty)$
- Punto de Inflexión: $(-0,33; 4,07)$

Representación gráfica



$$F(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2} \quad (\text{EBAU 2019 Junio})$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + (-x) - 2}{(-x) - 2} = \frac{x^2 - x - 2}{-x - 2} \quad f(-x) \neq f(x) \quad \text{No tiene simetría par}$$

$$f(-x) \neq -f(x) \quad \text{No tiene simetría impar}$$

Cortes con los ejes

- Con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2+x-2}{x-2} = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1,0) \\ (2,0) \end{cases}$ (No existe la función)
- Con el eje Y : $x=0 \rightarrow f(0) = 1 \quad (0,1)$

Asíntotas Verticales

Para $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-2}{x-2} = \frac{4}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \rightarrow \text{Calculamos los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+x-2}{x-2} = \frac{+}{0^-} = -\infty \rightarrow \text{Tenemos una Asíntota Vertical en } x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x-2}{x-2} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Como el grado del numerador es igual que el grado del denominador, tendremos una Asíntota Horizontal.

Asíntota Oblicua: $y = mx+n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+x-2}{x-2}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-2}{x^2-2x} = 1 \quad \text{Asíntota oblicua: } y = x+3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-2}{x-2} - x = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-2-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{x-1} = 3$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - \text{Oblicua}$

$$g(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2} - (x+3) = \frac{x^2+x-2-x^2+2x-3x+6}{x-2} = \frac{4}{x-2}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x-2} = 0^+ \rightarrow$ La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x-2} = 0^- \rightarrow$ La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua

Monotonía

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{(2x+1) \cdot (x-2) - (1)(x^2+x-2)}{(x-2)^2} = \frac{(2x^2+x-4x-2) - x^2 - x + 2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow \text{Posibles Máximo o Mínimo (Extremos Relativos)}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-	-	+
Comportamiento de $f(x)$	↗	↘	↘	↗

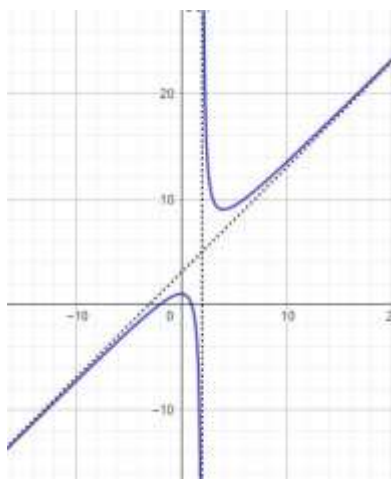
- Crecimiento: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
- Decrecimiento: $(0, 2) \cup (2, 4)$
- Mínimo en $x = 4$: $(4, 9)$
- Máximo en $x = 0$: $(0, 1)$

Concavidad

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)[(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x)]}{(x-2)^4} = \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow$ No hay puntos de Inflexión

Representación Gráfica:



$$F(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2, 6\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 2(-x)^2}{(-x)^2 - 8(-x) + 12} = \frac{-x^3 - 2x^2}{x^2 + 8x + 12}$$

$f(-x) \neq f(x)$ No tiene simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$ No tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12} = 0 \rightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (0,0) \\ (2,0) \end{cases}$ (No existe la función)
- Con el eje Y : $x=0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

Asíntotas Verticales

Para x = 2

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2)}{x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{(x-6)} = \frac{4}{-4} = -1 \rightarrow \text{No tenemos una Asíntota Vertical en } x = 2$$

Para x = 6

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12} = \frac{144}{0} \left[\frac{k}{0} \right] \rightarrow \text{Calculamos los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \frac{+}{0^-} = -\infty \quad \text{Tenemos una Asíntota Vertical en } x = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Como el Grado del Numerador > Grado del Denominador \rightarrow Tendremos una Asíntota

Asíntota Oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 - 8x^2 + 12x} = 1 \quad \text{Asíntota oblicua: } y = x + 6$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12} - x = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x^3 + 8x^2 - 12x}{x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 12x}{x^2 - 8x + 12} = 6$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - \text{Oblicua}$

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12} - (x + 6) = \frac{x^3 - 2x^2 - x^3 + 8x^2 - 12x - 6x^2 + 48x - 72}{x^2 - 8x + 12} = \frac{36x - 72}{x^2 - 8x + 12}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x - 72}{x^2 - 8x + 12} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{36x - 72}{x^2 - 8x + 12} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua}$$

Monotonía

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x) \cdot (x^2 - 8x + 12) - (2x - 8)(x^3 - 2x^2)}{(x^2 - 8x + 12)^2} = \frac{3x^4 - 4x^3 - 24x^3 + 32x^2 + 36x^2 - 48x - 2x^4 + 8x^3 + 4x^3 - 16x^2}{(x^2 - 8x + 12)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{x^4 - 16x^3 + 52x^2 - 48x}{(x^2 - 8x + 12)^2} = \frac{x \cdot (x-2)^2 (x-12)}{(x-2)^2 \cdot (x-6)^2} = \frac{x(x-12)}{(x-6)^2} = \frac{x^2 - 12x}{(x-6)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 12x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 12 \end{cases} \rightarrow$$

Posibles Máximos o Mínimo (Extremos Relativos), exceptuando en $x=2$ que no se encuentra dentro del dominio de la función

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 6)$	$(6, 12)$	$(12, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-	-	-	+
Comportamiento de $f(x)$	\nearrow	\searrow	\searrow	\searrow	\nearrow

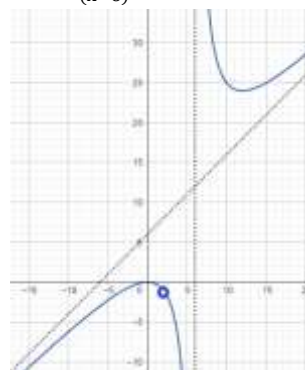
- Crecimiento: $(-\infty, 0) \cup (6, \infty)$
- Decrecimiento: $(0, 2) \cup (2, 6) \cup (6, 12)$
- Mínimo en $x = 4$: $(12, 24)$
- Máximo en $x = 0$: $(0, 0)$

Concavidad

$$f''(x) = \frac{(2x-12)(x-6)^2 - 2(x-6)(x^2-12x)}{(x-6)^4} = \frac{(x-6)[(2x-12)(x-6) - 2(x^2-12x)]}{(x-6)^4} = \frac{2x^2 - 12x - 12x + 72 - 2x^2 + 24x}{(x-6)^3} = \frac{72}{(x-6)^3}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow$ No hay puntos de Inflexión

Representación Gráfica:



$$f(x) = \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} \quad (\text{EBAU Junio 2022})$$

Se trata de una Función Racional, por lo tanto el dominio de la función existirá en todo \mathbb{R} exceptuando los valores que anulan el denominador.

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-4}{2} \quad D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-4, 2\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2+2(-x)-24}{(-x)^2+2(-x)-8} = \frac{2x^2-2x-24}{x^2-2x-8}$$

$f(-x) \neq f(x)$ No tiene simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$ No tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

El punto de corte será el ~~(-4,0)~~ (No está en el dominio)

El punto de corte será el (3,0)

- Corte con el eje OY ($x = 0$):

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 24}{0^2 + 2 \cdot 0 - 8} = 3 \rightarrow$$

El punto de corte será el (0,3)

Asíntotas Verticales:

Para $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \frac{-12}{0} \left[\frac{k}{0} \right] \rightarrow \text{Calculamos los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{-}{0^-} = +\infty \quad \text{Tenemos una Asíntota Vertical en } x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

Para $x = -4$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2(x+4)(x-3)}{(x+4)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2(x-3)}{(x-2)} = \frac{7}{3} \rightarrow \text{No hay una Asíntota vertical en } x = -4$$

Como el Grado del Numerador = Grado del Denominador \rightarrow Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = 2 \end{array} \right. \quad \text{Tenemos una Asíntota Horizontal en } y = 2$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Horizontal

$$g(x) = \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} - (2) = \frac{2x^2+2x-24-2x^2-4x+16}{x^2+2x-8} = \frac{-2x-8}{x^2+2x-8}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x-8}{x^2+2x-8} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x-8}{x^2+2x-8} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

Asíntota Oblicua : No tiene asíntota oblicua.

Signo de la función

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $f(x)$	+	+	-	

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{(4x+2)(x^2+2x-8) - (2x+2)(2x^2+2x-24)}{(x^2+2x-8)^2} = \frac{2x^2+16x+32}{(x^2+2x-8)^2} \quad f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 + 16x + 32 = 0 \rightarrow x = -4$$

No sería un extremo relativo, ya que $x = -4$ no se encuentra dentro de mi dominio

Si hubiéramos factorizado y simplificado nos quedaría: $f'(x) = \frac{2x^2+16x+32}{(x^2+2x-8)^2} = \frac{2(x+4)^2}{(x-2)^2(x+4)^2} = \frac{2}{(x-2)^2}$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	+
Comportamiento de $f(x)$	↗	↗	↗

- Crecimiento : $(-\infty, -4) \cup (-4, 2) \cup (2, \infty)$
- Decrecimiento: No hay
- No hay mínimo
- No hay máximo

Concavidad

$$f''(x) = \frac{(4x+16)(x^2+2x-8)^2 - 2(x^2+2x-8)(2x+2)(2x^2+16x+32)}{(x^2+2x-8)^4} = \frac{(x^2+2x-8)[(4x+16)(x^2+2x-8) - 2(2x+2)(2x^2+16x+32)]}{(x^2+2x-8)^4} =$$

$$\frac{-4x^3 - 48x^2 - 192x - 256}{(x^2+2x-8)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-4x^3 - 48x^2 - 192x - 256}{(x^2+2x-8)^3} \quad f''(x) = 0 \rightarrow x = -4$$

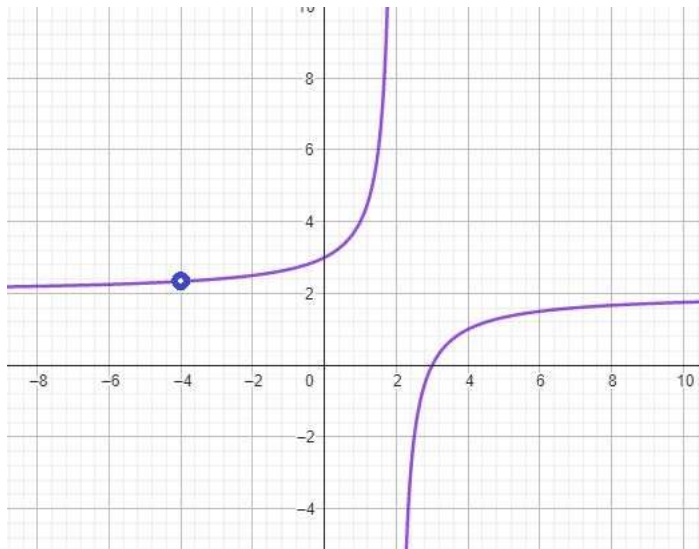
No sería un punto de inflexión, ya que $x = -4$ no se encuentra dentro de mi dominio

Si derivamos la función $f'(x)$ simplificada, nos quedaría $\rightarrow f''(x) = \frac{0 \cdot (x-2)^2 - 2(x-2) \cdot 2}{(x-2)^4} = \frac{-4(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{-4}{(x-2)^3}$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f''(x)$	+	+	-
Comportamiento de $f(x)$	U	U	∩

- Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -4) \cup (-4, 2)$
- Cóncava hacia abajo: $(2, \infty)$
- No hay puntos de inflexión

Representación gráfica



$$f(x) = \frac{x^2+x-5}{x-1} \quad (\text{EBAU Junio 2014})$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+(-x)-5}{(-x)-1} = \frac{x^2-x-5}{-x-1}$$

$f(-x) \neq f(x)$ No tiene simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$ No tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2+x-5}{x-1} = 0 \rightarrow x^2 + x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, 0) \\ (\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, 0) \end{cases}$
- Con el eje Y: $x=0 \rightarrow f(0) = 5 \rightarrow (0,5)$

Asíntotas Verticales:

Para x=1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-5}{x-1} = \frac{-3}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \quad \text{Calculamos los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+x-5}{x-1} = \frac{-}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x-5}{x-1} = \frac{-}{0^+} = -\infty \rightarrow$$

Tenemos una Asíntota Vertical en $x = 1$

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, tendremos una Asíntota Oblicua.

Asíntota Oblicua: $y = mx+n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+x-5}{x-1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-5}{x^2-x} = 1$$

Asíntota oblicua: $y = x+2$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-5}{x-1} - x = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-5-x^2+x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5}{x-1} = 2$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - \text{Oblicua}$

$$g(x) = \frac{x^2+x-5}{x-1} - (x+2) = \frac{x^2+x-5-x^2-2x+x+2}{x-1} = \frac{-3}{x-1}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x-1} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x-1} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua}$$

Monotonía

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)-1 \cdot (x^2+x-5)}{(x-1)^2} = \frac{(2x^2+x-2x-1)-(x^2+x-5)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow$ (No tiene solución real) \rightarrow No tendrá ni máximos ni mínimos.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	+
Comportamiento de $f(x)$	\nearrow	\nearrow

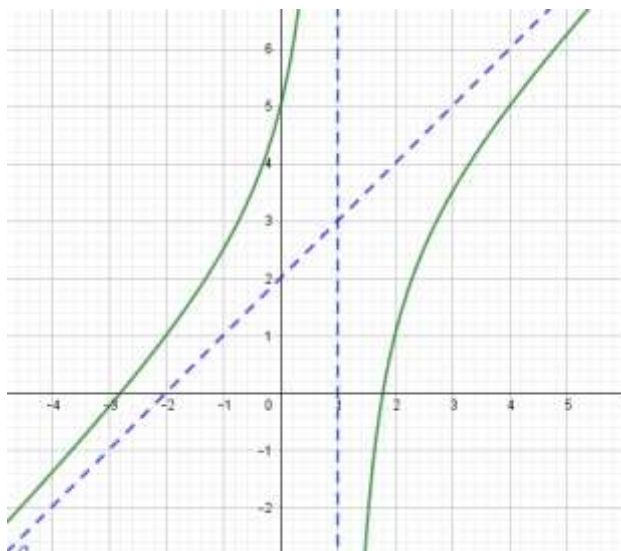
- Crecimiento: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
- Decrecimiento: No hay
- Máximos y Mínimos: No hay

Concavidad

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x+4)]}{(x-1)^4} = \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x-8}{(x-1)^3} = \frac{-6}{(x-1)^3}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow$ No hay puntos de Inflexión

Representación Gráfica:



$$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{2-(-x)} = \frac{x^2}{2+x}$$

$f(-x) \neq f(x)$ No tiene simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$ No tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

El punto de corte será el (0,0)

- Corte con el eje OY ($x = 0$):

$$f(0) = \frac{0^2}{2+0} = 0 \rightarrow$$

El punto de corte será el (0,0)

Asíntotas Verticales:

Para $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{2-x} = \frac{4}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \quad \text{Calculamos los límites laterales:}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{2-x} &= \infty \\ \blacksquare \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{2-x} &= -\infty \end{aligned}$$

Tiene una asíntota vertical en $x=2$

Como el Grado del Numerador > Grado del denominador con una diferencia de un grado \rightarrow tendremos una Asíntota Oblicua

Asíntota Horizontal

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2-x} &= -\infty \\ \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2-x} &= \infty \end{aligned}$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota Oblicua $y = mx+n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{2-x}}{\frac{x}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x-x^2} = -1$$

Asíntota oblicua: $y = -x-2$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2-x} + x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-x^2}{2-x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2-x} = -2$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Oblicua

$$g(x) = \frac{x^2}{2-x} - (-x-2) = \frac{x^2+2x-x^2+4-2x}{2-x} = \frac{4}{2-x}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2-x} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{2-x} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua}$$

Signo de la función

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f(x)$	+	+	-

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{2x(2-x)+x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -x^2+4x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ y } x = 4$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	+	-
Comportamiento de $f(x)$	↘	↗	↗	↘

- Crecimiento : $(0, 2) \cup (2, 4)$
- Decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
- Tenemos un mínimo en $(0, 0)$
- Tenemos un máximo en $(4, -8)$

Concavidad

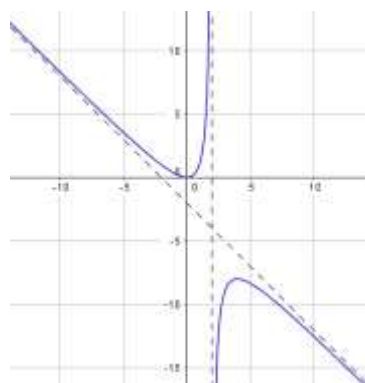
$$f''(x) = \frac{(-2x+4)(2-x)^2 + 2(2-x)(-x^2+4x)}{(2-x)^4} = \frac{(2-x)[(-2x+4)(2-x) + 2(-x^2+4x)]}{(2-x)^4} = \frac{-4x+8+2x^2-4x-2x^2+8x}{(2-x)^3} = \frac{8}{(2-x)^3}$$

$$f''(x) = \frac{8}{(2-x)^3} \quad f''(x) = 0 \rightarrow \text{Sin solución}$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f''(x)$	+	-
Comportamiento de $f(x)$	∪	∩

- Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 2)$
- Cóncava hacia abajo: $(2, \infty)$
- No hay puntos de inflexión

Representación gráfica



$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{1-(-x)^2}{(-x)^2-4} = \frac{1-x^2}{x^2-4} \quad f(-x) = f(x) \quad \text{Tiene simetría par. Es simétrica respecto al eje Y.}$$

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4} = 0 \rightarrow 1-x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \quad \text{Los puntos de corte serán : } (-1,0) \text{ y } (1,0)$$

- Corte con el eje OY :

$$f(0) = \frac{1-0^2}{0^2-4} = -\frac{1}{4} \rightarrow \quad \text{El punto de corte será el } (0, -\frac{1}{4})$$

Asíntotas Verticales

Para $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-3}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \quad \text{Calculamos los límites laterales:}$$

- $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-}{0^+} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-}{0^-} = +\infty$

Tenemos una asíntota vertical en $x = -2$

Para $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-3}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \quad \text{Calculamos los límites laterales:}$$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-}{0^-} = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-}{0^+} = -\infty$

Tenemos una asíntota vertical en $x = 2$

Como el Grado del Numerador = Grado del Denominador \rightarrow Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1$

Tenemos una asíntota horizontal en $y = -1$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A$. Horizontal

$$g(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4} - (-1) = \frac{1-x^2+x^2-4}{x^2-4} = \frac{-3}{x^2-4}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x^2-4} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^2-4} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

Asíntota Horizontal (No tiene asíntota oblicua).

Signo de la función

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f(x)$	-	+	-	+	-

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{-2x(x^2-4) - 2x(1-x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{6x}{(x^2-4)^2} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x=0$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	-	+	+
Comportamiento de $f(x)$	↘	↘	↗	↗

- Crecimiento : $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
- Decrecimiento: $(0, 2) \cup (2, \infty)$
- Tenemos un mínimo en $(0, \frac{-1}{4})$

Concavidad

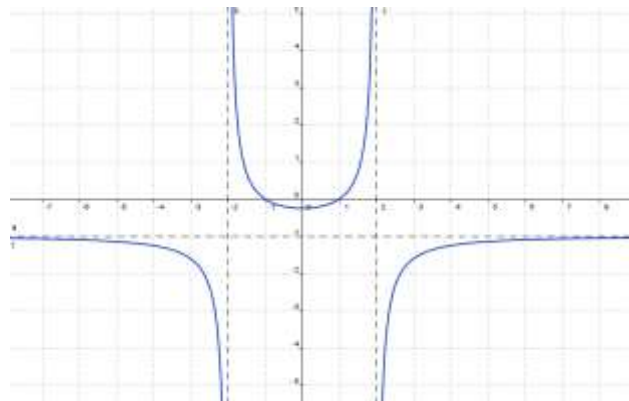
$$f''(x) = \frac{6(x^2-4)^2 - 24x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4} = \frac{(x^2-4)[6(x^2-4) - 24x^2]}{(x^2-4)^4} = \frac{6x^2 - 24 - 24x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-18x^2 - 24}{(x^2-4)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow -18x^2 - 24 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+	-
Comportamiento de $f(x)$	∩	∪	∩

- Cóncava hacia arriba: $(-2, 2)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
- No hay punto de inflexión

Representación gráfica



$$f(x) = \frac{6x+12}{x+3}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-3\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{6(-x)+12}{(-x)+3} = \frac{-6x+12}{-x+3} \quad f(-x) \neq f(x) \quad \text{No presenta simetrías}$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{6x+12}{x+3} = 0 \rightarrow 6x+12=0 \rightarrow x = -2 \quad \text{El punto de corte será: } (-2,0)$$

- Corte con el eje OY :

$$f(0) = \frac{0+12}{0+3} = 4 \rightarrow y = 4 \quad \text{El punto de corte será el } (0,4)$$

Asíntotas Verticales

Para $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6x+12}{x+3} = \frac{-6}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \rightarrow \text{Calculamos los límites laterales:}$$

- $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{6x+12}{x+3} = \frac{-}{0^-} = \infty$ Tiene una asíntota vertical en $x = -3$
- $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{6x+12}{x+3} = \frac{-}{0^+} = -\infty$

Como el Grado del Numerador = Grado del Denominador \rightarrow Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+12}{x+3} = 6$ Tiene una asíntota horizontal en $y=6$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x+12}{x+3} = 6$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Horizontal

$$g(x) = \frac{6x+12}{x+3} - 6 = \frac{6x+12-6x-18}{x+3} = \frac{-6}{x+3}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+12}{x+3} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x+12}{x+3} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

Asíntota Horizontal No tiene asíntota oblicua.

Signo de la función

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, \infty)$
Signo de $f(x)$	+	-	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{6(x+3) - (6x+12)}{(x+3)^2} = \frac{6x+18-6x-12}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2} \quad f'(x) = 0 \rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	+
Comportamiento de $f(x)$	↗	↗

- Crecimiento : $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$
- No tiene ni máximos ni mínimos

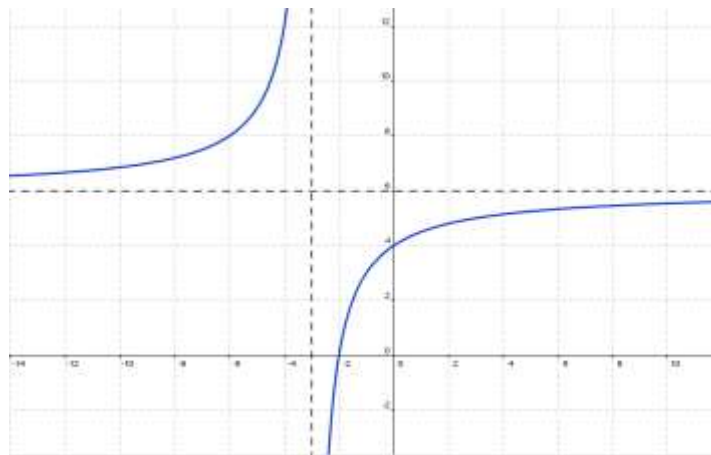
Concavidad

$$f''(x) = \frac{0(x+3)^2 - 2(x+3)6}{(x+3)^4} = \frac{-12(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{-12}{(x+3)^3} \quad f''(x) = 0 \rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, \infty)$
Signo de $f''(x)$	+	-
Comportamiento de $f(x)$	∪	∩

- Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -3)$
- Cóncava hacia abajo: $(-3, \infty)$
- No hay puntos de inflexión

Representación gráfica



$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad f(-x) = f(x) \quad \text{Presenta simetría par}$$

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = 0 \rightarrow x^2+1=0 \rightarrow \text{No corta con el eje OX}$$

- Corte con el eje OY :

$$f(0) = \frac{0^2+1}{0^2-1} = -1 \quad \text{El punto de corte será el } (0, -1)$$

Asíntotas Verticales:

Para $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \rightarrow \text{Calculamos los límites laterales:}$$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{+}{0^+} = +\infty$ Tiene una asíntota vertical en $x = -1$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{+}{0^-} = -\infty$

Para $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \rightarrow \text{Calculamos los límites laterales:}$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{+}{0^-} = -\infty$ Tiene una asíntota vertical en $x = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{+}{0^+} = +\infty$

Como el Grado del Numerador = Grado del Denominador \rightarrow Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$ Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Horizontal

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} - 1 = \frac{x^2+1-x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2-1} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2-1} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

Asíntota Horizontal: No tiene asíntota oblicua.

Signo de la función

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f(x)$	+	-	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \quad f'(x) = 0 \rightarrow -4x=0 \rightarrow x=0$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	-	-
Comportamiento de $f(x)$	↗	↗	↘	↘

- Crecimiento : $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- Decrecimiento: $(0, 1) \cup (1, \infty)$
- Tenemos un máximo en $(0, -1)$

Concavidad

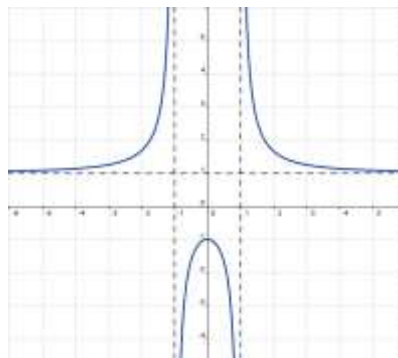
$$f''(x) = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x \cdot 2 \cdot (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{(x^2-1)[-4(x^2-1) + 4x \cdot 4 \cdot 2x]}{(x^2-1)^4} = \frac{-4x^2 + 4 + 16x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 + 4 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f''(x)$	+	-	+
Comportamiento de $f(x)$	U	∩	U

- Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-1, 1)$
- No hay punto de inflexión

Representación gráfica



$$f(x) = \frac{2x^2}{(2-x)^2}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{2x^2}{(2+x)^2}$$

$f(-x) \neq f(x)$ No tiene simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$ No tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(2-x)^2} = 0 \rightarrow 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{El punto de corte será el } (0,0)$$

- Corte con el eje OY :

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0^2}{(2-0)^2} = 0 \rightarrow \quad \text{El punto de corte será el } (0,0)$$

Asíntotas Verticales

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2}{(2-x)^2} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Tiene una asíntota vertical en $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2}{(2-x)^2} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Como el Grado del Numerador = Grado del Denominador \rightarrow Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{(2-x)^2} = 2$$

Tiene una asíntota horizontal en $y=2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{(2-x)^2} = 2$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Horizontal

$$g(x) = \frac{2x^2}{(2-x)^2} - 2 = \frac{2x^2 - 2x^2 + 8x - 8}{(2-x)^2} = \frac{8x - 8}{(2-x)^2}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x - 8}{(2-x)^2} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x - 8}{(2-x)^2} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

Signo de la función

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f(x)$	+	+	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{4x \cdot (2-x)^2 - 2x^2 \cdot 2(2-x) \cdot (-1)}{(2-x)^4} = \frac{8x - 4x^2 + 4x^2}{(2-x)^3} = \frac{8x}{(2-x)^3} \quad f'(x) = 0 \rightarrow 8x = 0 \rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
Comportamiento de $f(x)$	↘	↗	↘

- Crecimiento : $(0, 2)$
- Decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
- Tenemos un mínimo en $(0, 0)$

Concavidad

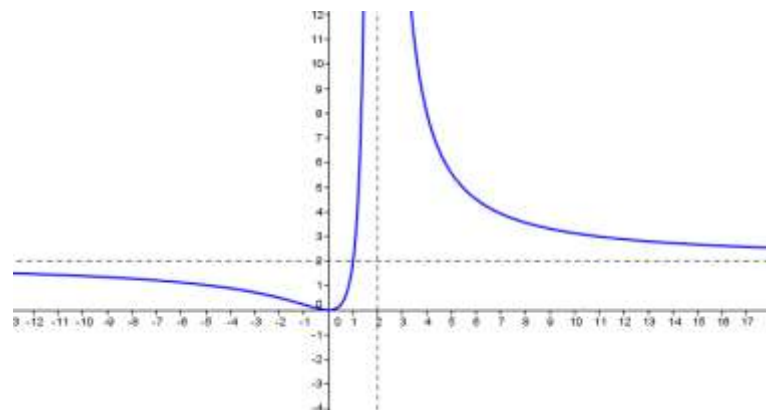
$$f''(x) = \frac{8(2-x)^3 - 8x \cdot 3 \cdot (2-x)^2 \cdot (-1)}{(2-x)^6} = \frac{16 - 8x + 24x}{(2-x)^4} = \frac{16x + 16}{(2-x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{16x + 16}{(2-x)^4} \quad f''(x) = 0 \rightarrow \frac{16x + 16}{(2-x)^4} = 0 \rightarrow 16x + 16 = 0 \rightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+	+
Comportamiento de $f(x)$	∩	∪	∪

- Cóncava hacia arriba: $(-1, 2) \cup (2, \infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -1)$
- Puntos de Inflexión: $(-1, \frac{2}{9})$

Representación gráfica



$$f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{-6x}{x^2+1}$$

$f(-x) \neq f(x)$ No tiene simetría par

$f(-x) = -f(x)$ Tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{6x}{x^2+1} = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{El punto de corte será el } (0,0)$$

- Corte con el eje OY :

$$f(0) = \frac{6 \cdot 0}{0^2+1} = 0 \rightarrow \quad \text{El punto de corte será el } (0,0)$$

Asíntotas Verticales No hay

Como el Grado del Numerador < Grado del Denominador \rightarrow Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x^2+1} &= 0 \\ \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x^2+1} &= 0 \end{aligned}$$

Tiene una asíntota horizontal en $y=0$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Horizontal

$$g(x) = \frac{6x}{x^2+1} - 0 = \frac{6x}{x^2+1}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x^2+1} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x^2+1} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

Asíntota Oblicua No hay

Signo de la función

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Signo de $f(x)$	-	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{6(x^2+1) - 2x \cdot 6x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^2+6-12x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2} \quad f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2+6=0 \rightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
Comportamiento de $f(x)$	↘	↗	↘

- Crecimiento : $(-1, 1)$
- Decrecimiento: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- Tenemos un mínimo en $(-1, -3)$
- Tenemos un máximo en $(1, 3)$

Concavidad

$$f''(x) = \frac{-12x(x^2+1)^2 - (-6x^2+6) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-12x^3 - 12x + 24x^3 - 24x}{(x^2+1)^3} = \frac{12x^3 - 36x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{12x^3 - 36x}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow 12x^3 - 36x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ e } x = \pm\sqrt{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+	-	+
Comportamiento de $f(x)$	∩	∪	∩	∪

- Cóncava hacia arriba: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
- Puntos de Inflexión: $(-\sqrt{3}, -2,5)$
 $(0, 0)$
 $(\sqrt{3}, 2,5)$

Representación gráfica

