

CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 3

1) Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 \cdot 2 - [2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \cdot 0] = -4 + 0 + 0 - [6 + 2 + 0] = -4 - 6 - 2 = -12$

b) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 - [1 \cdot 1 \cdot (1-x) + 1 \cdot 1 \cdot (1-x) + 0 \cdot 0 \cdot (1-x)] = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 + 0 + 0 - [1-x + 1-x + 0] = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 1 + x - 1 + x = -x^3 + 3x^2 - x - 1$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot (-2) - [(-1) \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 0] = 0 - 3 - 8 - 2 + 0 + 0 = -13$

2) Calcula el valor de x para que el determinante sea igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3x + 2 + 3x^2 - 2x^2 - 3x - 3 = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

3) Calcula el valor de t para que el determinante sea igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \\ t & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \\ t & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 4t + 0 + t^3 - 0 - 2t - 4t = 0 \rightarrow t^3 - 2t = 0 \rightarrow t(t^2 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{Soluciones} \\ t = 0 \\ t = +\sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$$

4) Indica si son ciertas las siguientes igualdades.

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a/2 & b/2 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5a \\ 5y & 5b \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a/2 & b/2 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} \rightarrow ay - xb = \frac{a}{2} \cdot 2y - \frac{b}{2} \cdot 2x = ay - xb \rightarrow$ La igualdad se cumple

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5a \\ 5y & 5b \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} \rightarrow 5x \cdot 5b - 5a \cdot 5y = 25xb - 25ay \neq 5 \cdot [xb - ay] = 5xb - 5ay \rightarrow$ La igualdad no se cumple

CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 4

5) Los elementos de la matriz cuadrada de orden 4. $A = (a_{ij})$ son: $\begin{cases} 1 & \text{si } i = j = 1 \\ 0 & \text{si } i = j \neq 1 \\ -1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

a) Escribe la matriz.

b) Calcula el determinante de la matriz.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -5$

6) Calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \rightarrow C_1 \quad * \text{Aplico la propiedad 6}^* = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \\ F_4 - F_1 \rightarrow F_4 \end{matrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 160$$

7) Resuelve la siguiente ecuación :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 80x - 96$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{matrix} * \text{ Aplico propiedad 4 } * \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \rightarrow C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 6+x & 1 & 2 & 3 \\ 6+x & x & 1 & 2 \\ 6+x & 3 & x & 1 \\ 6+x & 2 & 3 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} * \text{ Aplico la propiedad 6 en la columna 1} * \\ \end{matrix}$$

$$= (6+x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \\ F_4 - F_1 \rightarrow F_4 \end{matrix} (6+x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & x-2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = (6+x) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 2 & x-2 & -2 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$x^4 - 20x^2 + 80x - 96 = 80x - 96 \rightarrow x^4 - 20x^2 = 0 \rightarrow x^2 \cdot (x^2 - 20) = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = \sqrt{20} \\ x = -\sqrt{20} \end{matrix}$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

8) Si A y B son dos matrices 2x2, tales que $|A| = 2$ y $|B| = -3$, calcula: $|AB|$ $|A^2|$ $|3A|$ $|-A|$ $|A^t|$ $|A^{-1}|$

- $|AB|$ *Aplico la propiedad 8 del libro* $\rightarrow |AB| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot (-3) = -6$
- $|A^2| = |A \cdot A|$ *Aplico la propiedad 8* $\rightarrow |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 2 \cdot 2 = 4$
- $|3A| \rightarrow$ Aplico la propiedad $|\alpha \cdot A| = \alpha^n \cdot |A|$ siendo "n" el orden de la matriz A
 $|3A| = 3^2 \cdot |A| = 9 \cdot 2 = 18$
- $|-A| = |(-1) \cdot A|$ *Aplico la propiedad anterior* $|(-1) \cdot A| = (-1)^2 \cdot |A| = 1 \cdot 2 = 2$
- $|A^t|$ *Aplico la propiedad 7* $\rightarrow |A^t| = |A| = 2$
- $|A^{-1}|$ Para hallar la inversa tenemos en cuenta que $A \cdot A^{-1} = I$ y que existe la inversa (A^{-1}), debido a que el determinante de A es distinto de cero $|A| = 2 \neq 0$
 $|A \cdot A^{-1}| = |I|$ *Aplico la propiedad 8* $\rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$

9) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 3$, calcula el valor de los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} x & y \\ a-x & b-y \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ a & b \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} x & y \\ a-x & b-y \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{Aplico la propiedad 4 del libro} \\ F_2 + F_1 \rightarrow F_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 3$

b) $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{Aplico la propiedad 5} \\ F_1 \leftrightarrow F_2 \end{matrix} (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -3$

c) $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ a & b \end{vmatrix} \text{ *Aplico la propiedad 6*} \rightarrow \begin{vmatrix} 5x & 5y \\ a & b \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 = 15$

d) $\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} \rightarrow$ si os dais cuenta es la matriz traspuesta de A. *Aplico la propiedad 7*.

$$|A| = |A^t| \rightarrow \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 3$$

10) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$. Demuestra sin desarrollar (aplicando las propiedades) que el determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 + C_2 \rightarrow C_3} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} \text{ *Aplico la propiedad número 6*} = (a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$$

Según la propiedad 2, como la columna 1 y la columna 3 son iguales determinamos que ese determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

11) Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcula: $|B| = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 5/2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 5/2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{ *Aplico la propiedad 6 en la fila 1 y la fila 3*} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{*Aplico la propiedad 6 en la fila 2*} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{6}{2} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 = 15$$

12) Calcula el siguiente determinante aplicando sus propiedades

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Aplico la propiedad 4} \\ = \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \rightarrow C_1 \end{array} \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \quad \text{*Aplico la propiedad 6 en la columna 1*}$$

$$= (a+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \\ = \\ F_4 - F_1 \rightarrow F_4 \end{array} (a+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

→ Según la propiedad 10 el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$= (a+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3) [1 \cdot (a-1) \cdot (a-1) \cdot (a-1)] = (a+3) \cdot (a-1)^3$$

13) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ u & v & 2 \\ s & t & 3 \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & x+y \\ u+2 & v+2 & u+v \\ s+3 & t+3 & s+t \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & x+y \\ u+2 & v+2 & u+v \\ s+3 & t+3 & s+t \end{vmatrix} \begin{array}{l} = \\ C_3 - C_1 - C_2 \rightarrow C_3 \end{array} \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & -2 \\ u+2 & v+2 & -4 \\ s+3 & t+3 & -6 \end{vmatrix} \quad \text{*Aplico la propiedad 6*}$$

$$= (-2) \cdot \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & 1 \\ u+2 & v+2 & 2 \\ s+3 & t+3 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = C_1 - C_3 \rightarrow C_1 \\ C_2 - C_3 \rightarrow C_2 \end{array} (-2) \cdot \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ u & v & 2 \\ s & t & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$$

14) Sabiendo que el determinante $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 20$ calcula $|B| = \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2g & 2i & 2h \\ 2d & 2f & 2e \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 3g & 3i & 3h \\ 2d & 2f & 2e \end{vmatrix} \text{ *Aplico la propiedad 6*} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ g & i & h \\ d & f & e \end{vmatrix} \text{ *Aplico la propiedad 5*}$$

$$C_2 \leftrightarrow C_3 \quad (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \text{ *Aplico la propiedad 5*} \quad F_2 \leftrightarrow F_3 \quad (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 12 \cdot 20 = 240$$

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR UNA FILA O COLUMNA

15) Determina el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \\ = \\ F_4 - 4F_1 \rightarrow F_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot [-104 - 140 - 140 + 392 + 52 + 100] = 160$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \\ = \\ F_4 - 2F_1 \rightarrow F_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \\ -6 & -3 & -9 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot [-108 - 12 - 192 + 24 + 144 + 72] = -72$$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3 - 2C_2 \rightarrow C_3 \\ = \\ C_4 - 3C_2 \rightarrow C_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & -5 \\ 3 & -3 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 2 & -5 & -5 \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot [-120 - 40 + 60 - 75 + 96 + 40] = -39$$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 - 5C_2 \rightarrow C_1 \\ = \\ C_4 - 6C_2 \rightarrow C_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 28 & -5 & 2 & 32 \\ -31 & 7 & 8 & -15 \\ -24 & 5 & 3 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 28 & 2 & 32 \\ -31 & 8 & -15 \\ -24 & 3 & -18 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot [-4032 - 2976 + 720 + 6144 - 1116 + 1260] = 0$$

16) Calcula el valor de los siguientes determinantes.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \\ = \\ F_4 - 3F_1 \rightarrow F_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot [30+8-14-24] = 0$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \\ = \\ F_4 - 2F_1 \rightarrow F_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [12-9+6-27] = -18$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_3 + C_1 \rightarrow C_3 \\ = \\ C_4 - 2C_1 \rightarrow C_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot [-48-96-48+96+64+36] = 4$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 + 2F_1 \rightarrow F_2 \\ = \\ F_4 + 7F_1 \rightarrow F_4 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 0 & 13 & 23 & -9 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -5 & 10 & 4 \\ 13 & 23 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot [-360-115+260-130-225-368] = 938$$

RANGO DE UNA MATRIZ

17) Halla el rango de las siguientes:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Es una matriz con 4 filas y tres columnas, el determinante sólo puede ser de 3×3 . Como máximo el rango podría ser 3.

Tomamos un menor 2×2 y hallamos su determinante:

- Si nos diese distinto de cero el rango es como mínimo dos.
- Si nos diese cero, probamos con otros menores 2×2 , hasta encontrar uno que sea $\neq 0$. Si no existiera ninguno que fuese distinto de cero el rango sería 1. A no ser que tuviésemos una matriz nula que en ese caso el rango sería $0 \rightarrow \text{rg}(\mathbf{A}) = 0$

1. Calculamos el rango de la matriz mediante determinantes

$$\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(\mathbf{A}) \geq 2 \text{ Las filas 1 y 2 son linealmente independientes.}$$

$$\text{Tomamos un menor de orden 3 : } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 + 20 - 15 = 10 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(\mathbf{A}) = 3$$

Como la dimensión de la matriz es 4×3 , el determinante sólo puede ser 3×3 por lo tanto \rightarrow **El $\text{rg}(\mathbf{A}) = 3$**

2. Calculamos el rango de la matriz mediante el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 6F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \\ F_4 - 4F_1 \rightarrow F_4 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -8 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 2F_3 \rightarrow F_2 \\ F_2 - 2F_4 \rightarrow F_2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el **$\text{rg}(\mathbf{A}) = 3$**

- b) **$\text{rg}(\mathbf{B}) = 3$**
c) **$\text{rg}(\mathbf{C}) = 4$**

18) Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -10 & 8 & 6 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Es una matriz con 4 filas y 4 columnas, el determinante puede ser 4×4 . Como máximo el rango podría ser 4. Tomamos un menor 2×2 y hallamos su determinante:

1. Calculamos el rango de la matriz mediante determinantes

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 10 = -6 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(\mathbf{A}) \geq 2$$

Tomamos un menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ -10 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \\ -10 & 8 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

Como todos los determinantes son igual a cero, el **rg(A)=2**

2. Calculamos el rango de la matriz mediante el método de Gauss

Hemos comprobado que estas filas no son linealmente dependientes. De hecho:

$$F_4 = -2 F_2 \quad \text{y} \quad F_2 = 2 \cdot F_3 - F_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -10 & 8 & 6 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 + 5F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 + 2F_1 \rightarrow F_3 \\ \rightarrow \\ F_4 - 10F_1 \rightarrow F_4 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & -12 & -24 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 \leftrightarrow F_3 \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 12 & 4 \\ 0 & -12 & -24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} F_3 - 2F_2 \rightarrow F_3 \\ \rightarrow \\ F_4 + 4F_1 \rightarrow F_4 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que **rg(A)=2** ya que la tercera y cuarta fila tiene todos sus valores nulos.

- b) Es una matriz con 3 filas y 4 columnas, el determinante sólo puede ser 3x3. Como máximo el rango podría ser 3.

1. Calculamos el rango de la matriz mediante determinantes

Tomamos un menor 2x2 y hallamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+2=2 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(B) \geq 2$$

Tomamos un menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

Como todos los determinantes son igual a cero $\rightarrow \text{rg}(B) = 2$

Hemos comprobado también que estas filas no son linealmente independientes.

2. Calculamos el rango de la matriz mediante el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ \rightarrow \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -10 & -10 & -20 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_3 + 5F_2 \rightarrow F_3 \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el $\text{rg}(B) = 2$ ya que la tercera fila todos los valores son nulos.

RANGO DE UNA MATRIZ CON PARÁMETROS

19) **Estudia, según los valores del parámetro a, el rango de las siguientes matrices.**

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & a \\ a & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -a & a-4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2a & 2a \\ 3 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$$

a) 1. Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{vmatrix} = -10 - 6a + 6 - 8 - 15 - 3a = -27 - 9a$$

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de a.

$$|A| = 0 \rightarrow |A| = -27 - 9a = 0 \rightarrow \mathbf{a = -3}$$

3. Si $|A| \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz

Si $|A| = 0 \rightarrow$ El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- **Caso I: Si $a \neq -3$** \rightarrow Como $|A| \neq 0 \rightarrow$ El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 3 $\rightarrow \mathbf{rg(A)=3}$
- **Caso II: Si $a = -3$** \rightarrow Como $|A| = 0 \rightarrow$ El rango no coincidirá con su orden de la matriz $\rightarrow \mathbf{rg(A) < 3}$

Tendremos que calcular un determinante de un orden menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0 \rightarrow \mathbf{rg(A) = 2}$$

b) 1. Calculamos el determinante de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & a \\ a & 6 & 9 \end{vmatrix} = 36 + 12a + 2a^2 - 4a^2 - 36 - 6a = -2a^2 + 6a$$

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de a.

$$|B| = 0 \rightarrow |B| = -2a^2 + 6a = 0 \rightarrow a(-2a+6) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$$

3. Si $|B| \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz

Si $|B| = 0 \rightarrow$ El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- **Caso I: Si $a \neq 0$ y $a \neq 3$** \rightarrow Como $|B| \neq 0 \rightarrow$ El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 3 \rightarrow **$\text{rg}(B)=3$**

- **Caso II: Si $a = 0$** \rightarrow Como $|B| = 0 \rightarrow$ El rango no coincidirá con su orden de la matriz $\rightarrow \text{rg}(B) < 3$

Tendremos que calcular un determinante de un orden menor

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(B) = 2$$

- **Caso II: Si $a = 3$** \rightarrow Como $|B| = 0 \rightarrow$ El rango no coincidirá con su orden de la matriz $\rightarrow \text{rg}(B) < 3$

Tendremos que calcular un determinante de un orden menor

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 18 = 18 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(B) = 2$$

c) 1. Calculamos el determinante de la matriz C.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -a & a-4 \end{vmatrix} = a^2 - 4a - a + 4 - a - 2a + 8 + 2a = a^2 - 6a + 12$$

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de a.

$$|C| = 0 \rightarrow |C| = a^2 - 6a + 12 = 0 \rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 48}}{2}$$

No existe ningún valor real de a que anule el determinante de C \rightarrow **$\text{rg}(C)=3$ en todos los casos.**

d) 1. Calculamos el determinante de la matriz D.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2a & 2a \\ 3 & 3 & a+2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 4a + 6a + 6a - 6a^2 - 2a - 4 - 6a = -4a^2 + 8a - 4$$

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de a.

$$|D| = 0 \rightarrow |D| = -4a^2 + 8a - 4 = 0 \rightarrow \text{a} = 1(\text{doble})$$

3. Si $|D| \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz

Si $|D| = 0 \rightarrow$ El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- **Caso I: Si $a \neq 1$** \rightarrow Como $|D| \neq 0 \rightarrow$ El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 3 \rightarrow **$\text{rg}(D)=3$**
- **Caso II: Si $a = 1$** \rightarrow Como $|D| = 0 \rightarrow$ El rango no coincidirá con su orden de la matriz \rightarrow $\text{rg}(D) < 3$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(D) = 1$ \rightarrow ya que las filas son proporcionales

20) Estudia, según los valores de m , el rango de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & -2 \\ 2m & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2m \end{pmatrix}$

1. Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -2 \\ 2m & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4m^2 - 4m - 4 + 4 + 4m^2 + 4m = 0$$

Observamos que para cualquier valor de m , el determinante de la matriz A es nula. Por lo tanto $\text{rg}(A) \leq 2$

2. Calculamos un determinante menor de orden 2

$$\begin{vmatrix} 2m & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m - 2$$

3. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de m .

$$|A| = 0 \rightarrow |A| = 2m - 2 = 0 \rightarrow \mathbf{m=1}$$

4. Si $|A| \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz

Si $|A| = 0 \rightarrow$ El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- **Caso I: $m \neq 1$** → Como el determinante de la menor de orden 2 es distinto de cero → El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 2 → **$\text{rg}(A)=2$**
- **Caso II: Si $m = 1$** → Como $|A| = 0$ → El rango no coincidirá con el orden de la matriz menor → $\text{rg}(A) < 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Observamos que las filas son proporcionales} \rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

21) Estudia, según los valores de t , el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} t & -1 & 3 \\ 1 & t & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} t & -1 & 3 \\ 1 & t & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2 + 6 + 4 - 12t + 2 + 2t = 2t^2 - 10t + 12$$

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de t .

$$|A| = 0 \rightarrow |A| = 2t^2 - 10t + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$$

3. Si $|A| \neq 0$ → El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz

Si $|A| = 0$ → El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- **Caso I: Si $t \neq 2$ y $t \neq 3$** → Como $|A| \neq 0$ → El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 3 → **$\text{rg}(A)=3$**
- **Caso II: Si $t = 2$** → Como $|A| = 0$ → El rango no coincidirá con su orden de la matriz → $\text{rg}(A) < 3$

Tendremos que calcular un determinante de un orden menor

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

- **Caso II: Si $t = 3$** → Como $|A| = 0$ → El rango no coincidirá con su orden de la matriz → $\text{rg}(A) < 3$

Tendremos que calcular un determinante de un orden menor

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 1 = 10 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

MATRIZ INVERSA

22) Calcula, si es posible, la inversa de la matriz : $A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$ para los casos en los que $a=2$ y $a=0$

Para $a = 2$

Calculamos la matriz inversa de Z mediante determinantes:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)^t$$

1. Calculamos la matriz A para $a = 2$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. Calculamos el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6+3+1-1-2-9=-2 \neq 0 \rightarrow$ Por lo tanto existe la matriz inversa A^{-1} .

3. Calculamos los adjuntos de la matriz A:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -1 & A_{12} = -1 & A_{13} = 2 \\ A_{21} = 1 & A_{22} = 5 & A_{23} = -8 \\ A_{31} = 0 & A_{32} = -2 & A_{33} = 2 \end{array}$$

4. Escribimos la matriz adjunta.

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Para $a = 0$

1. Calculamos la matriz A para $a = 0$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Calculamos el determinante $|A|$ $|A| = 0 \rightarrow$ No existe matriz inversa, por tanto no existe A^{-1}

23) Calcula para qué valores de t existe la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} t & -1 & 2 \\ 2 & t & -1 \\ -1 & t & 2 \end{pmatrix}$

Calcula A^{-1} para $t=0$

a) La condición necesaria y suficiente para que exista la matriz inversa (A^{-1}) es que $|A| \neq 0$

Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} t & -1 & 2 \\ 2 & t & -1 \\ -1 & t & 2 \end{vmatrix} = 2t^2 + 4t - 1 + 2t + 4 + t^2 = 3t^2 + 6t + 3 = 0 \rightarrow t = -1$$

Por lo tanto para que exista matriz inversa A^{-1} , t tiene que ser distinto de -1 ($t \neq -1$)

b) Si $t=0$, la matriz A nos queda de la siguiente manera $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante para demostrar que existe matriz inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 + 0 + 4 + 0 = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Por lo tanto habrá matriz inversa.}$$

• Calculamos los adjuntos de la matriz A:

$$A_{11} = 0 \quad A_{12} = -3 \quad A_{13} = 0$$

$$A_{21} = 2 \quad A_{22} = 2 \quad A_{23} = 1$$

$$A_{31} = 1 \quad A_{32} = 4 \quad A_{33} = 2$$

• Escribimos la matriz adjunta.

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

• La matriz inversa de la matriz A será

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ -1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

24) Calcula los valores de a para los que existe la matriz inversa de $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula B^{-1} para $a = 0$

a) La condición necesaria y suficiente para que exista la matriz inversa (B^{-1}) es que $|B| \neq 0$

Calculamos el determinante de B

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-2a^2+2-a-a = -2a^2-2a+4=0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

- Caso I Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ existe la matriz inversa de la matriz B ya que $|B| \neq 0$
- Caso II Si $a = 1$ no existe la matriz inversa de la matriz B ya que $|B| = 0$
- Caso III Si $a = -2$ no existe la matriz inversa de la matriz B ya que $|B| = 0$

b) Calculamos B^{-1} para $a=0$, así que sustituimos a por 0 en la matriz B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos su determinante para demostrar que existe matriz inversa.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+0+2+0+0 = 4 \neq 0 \text{ Vamos a tener matriz inversa.}$$

- Calculamos los adjuntos de la matriz B :

$$\begin{array}{lll} B_{11} = 1 & B_{12} = -1 & B_{13} = 3 \\ B_{21} = 1 & B_{22} = 3 & B_{23} = -1 \\ B_{31} = -1 & B_{32} = 1 & B_{33} = 1 \end{array}$$

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{Adj}(B))^t = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$