Ejercicio 1 [2,5 puntos]

En un almacén de construcción venden sacos de cemento de 25 kg, 50 kg y 100 kg. Cierto día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200€. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4€ y que ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg.

A. [l PUNTO] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos sacos de cada tamaño se vendieron ese día

B. [1,5 PUNTOS) Resuélvalo.

A. x: Número de sacos de cemento de 25 kg
y: Número de sacos de cemento de 50 kg
z: Número de sacos de cemento de 100 kg

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=180} \\ \boldsymbol{100x+200y+400z=29200} \\ \boldsymbol{x=2(y+z)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=180} \\ \boldsymbol{x+2y+4z=292} \\ \boldsymbol{x-2y-2z=0} \end{cases}$$

B. Resolvemos el sistema de Ecuaciones

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & 2 & 4 & 292 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & -1 & -3 & -112 \\ 0 & 3 & 3 & 180 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to 3F_2 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & -1 & -3 & -112 \\ 0 & 0 & -6 & -156 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 120 \\ y = 34 \\ z = 26 \end{cases}$$

Tendremos 120 sacos de 25 Kg

Tendremos 34 sacos de 50 Kg

Tendremos 26 sacos de 100 Kg

Ejercicio 2 [2,5 puntos]

El ayuntamiento dispone de 48000€ para la puesta en marcha de huertas ecológicas en un viejo terreno municipal abandonado. Se destinará un máximo de 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de 10 al de árboles frutales. Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de 480 m^3 anuales para riego. Se sabe que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas necesita 8m^3 de agua anuales, cantidad que disminuye hasta los 4 m^3 anuales en el caso de las hectáreas dedicadas al cultivo de árboles frutales. Se sabe también que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas requiere una inversión por parte del ayuntamiento de 400€, siendo esta cantidad de 800€ para cada hectárea dedicada al cultivo de árboles frutales. Se sabe además que la producción anual de cada hectárea de hortalizas es de 450 kg y la de cada hectárea de árboles frutales es de 600kg. El objetivo que persigue el ayuntamiento es maximizar la producción anual total.

A.(0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. (l PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C.[0,5 PUNTOS] ¿Cuántas hectáreas se deben dedicar al cultivo de hortalizas y cuántas al de árboles frutales para maximizar la producción anual total?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicha producción?

A. Se trata de un problema de programación lineal.

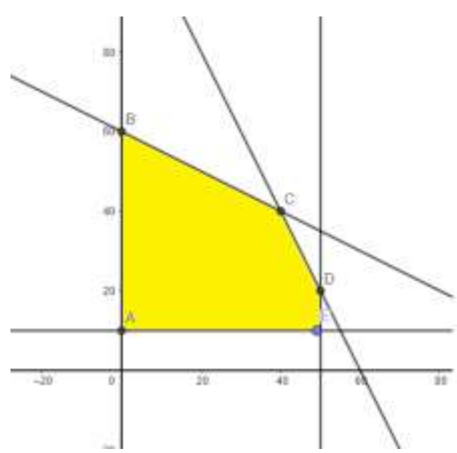
Las variables de decisión son: x → hectáreas dedicadas al cultivo de hortalizas

y → hectáreas dedicadas al cultivo de árboles frutales

El objetivo es maximizar la producción P(x,y) = 450x + 600y

Restricciones:

$$\begin{cases} x \leq 50 \\ y \geq 10 \\ 8x + 4y \leq 480 \\ 400x + 800y \leq 48000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 50 \\ y \geq 10 \\ 2x + y \leq 120 \\ x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



C y D. Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), las producciones máximas, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estas Producciones en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases}$ → A(0,10) → P_A= 450·0 + 600·10 = 6000kg

B$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 120 \end{cases}$ → $B(0, 60)$ → P_B= 450·0 + 600·60 = 36000kg

C$\begin{cases} 2x + y = 120 \\ x + 2y = 120 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 40 \\ y = 40 \end{cases}$ → $C(40,40)$ → P_C= 450·40 + 600·40 = 42000kg

D$\begin{cases} 2x + y = 120 \\ x = 50 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 50 \\ y = 20 \end{cases}$ → D(50,20) → P_D= 450·50 +600· 20= 34500 kg

E$\begin{cases} y = 10 \\ x = 50 \end{cases}$ → E(50,10) → P_E= 450·50 +600· 10= 28500 kg

Para obtener la máxima Producción se deben dedicar 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y 40 hectáreas al cultivo de árboles, siendo la producción de 42000kg.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuáles son las asíntotas (horizontales, verticales y/u oblicuas) de la siguiente función

$f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x-1}$

a) Se trata de una Función Racional, por lo tanto el dominio de la función existirá en todo R exceptuando los valores que anulan el denominador.

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ D(f) = $\forall x \epsilon \mathbb{R} - \{1\}$

b) Asíntota Vertical en x = 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2-1}{x-1} = \frac{1}{0} = \left[\frac{k}{0}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{+}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Tendremos una Asíntota Vertical en x = 1

Como los límites laterales tienden a valores infinitos, tendremos una Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito (Asíntota Vertical)

Como el Grado del Numerador > Grado del Denominador , con ua diferencia de un grado→ Asíntota Oblicua

Asíntota Oblicua: y = mx+n

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2-1}{x-1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-1}{x^2-x} = 2$ Asíntota oblicua: y= 2x + 2

$n = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-1}{x-1} - 2x = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-1-2x^2+2x}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

Calculamos la función g(x) = f(x) – Oblicua

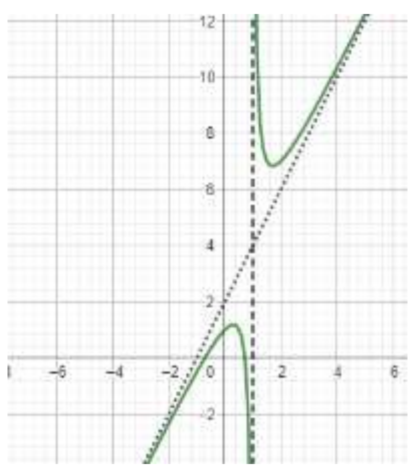
$g(x) = \frac{2x^2-1}{x-1} - (2x+2) = \frac{2x^2-1-2x^2+2x-2x+2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

Calculamos los límites cuando tienden a ± ∞ de la función g(x):

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por ± ∞

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 0^+$ → La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = 0^-$ → La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua



B. **[1,25 PUNTOS] Dada la siguiente función definida a trozos:**

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{ln(x)}}{\boldsymbol{x-1}} & \boldsymbol{si\ 0,5 \leq x < 1} \\ \boldsymbol{ax^2 + b} & \boldsymbol{si\ 1 \leq x < 2} \\ \boldsymbol{e^x + 1} & \boldsymbol{si\ 2 < x \leq 2,5} \end{cases}$$

Determine los parámetros a y b para que f sea continua en el intervalo [0,5;2,5]

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de los intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

<u>Puntos de división de cada uno de los Intervalos (Puntos de ruptura)</u>

Miramos la continuidad en los puntos de ruptura, en este caso serán los puntos x=0 y x=1.

<u>Estudio de la continuidad para x = 1</u>

- $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\boldsymbol{ln(x)}}{\boldsymbol{x-1}} = \left[\frac{0}{0}\right]$ aplicamos L´hopital $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\boldsymbol{ln(x)}}{\boldsymbol{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\boldsymbol{1/x}}{\boldsymbol{1}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} ax^2 + \mathrm{b} = a \cdot 1^2 + \mathrm{b} = \mathrm{a} + \mathrm{b}$
- f(1)= $a \cdot 1^2 + \mathrm{b}$ = a + b

Para que la función sea continua en x= 0, se tiene que cumplir que: $\lim\limits_{x\to 1^-} \mathrm{f(x)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \mathrm{f(x)} = \mathrm{f(1)}$

Por lo tanto a+b = 1

<u>Estudio de la continuidad para x = 2</u>

- $\lim\limits_{x\to 2^-} ax^2 + \mathrm{b} = 4\mathrm{a} + \mathrm{b}$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} e^x + 1 = e^2 + 1$
- f(2)= $e^2 + 1$

Para que la función sea continua en x= 1, se tiene que cumplir que: $\lim\limits_{x\to 2^-} \mathrm{f(x)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \mathrm{f(x)} = \mathrm{f(2)}$

Por lo tanto 4a +b = $e^2 + 1$ Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \mathrm{a} + \mathrm{b} = 1 \\ 4\mathrm{a} + \mathrm{b} = e^2 + 1 \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{cases} a = \frac{e^2}{3} = 2{,}46 \\ b = \frac{3-e^2}{3} = -1{,}46 \end{cases}$$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS) Un hospital ha determinado que el número de pacientes que hay en urgencias a lo largo de un turno de 36 horas viene dado por la función P(t), donde t ∈ [0,36] se expresa en horas. Se sabe que P'(t)= t^2- 40t+ 231 es la derivada de P(t) y que al finalizar el turno quedan en urgencias 448 pacientes. ¿En qué momento del turno hay menos pacientes en urgencias?¿Cuántos pacientes hay en ese momento?

a) P'(t)= t^2- 40t+ 231

P(t) = $\int (t^2 - 40t + 231)\, dt = \frac{t^3}{3} - 40\frac{t^2}{2} + 231t + C$

Nos dan la siguiente condición: P(36) = 448

P(36) = $\frac{36^3}{3} - 40\frac{36^2}{2} + 231 \cdot 36 + C = 448 \rightarrow C = 2500$

P(t) = $\frac{t^3}{3} - 40\frac{t^2}{2} + 231t + 2500 \rightarrow$ Función Objetivo

P'(t)= t^2- 40t+ 231= 0 → $\begin{cases} t_1 = 7 \\ t_2 = 33 \end{cases}$ Posibles Extremos Relativos

	(0,7)	(7,33)	(33,36)
Signo de P´(t)	+	-	+
Comportamiento de P(t)	↗	↘	↗

- Tendremos un máximo en t = 7
- Tendremos un mínimo en t = 33

En este ejercicio, nos piden que calculemos el momento del turno en el que hay menos pacientes, es decir que calculemos el mínimo:

t= 33 → P(33) = $\frac{33^3}{3} - 40\frac{33^2}{2} + 231 \cdot 33 + 2500 = 322$ pacientes

El turno tendrá menos pacientes a las 33 horas. El número de pacientes será de 322 .

B. (1,75 puntos) En una panadería el coste de producción de una hogaza es de 2€, y el precio de venta de x hogazas, en €, viene dado por la función P(x)= x(122-x). Además, esta panadería tiene unos gastos fijos mensuales de 500€. Suponiendo que todas las hogazas que se producen se venden, ¿cuántas hogazas debería producir la panadería al mes para maximizar sus ganancias mensuales?¿A cuánto ascenderían esas ganancias?

Se trata de un ejercicio de Optimización.

Sea x→ número de hogazas que debe producir la panadería para maximizar sus ganancias mensuales

Vamos a calcular la función objetivo:

Beneficio = Ingresos – Costes → B(x) = I(x) – C(x)

Ingresos → I(x) = x· $(122 - x)$

Costes → C(x) = 2x + 500

Función Objetivo → Beneficio → **B(x)** = I(x) – C(x) = x· $(122 - x) -$ (2x + 500) = $\boldsymbol{-x^2 + 120x - 500}$

- Derivamos la función objetivo y lo igualamos a cero:

  B´(x) = - $2x + 120$ → - $2x + 120$= 0 → x=60 hogazas deben producir.

- Vamos a comprobar que se trata de un máximo:

  B´´(x) = -2 → B´´(60)= -2<0 → por lo tanto tendremos un máximo

- Calculamos el beneficio:

  B(x)= $-x^2 + 120x - 500$ → B(60)= $-60^2 + 120 \cdot 60 - 500 = 3100$€

Para maximizar el beneficio, deberíamos producir 60 hogazas al mes, ascendiendo el beneficio a 3100€

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

El precio de las lavadoras que se venden en una gran superficie es una variable que sigue una distribución normal con desviación típica de 235€. Para una muestra de 50 lavadoras, escogidas al azar, se obtiene un precio medio de 405€.

A.(1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el precio medio de una lavadora.
B.[1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de lavadoras que habría que considerar para que el error cometido estimar el precio medio por lavadora, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 50€?

a) Sea X la variable aleatoria que mide el precio de las lavadoras que se venden en una gran superficie, donde X ~ N(μ, 15).

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 50 lavadoras
$\bar{x} = 405$€
$\sigma = 235$€

Para una confianza del 95%, Nivel de confianza = 1- α = 0,95 → α = 0,05

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,975 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,025}$= 1,96

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,95}(\mu) = \left(405 - 1,96\frac{235}{\sqrt{50}};\ 405 + 1,96\frac{235}{\sqrt{50}}\right) = (339,861; 470,139)$$

b) Para una confianza del 97%, Nivel de confianza = 1- α = 0,97 → α = 0,03

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,985 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,015}$= 2,17

E = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 50 \rightarrow n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{E}\right)^2 \rightarrow n > \left(\frac{2,17\cdot 235}{50}\right)^2 \rightarrow n > 104,019$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **105 lavadoras**

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Se tiene una urna que contiene 5 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si se extraen al azar dos bolas de forma consecutiva y sin reemplazamiento:

A. [0,5 PUNTOS) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?

B.[0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?

C.[0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las dos bolas extraídas sea negra?

D. (0,75 PUNTOS] Si la segunda bola que se extrae es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido blanca?

Se designan por:

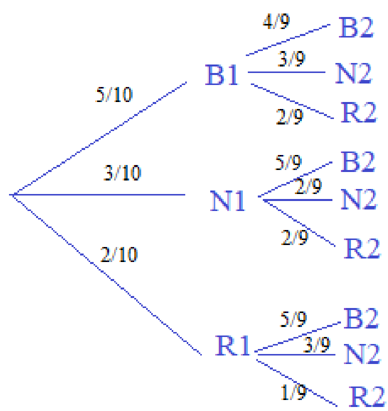
B1 = " Primera bola extraída es blanca "   N1 = " Primera bola extraída es negra "

R1 = " Primera bola extraída es roja "

B2 = " Segunda bola extraída es blanca "   N2 = " Segunda bola extraída es negra "

R2 = " Segunda bola extraída es roja "

Diagrama de árbol



a) Se trata de una probabilidad Compuesta: P($R1 \cap$ R2) =

P(R1)·P(R2/R1)= $\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{90} = 0{,}0\hat{2}$

b) P("dos bolas del mismo color")=P($B1 \cap$ B2) + P($N1 \cap$ N2)+P($R1 \cap$ R2) = $\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{14}{45}$ = $0{,}3\hat{1}$

c) P("al menos una de las dos bolas extraídas sea negra") =

P($B1 \cap$ N2) + P($N1 \cap$ B2) + P($N1 \cap$ N2) + P($N1 \cap$ R2) + P($R1 \cap$ N2)+P($R1 \cap$ R2) =

$\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{8}{15}$ = $0{,}5\hat{3}$

d) Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes → P (B1/R2) = $\frac{P(B1 \cap R2)}{P(R2)} = \frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{9} = 0,\hat{5}$

P(R2) = P(B1)·P(R2/B1)+ P(N1)·P(R2/N1)+ P(R1)·P(R2/R1) = $\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{5}$ = = $0{,}2$