1) (EBAU 2021 Extraordinaria) Dada la función f(x) = $x^3 - 3x$

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

d) Calcular el área de la región anterior

a) Dominio de la función:

Como se trata de una función polinómica → D(f) = $\forall x \in \mathbb{R}$

Corte con el eje OX → (y=0) $x^3 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x = +\sqrt{3} \rightarrow (\sqrt{3}, 0) \\ x = -\sqrt{3} \rightarrow (-\sqrt{3}, 0) \end{cases}$

Corte con el eje OY → (x=0) f(0)= $0^3 - 3 \cdot 0 = 0 \rightarrow$ (0,0)

b) Crecimiento y Decrecimiento

Calculamos la derivada de la función: f´(x) = $3x^2 - 3$

f´(x) = 0 → $3x^2 - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ (Posibles extremos relativos en x=-1 y en x=1)

	$(-\infty, -1)$	$(-1,1)$	$(1, \infty)$
Signo de f´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↗

Crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ Decrecimiento: (-1,1)

Máximo: (-1,2) Mínimo: (1,-2)

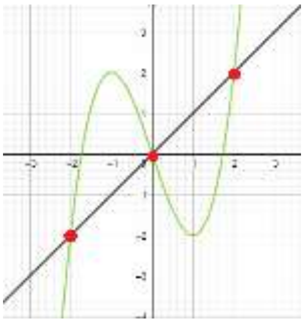
c) Concavidad y Convexidad

Calculamos la segunda derivada de la función:

f´´(x) = $6x$ → 6x = 0 → x = 0 (posible punto de Inflexión)

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Signo de f´(x)	-	+
Comportamiento de f(x)	∩	U

Cóncava hacia arriba: (0,∞) Cóncava hacia abajo: (-∞, 0) Punto de Inflexión: (0,0)



d) Para calcular el área encerrada entre las dos funciones debemos calcular previamente los puntos de intersección de las mismas. Viendo la representación gráfica podemos observar que los puntos son: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 2$

Para calcularlo analíticamente y no gráficamente debemos igualar las dos funciones:

$$x^3 - 3x = x \rightarrow x^3 - 3x - x = 0 \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Tendremos dos recintos: [-2,0] y [0,2]

$$A_T = A_1 + A_2$$

- $A_1 = \int_{-2}^{0}[(x^3 - 3x) - x]dx = \int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = [0 - (4 - 8)] = 4\ u^2$
- $A_2 = \int_0^2 [x - (x^3 - 3x)]dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = [(-4 + 8) - 0] = 4u^2$

- $A_T = A_1 + A_2 = 4\ u^2 + 4u^2 = 8u^2$

2) (EBAU 2020 Extraordinaria) Dadas las funciones f(x) = x^3-6x^2+9x y g(x)= x^2-x

a) Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) Dibujar las gráficas de ambas funciones indicando la región delimitada por ambas.

d) Calcular el área de la región anterior.

a) **Puntos de corte con el eje OX** (y=0)

Función f(x): $x^3-6x^2+9\text{x}=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{A}(0,0) \\ \text{B}(3,0) \end{cases}$

Función g(x): x^2-x=0→ $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{C}(0,0) \\ \text{D}(1,0) \end{cases}$

Puntos de corte con el eje OY (x=0)

Función f(x): f(0)= $0^3-6\cdot 0^2+9\cdot 0=0 \rightarrow \text{E}(0,0)$

Función g(x): g(0) = $0^2-0=0 \rightarrow \text{F}(0,0)$

b) Monotonía

- Función f(x): f´(x) = $3x^2-12x+9=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$ → Posibles Extremos Relativos

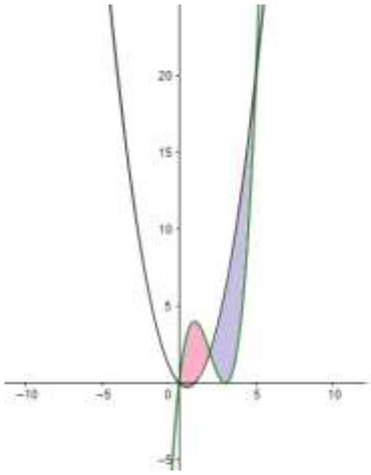
	(-∞, 1)	(1,3)	(3,∞)
Signo de f´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↗

Crecimiento: (-∞, 1) ∪ (3, ∞) Decrecimiento: (1,3) Máximo: (1,4) Mínimo: (3,0)

- Función g(x): g´(x) = 2x-1 = 0 → x = $\frac{1}{2}$ Posible Extremo Relativo

	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
Signo de g´(x)	-	+
Comportamiento de g(x)	↘	↗

Crecimiento: $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ Decrecimiento: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ Mínimo: $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ Máximo: No hay c)



d) Calculamos el punto de corte entre las dos funciones, aunque en la gráfica observamos que las dos funciones se cortan en los puntos x=0, x=2 y x=5

x^3-6x^2 + 9x = x^2-x → x^3-7x^2+10x = 0→ $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$

Tendremos dos recintos: [0,2] y [2,5]

$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_0^2 (x^3 - 7x^2 + 10x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + \frac{10x^2}{2}\right]_0^2 = \left(\left(\frac{16}{4} - \frac{56}{3} + \frac{40}{2}\right) - (0)\right) = \frac{16}{3}U^2$$

$$A_2 = \int_2^5 \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_2^5 (-x^3 + 7x^2 - 10x)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{10x^2}{2}\right]_2^5 = \left(\left(-\frac{625}{4} + \frac{875}{3} - \frac{250}{2}\right) - \left(-\frac{16}{3}\right)\right)$$
$$= \frac{125}{12} + \frac{16}{3} = \frac{63}{4}U^2$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}\ U^2$$

3) (EBAU 2019 Junio) Dada la función f(x)= $-2x^3 - 4x^2 + 6x$

a) Los puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y en los extremos relativos que existan.

c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

d) Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

e) Calcular el área de la región delimitada por la curva y el eje OX.

a) **Dominio de la función**: D(f) = $\forall x \epsilon \mathbb{R}$

- Calculamos los puntos de corte con los ejes:

  - **Con el eje X** : f(x) = 0 → $-2x^3 - 4x^2 + 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 & \rightarrow (-3{,}0) \\ x_2 = 0 & \rightarrow (0{,}0) \\ x_3 = 1 & \rightarrow (1{,}0) \end{cases}$
  - **Con el eje Y**: x=0 → f(0) = 0   (0,0)

a) Monotonía

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

f´(x) = $-6x^2 - 8x + 6$

f´(x) = 0→ f´(x) = $-6x^2 - 8x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2-\sqrt{13}}{3} = -1{,}87 \\ x_2 = \frac{-2+\sqrt{13}}{3} = 0{,}54 \end{cases}$

	(-∞,$\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$)	($\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$, $\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$)	($\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$,∞)
Signo de f´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↗

- Crecimiento: ($\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$, $\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$)   Decrecimiento: (-∞,$\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$) ∪ ($\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$, ∞)
- Mínimo en x= $\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$: $(-1{,}87; -12{,}13)$ Máximo en x= $\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$: (0,54;1,76)

b) Concavidad

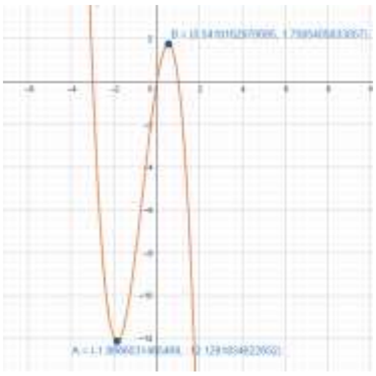
Calculamos la segunda derivada de la función y lo igualamos a cero.

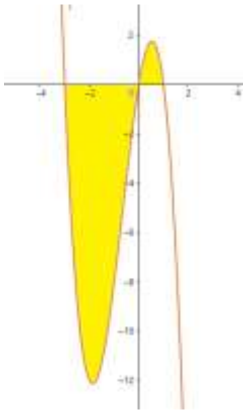
f´´(x) = -12x -8 → f´´(x) = 0→ f´´(x) = $-12x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-8}{12} = \frac{-2}{3}$

	$(-\infty, \frac{-2}{3})$	$(\frac{-2}{3}, \infty)$
Signo de f´(x)	+	-
Comportamiento de f(x)	∪	∩

- Cóncava hacia abajo: $(\frac{-2}{3}, \infty)$
- Cóncava hacia arriba: $(-\infty, \frac{-2}{3})$
- Punto de Inflexión: $(-0{,}67; -5{,}19)$

c) Representación gráfica





d) Calculamos el punto de intersección entre las dos funciones:

y = $-2x^3 - 4x^2 + 6x$ Eje OX → y = 0

Igualamos las dos funciones $-2x^3 - 4x^2 + 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

- Tenemos dos recintos : [-3,0] y [0,1]

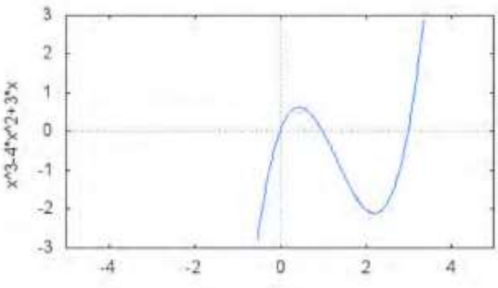
$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_{-3}^{0}[0 - (-2x^3 - 4x^2 + 6x)]dx = \int_{-3}^{0}(2x^3 + 4x^2 - 6x)dx = \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}\right]_{-3}^{0} = \left[0 - \left(\frac{81}{2} - 36 - 27\right)\right] = \frac{45}{2}\,u^2$$

$$A_2 = \int_{0}^{1}[(-2x^3 - 4x^2 + 6x) - 0]dx = \left[-\frac{2x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 3\right) - 0\right] = \frac{7}{6}u^2$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{45}{2}\,u^2 + \frac{7}{6}u^2 = \frac{71}{3}u^2$$

4) (EBAU 2018 Junio) Calcular el área total de la región delimitada por la curva y = $x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje OX:



- 1ª Forma: Observando la función vemos que corta con el eje OX en x=0, x= 1 y x=3
- 2ª Forma: Calculamos el punto de intersección entre las dos funciones:

  y = $x^3 - 4x^2 + 3x$ Eje OX → y = 0

Igualamos las dos funciones: $x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

- Tenemos dos recintos : [0,1] y [1,3]

El área pedida es la del recinto sombreado:

$S = \int_0^1 [(x^3 - 4x^2 + 3x) - 0]dx + \int_1^3 [0 - (x^3 - 4x^2 + 3x)]dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{5}{12}u^2 + \frac{32}{12}u^2 = \boldsymbol{\frac{37}{12}u^2}$

5) (EBAU 2018 Extraordinaria) Dada la función f(x) = $x^3 + x^2 - 12x$

a) Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

d) Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta g(x) = – 6x.

e) Calcular el área de la región anterior.

a) **Dominio** → D(f) = $\forall x \in \mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes:

- **Con el eje OX** → $x^3 + x^2 - 12x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 & (-4,0) \\ x_2 = 0 & (0,0) \\ x_3 = 3 & (3,0) \end{cases}$
- **Con el eje OY** → $f(0) = 0^3 + 0^2 - 12 \cdot 0 = 0 \rightarrow$ (0,0)

b) Monotonía

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2-\sqrt{148}}{6} = -2{,}36 \\ x_2 = \frac{-2+\sqrt{148}}{6} = 1{,}69 \end{cases}$ → Posibles extremos relativos

	$(-\infty, -2{,}36$	$(-2{,}36, 1{,}69)$	$(1{,}69, \infty)$
Signo de f´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↗

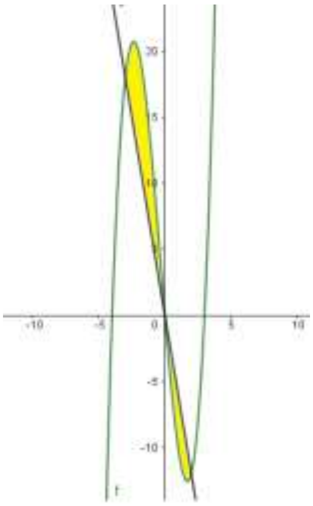
- Crecimiento: $(-\infty, -2{,}36) \cup (1{,}69, \infty)$ Decrecimiento: (-2,36;1,69)
- Máximo: (-2,36; 20,75) Mínimo: (1,69; -12,6)

c) Concavidad

$f''(x) = 6x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

	$(-\infty, \frac{-1}{3})$	$(\frac{-1}{3}, \infty)$
Signo de f´(x)	-	+
Comportamiento de f(x)	∩	∪

- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -\frac{1}{3})$ Cóncava hacia arriba: $(-\frac{1}{3}, \infty)$
- Punto de Inflexión: $(-0{,}33; 4{,}07)$



Calculamos el punto de intersección entre las dos funciones:

$$x^3+x^2-12x = -6x \rightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = & -3 \\ x_2 = & 0 \\ x_3 = & 2 \end{cases}$$

- Tenemos dos recintos : [-3,0] y [0,2]

$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_{-3}^{0} (x^3 + x^2 - 6x)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{-3}^{0} = \left[0 - \left(\frac{81}{4} - 9 - 27\right)\right] = \frac{63}{4}\ u^2$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (-x^3 - x^2 + 6x)dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_{0}^{2} = \left[\left(-\frac{16}{4} - \frac{8}{3} + 12\right)\right] = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}u^2$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{63}{4}\ u^2 + \frac{16}{3}u^2 = \frac{253}{12}u^2$$

6) (EBAU Junio 2017) Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$:

a) (0,1 puntos) Obtener los puntos de corte con los ejes X e Y.

b) (0,6 puntos) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) (0,6 puntos) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

d) (0,5 puntos) Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta y = 4x.

e) (1,7 puntos) Calcular el área de la región anterior.

a) La función dada es $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

Corte con el eje X: soluciones de $x^3 + x^2 - 2x = 0$

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \rightarrow x\,(x^2 + x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Se obtiene x = –2, x = 0 y x = 1. Puntos (–2, 0), (0, 0) y (1, 0).

Corte con el eje Y: se hace x = 0. Punto (0, 0), ya indicado.

b) Crecimiento y decrecimiento.

Derivando e igualando a 0:

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$.

	$\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)$	$\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)$	$\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$
Signo de f´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↗

Crecimiento: $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$ Decrecimiento: $\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)$

Máximo: $\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{20+14\sqrt{7}}{27}\right)$ Mínimo: $\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, \frac{20-14\sqrt{7}}{27}\right)$

c) Concavidad y convexidad:

$f''(x) = 6x + 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$, punto de inflexión.

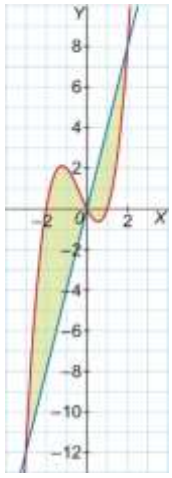
	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, \infty)$
Signo de f´(x)	-	+
Comportamiento de f(x)	∩	U

Cóncava hacia arriba: (-1/3,∞) Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -1/3)$ Punto de Inflexión: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{20}{27}\right)$

d) Su representación gráfica es la adjunta.

La curva y la recta se cortan en los puntos:

Estos puntos se obtienen resolviendo la ecuación $x^3+x^2-2x = 4x$.



$x^3+x^2-2x = 4x \rightarrow x^3+x^2-6x = 0 \rightarrow x(x^2+x-6)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

Tendremos dos recintos: [-3,0] y [0,2]

d) El área pedida es la del recinto sombreado:

$$A_T = A_1 + A_2$$

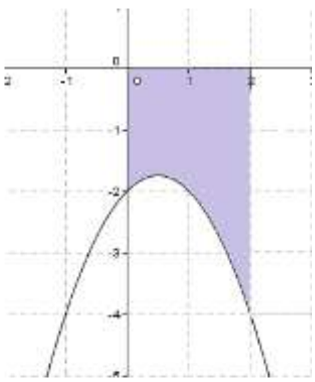
$$A_1 = \int_{-3}^{0}(x^3+x^2-6x)dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_{-3}^{0} = \left[0-\left(\frac{81}{4}-9-27\right)\right] = \frac{63}{4}\ u^2$$

$$A_2 = \int_{0}^{2}(-x^3-x^2+6x)dx = \left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_{0}^{2} = \left[\left(-\frac{16}{4}-\frac{8}{3}+12\right)\right] = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}u^2$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{63}{4}\ u^2 + \frac{16}{3}u^2 = \frac{253}{12}u^2$$

7) Calcula el área del recinto por la curva y = $-x^2+x-2$ y el eje X en el intervalo [0,2]

- Calculamos los puntos de corte con el eje x**:** $-x^2+x-2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{-2}$ → No corta con el eje X
- Por lo tanto sólo tendremos en cuenta el recinto [0,2]



Área= $\left|\int_0^2(-x^2+x-2)dx\right|$

Área= $\left|\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^2\right|$

Área= $\left|\left[\frac{-2^3}{3}+\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right]-[0]\right| = \left|\frac{-8}{3}+2-4\right| = \left|\frac{-14}{3}\right|$

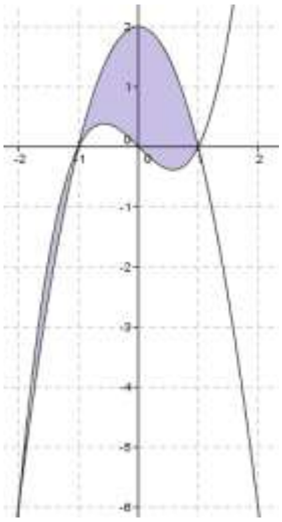
Área = $\mathbf{\frac{14}{3}U^2}$

8) Calcula el área del recinto limitado entre las y= $x^3 - x$ e y= 2-2x^2

- Calculamos el punto de corte entre las dos funciones:

$$x^3 - x = 2 - 2x^2 \rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

- Tenemos dos recintos: [-2,-1] y [-1,1]



$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \left|\int_{-2}^{-1} [(x^3 - x) - (2 - 2x^2)]dx\right| = \left|\int_{-2}^{-1} [x^3 + 2x^2 - x - 2)]dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{-1}\right| = \frac{5}{12}\mathbf{U^2}$$

$$A_2 = \left|\int_{-1}^{1} [(2 - 2x^2) - (x^3 - x)]dx\right| = \left|\int_{-1}^{1} [-x^3 - 2x^2 + x + 2)]dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{-1}\right| = \frac{8}{3}\mathbf{U^2}$$

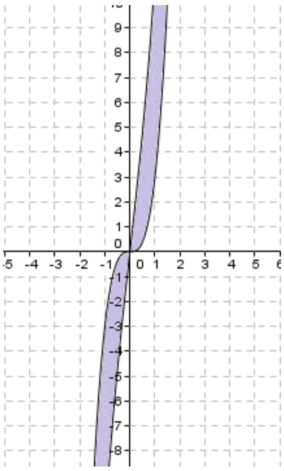
$$A_T = A_1 + A_2 = = \frac{5}{12}U^2 + \frac{8}{3}U^2 = \frac{37}{12}U^2$$

9) Halla el área comprendida entre las curvas y=3x^3 e y = 2x^3 + 9x

- Calculamos el punto de corte entre las dos funciones:

$$3x^3 = 2x^3 + 9x \rightarrow x^3 - 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

- Tenemos dos recintos: [-3,0] y [0,3]



$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \left|\int_{-3}^{0} [(3x^3) - (2x^3 + 9x)]dx\right| = \int_{-3}^{0} [x^3 - 9x)]dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0}$$

$$= \left|(0) - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right)\right| = \left|\frac{81}{4}\right| = \frac{81}{4}U^2$$

$$A_2 = \left|\int_{0}^{3} [(2x^3 + 9x) - (3x^3)]dx\right| = \int_{0}^{3} [-x^3 + 9x)]dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2}\right]_{0}^{3}$$

$$= \left|\left(-\frac{81}{4} + \frac{81}{2}\right) - (0)\right| = \left|\frac{81}{4}\right| = \frac{81}{4}U^2$$

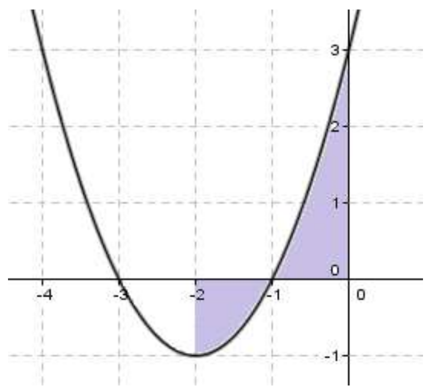
$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{81}{4}U^2 + \frac{81}{4}U^2 = \frac{81}{2}U^2$$

10) Calcula el área comprendida entre la curva y=x^2+4x+3 y el eje OX en el intervalo [-2,0]

- Calculamos los puntos de corte con el eje x: $x^2+x+3=0 \rightarrow$ x= $\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\begin{cases}x=-3\\x=-1\end{cases}$

  De los dos valores sólo nos sirve x=-1 ya que es el único que se encuentra dentro de mi intervalo [-2,0]

- Tenemos dos recintos: [-2,-1] y [-1,0]



$$\mathrm{A_T}=\mathrm{A_1}+\mathrm{A_2}$$

$$A_1=\left|\int_{-2}^{-1}(x^2+4x+3)dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+3x\right]_{-2}^{-1}\right|=\frac{2}{3}\mathrm{U}^2$$

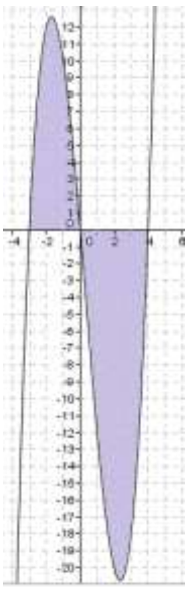
$$A_2=\left|\int_{-1}^{0}(x^2+4x+3)dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{0}\right|=\frac{4}{3}\mathrm{U}^2$$

$$\mathrm{A_T}=\mathrm{A_1}+\mathrm{A_2}=\frac{2}{3}\mathrm{U}^2+\frac{4}{3}\mathrm{U}^2=\frac{6}{3}=2\mathrm{U}^2$$

11) Halla el área del recinto limitado por la curva y=x^3-x^2-12x y el eje X

- Calculamos los puntos de corte con el eje x: $x^3-x^2-12x=0 \rightarrow \begin{cases}x_1=-3\\x_2=\ \ 0\\x_3=\ \ 4\end{cases}$

- Tenemos dos recintos: [-3,0] y [0,4]



$$\mathrm{A_T}=\mathrm{A_1}+\mathrm{A_2}$$

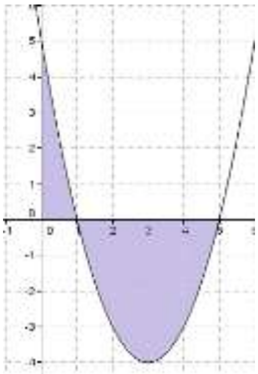
$$A_1=\left|\int_{-3}^{0}(x^3-x^2-12x)dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{12x^2}{2}\right]_{-3}^{0}\right|=\left|(0)-\left(\frac{81}{4}+\frac{27}{3}-\frac{108}{2}\right)\right|=\frac{99}{4}\mathrm{U}^2$$

$$A_2=\left|\int_{0}^{4}(x^3-x^2-12x)dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{12x^2}{2}\right]_{0}^{4}\right|=\left|\left(\frac{256}{4}-\frac{64}{3}-\frac{192}{2}\right)-(0)\right|=\frac{160}{3}\mathrm{U}^2$$

$$\mathrm{A_T}=\mathrm{A_1}+\mathrm{A_2}=\frac{99}{4}+\frac{160}{3}=\frac{937}{12}\mathrm{U}^2$$

12) **Halla el área limitada por la función f(x)=x^2-6x+5 y el eje X en el [0,5]**

- Calculamos los puntos de corte con el eje x**:** $x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$
- Nos sirven los dos valores ya que se encuentran dentro de mi intervalo [0,5]
- Tenemos dos recintos : [0,1] y [1,5]



$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \left|\int_0^1 (x^2 - 6x + 5)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x\right]_0^1\right| = \left|\left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right) - 0\right| = \frac{7}{3}\,U^2$$

$$A_2 = \left|\int_1^5 (x^2 - 6x + 5)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x\right]_1^5\right| = \left|\left(\frac{125}{3} - \frac{150}{2} + 25\right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right)\right| = \frac{32}{3}\,U^2$$

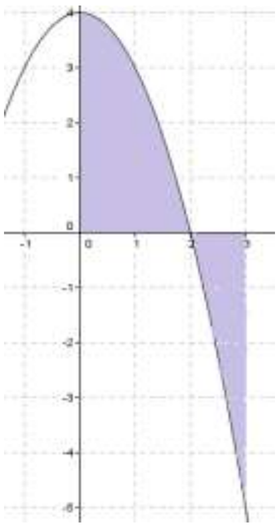
$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = \frac{39}{3} = 13U^2$$

13) **Halla el área del recinto limitado por la función f(x)=4-x^2 y el eje OX en el intervalo [0,3]**

- Calculamos los puntos de corte con el eje x**:** 4-$x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

  De los dos valores sólo nos sirve x=2 ya que es el único que se encuentra dentro de mi intervalo [0,3]

- Tenemos dos recintos : [0,2] y [2,3]



$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \left|\int_0^2 (4 - x^2)dx\right| = \left|\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2\right| = \left|\left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0\right| = \frac{16}{3}\,U^2$$

$$A_2 = \left|\int_2^3 (4 - x^2)dx\right| = \left|\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_2^3\right| = \left|\left(12 - \frac{27}{3}\right) - \left(8 - \frac{8}{3}\right)\right| = \frac{7}{3}\,U^2$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}U^2$$

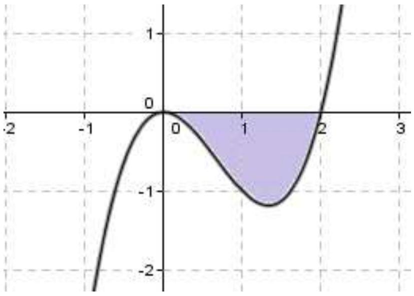
14) **Calcula el área comprendida entre la función f(x)= x^3-2x^2 y el eje OX.**

- Calculamos los puntos de corte con el eje x: $x^3-2x^2=0 \rightarrow x^2(x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

- Tenemos un recinto [0,2]

- $f'(x) = 3x^2-4x = x(3x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow (0,0) \text{ Tenemos un máximo} \\ x=\frac{4}{3} \rightarrow \left(\frac{4}{3}, -32/27\right) \rightarrow \text{Tenemos un Mínimo} \end{cases}$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$



$$\text{Área} = \left|\int_0^2 (x^3-2x^2)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^2\right|$$

$$\text{Área} = \left|\left[\frac{16}{4}-\frac{16}{3}\right]-[0]\right|$$

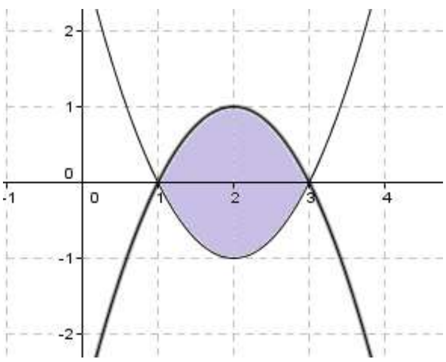
$$\text{Área} = \left|\frac{-16}{12}\right| = \frac{16}{12}U^2 = \frac{4}{3}U^2$$

15) **Calcula el área del recinto limitado entre las curvas f(x)= x^2-4x+3 y g(x)= - x^2+4x-3**

- Calculamos el punto de corte entre las dos funciones:

  $x^2-4x+3 = -x^2+4x-3 \rightarrow 2x^2-8x+6=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

- Sólo tenemos un recinto: [1,3]



$$\text{Área} = \left|\int_1^3 (\text{función que está por encima}) - (\text{función por debajo})dx\right|$$

$$\text{Área} = \left|\int_1^3 [g(x)-f(x)]dx\right|$$

$$\text{Área} = \left|\int_1^3 [(-x^2+4x-3)-(x^2-4x+3)]\,dx\right|$$

$$\text{Área} = \left|\int_1^3 [(-2x^2+8x-6)]\,dx\right| = \left|\left[\frac{-2x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}-6x\right]_1^3\right|$$

$$\text{Área} = \left|\left(\frac{-54}{3}+\frac{72}{2}-18\right)-\left(\frac{-2}{3}+\frac{8}{2}-6\right)\right| = \left|(0)-\left(\frac{16}{6}\right)\right|$$

$$\text{Área} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}U^2$$

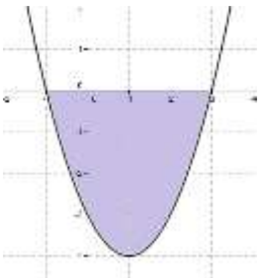
16) Calcula el área de la región finita limitada por el eje horizontal y la gráfica y=x^2-2x-3

- Buscamos los puntos de corte de la parábola y el eje horizontal.

$$x^2-2x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x-1 \\ x=3 \end{cases}$$

- Tenemos un recinto : [-1,3]

- En el intervalo [-1,3] nuestra función está por debajo del eje OX → $x^2-2x-3 \leq 0$



Área=$\int_{-1}^{3}$(función por encima − función por debajo)dx

$$\text{Área} = \int_{-1}^{3}[0-(x^2-2x-3)dx] = \left[\frac{-x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+3x\right]\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}$$

$$\text{Área} = [-9+9+9]-\left[\frac{1}{3}+1-3\right] = 9-\left[\frac{-5}{3}\right] = \frac{32}{3}U^2$$

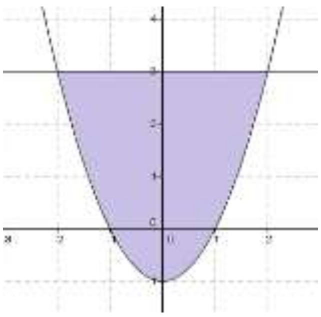
17) Halla el área del recinto limitado por la parábola y=x^2-1 y la recta horizontal y=3

- Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$x^2-1=3 \rightarrow x^2=4 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

- Tenemos un único recinto comprendido entre [-2,2]

- Como la recta está por encima de la parábola, el área buscada será:

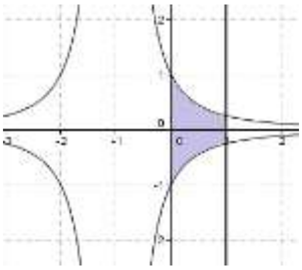


Área= $\int_{-2}^{2}$(función por encima − función por debajo)dx

$$\text{Área}= \int_{-2}^{2}\left(3-(x^2-1)\right)dx = \int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx$$

$$\text{Área}= \left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}= \left[\left(\frac{-8}{3}+8\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right] = \frac{-16}{3}+16 = \frac{32}{3}U^2$$

18) Calcula el área de la región del plano que está limitada entre las curvas f(x) =$\frac{1}{(1+x)^2}$ $y\ g(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ y las rectas x=0 y x=1



Tenemos un único recinto comprendido entre [0,1]

El área buscada será:

Área= $\int$(función por encima − función por debajo)dx

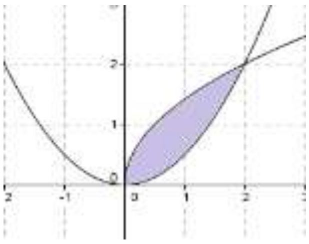
Área= $\int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^2} - (\frac{-1}{(1+x)^2}\right) dx = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^2}\right) dx = 2\left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 = \mathbf{1U^2}$

19) **Calcula el área del recinto limitado por las curvas f(x)=$\sqrt{2x}$ e g(x)= $\frac{x^2}{2}$**

- Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2} \rightarrow (\sqrt{2x})^2 = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \rightarrow 2x = \frac{x^4}{8} \rightarrow x^4 - 8x = 0 \rightarrow x(x^3-8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- Tenemos un único recinto comprendido entre [0,2]



Área= $\int_0^2$(función por encima)- función por debajo) dx

Área= $\int_0^2 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right) dx$

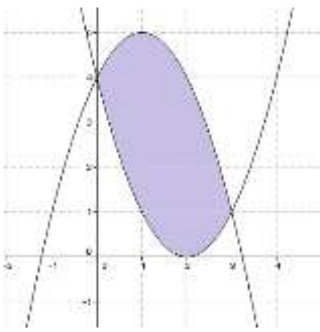
Área=$\left[\frac{2x\sqrt{2x}}{3} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}U^2$

20) **Calcula el área de la región limitada por las parábolas f(x)=$x^2 - 4x + 4$ e g(x) = $-x^2 + 2x + 4$**

- Calculamos el punto de corte de ambas funciones:

$$x^2 - 4x + 4 = -x^2 + 2x + 4 \rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \rightarrow 2x(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

- Tenemos un único recinto entre [0,3]



Área =$\int_0^3$(función por encima - función por debajo) dx

Área =$\int_0^3 (g(x) - f(x))dx$

Área=$\int_0^3 [(-x^2 + 2x + 4) - (x^2 - 4x + 4)]dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)dx$

Área=$\left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^3 = \mathbf{9U^2}$

21) **Halla el área del recinto acotado por estas tres fronteras:**

- **La parábola de ecuación f(x) = –x^2 + 5x – 4.**
- **La recta tangente a la parábola en el punto de abscisa x = 3.**
- **El eje horizontal.**

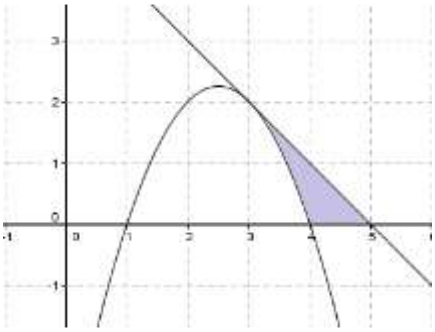
- Hay que calcular la recta tangente a la parábola en el punto A(3, f(3)) = A(3, 2).

Como f '(x) = –2x + 5, f'(3) = –1, y la recta tangente es: y = –1(x – 3) + 2 → **y = –x + 5**

- Calculamos el punto de corte de las funciones f(x) = –x^2 + 5x – 4 e y = –x + 5

  –x^2 + 5x – 4 = –x + 5 → $-x^2 + 6x - 9 = 0 \rightarrow \{x = 3 \text{ (doble)}$

- Calculamos el punto de corte de y=-x+5 e y=0 → x=5



Tenemos dos recintos: [0,2] y [2,3]

Calculamos el área encerrada:

$$A_T = A_1 + A_2$$

Área=$\int_3^5(\text{función por encima} - \text{función por debajo})dx$

A_1=$\int_3^4[(-x+5)-(-x^2+5x-4)]dx = \int_3^4(x^2-6x+9)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 9x\right]_3^4 = \frac{1}{3}U^2$

A_2=$\int_4^5[(-x+5)-0]dx = \int_4^5(-x+5)dx = \left[\frac{-x^2}{2} + 5x\right]_4^5 = \frac{1}{2}U^2$

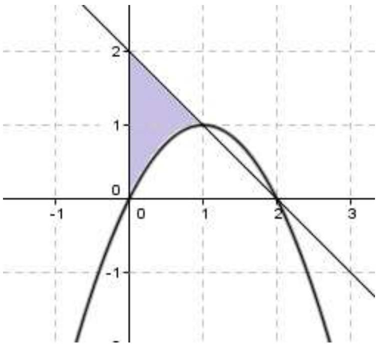
$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{1}{3}U^2 + \frac{1}{2}U^2 = \frac{5}{6}U^2$$

22) **Halla el área del recinto ABC, donde A=(0,0), B=(0,2) y C=(1,1), las líneas AB y BC son rectas, y la línea AC tiene por ecuación y=2x- x^2**

La recta que une los puntos BC tiene ecuación y=-x+2

- Calculamos el punto de corte de las funciones x=0 e y= -x+2 → x =0
- Calculamos el punto de corte de las funciones y=2x-x^2 e $y = -x + 2$

2x-$x^2 = -x + 2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$



Calculamos el área encerrada:

Área=$\int_0^1 [(-x + 2) - (2x - x^2)]dx$

Área= $\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1$

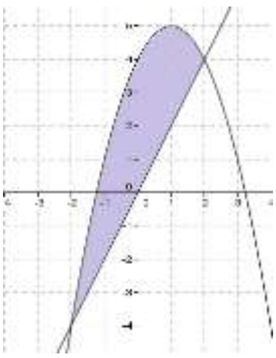
Área=$\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) - 0\right] = \frac{5}{6}U^2$

23) **Una inmobiliaria está interesada en adquirir unos terrenos que pueden ser representados en un determinado plano como la superficie encerrada entre la parábola f(x)= -$x^2 + 2x + 4$ y la recta g(x)=2x. Si una unidad del área de este plano equivale a 1 km^2 y el precio del kilómetro cuadrado es de 30 millones de euros, ¿qué importe debe pagar la inmobiliaria por esos terrenos?**

- Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$-x^2 + 2x + 4 = 2x \rightarrow -x^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

- Nuestra región está acotada entre [-2,2]



Calculamos el área encerrada:

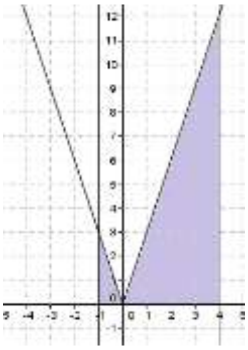
Área = $\int_{-2}^{2} [(-x^2 + 2x + 4) - (2x)]dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx$

Área= $\left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{-8}{3} + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{-16}{3} + 16 = \frac{32}{3}$ $\mathbf{U^2}$

El precio del terreno será: 30·$\frac{32}{3}$ = 320 millones de Euros

24) Calcula el área encerrada entre la función f(x)=$|3x|$ y x=-1 y x=4

Como f(x) =$|3x| = \begin{cases} -3x & -1 \leq x < 0 \\ 3x & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$



Tenemos dos recintos: [-1,0] y [0,4]

$$\text{Área} = \int_{-1}^{4} |3\text{x}|\text{dx} = \int_{-1}^{0} -3\text{xdx} + \int_{0}^{4} 3\text{xdx}$$

$$\text{Área} = \left[\frac{-3\text{x}^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3\text{x}^2}{2}\right]_{0}^{4} = \frac{51}{2}\text{U}^2$$