Ejercicio 1.1 [3 puntos]

Una tienda gourmet prepara tres tipos de lotes para regalo: Lote Clásico a 20 euros, Lote Selección a 30 euros y Lote Premium a 45 euros. Un día concreto, la tienda vende un total de 33 lotes, obteniéndose unos ingresos de 855 euros. Además, se sabe que el número de Lotes Clásicos vendidos fue el triple que el número de Lotes Selección vendidos. Realice las tareas que se describen a continuación:

Tarea 1.1A [1,2 PUNTOS]. Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de lotes vendidos de cada tipo ese día.

Tarea 1.1B [1 PUNTO]. Analice la compatibilidad de dicho sistema.

Tarea 1.1C [0,8 PUNTOS]. Si se puede, calcule cuántos lotes de cada tipo (Clásico, Selección y Premium) se vendieron ese día; y si no se puede, justifique por qué.

x: número de lotes de tipo clásico
y: número de lotes tipo selección
z: número de lotes tipo premium

A. Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=33 \\ 20x+30y+45z=855 \\ x=3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=33 \\ 4x+6y+9z=171 \\ x-3y\ =0 \end{cases}$$

B. Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 4 & 6 & 9 & 171 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0-12+9-6+0+27 = 18 \neq 0 \rightarrow \text{Como } |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg(A)} = 3$$

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) = número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

C. Resolvemos el sistema de Ecuaciones

- Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 4 & 6 & 9 & 171 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & 2 & 5 & 39 \\ 0 & -4 & -1 & -33 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & 2 & 5 & 39 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 21 \\ y = 7 \\ z = 5 \end{cases}$$

El número de lotes clásicos es de 21 unidades.

El número de lotes selección es de 7 unidades

El número de lotes Premium es de 5 unidades

- Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 33 & 1 & 1 \\ 171 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{378}{18} = 21 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 33 & 1 \\ 4 & 171 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{126}{18} = 7 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 33 \\ 4 & 6 & 171 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{90}{18} = 5$$

El número de lotes clásicos es de 21 unidades.

El número de lotes selección es de 7 unidades

El número de lotes Premium es de 5 unidades

Ejercicio 1.2 [3 puntos]

Una empresa fabrica dos tipos de envases: botellas de plástico y tuppers. Para su producción, dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible. Cada botella de plástico requiere 200 g de plástico rígido y 300g de plástico flexible. Cada tupper requiere 400 g de plástico rígido y 100 g de plástico flexible. Además, la cantidad de tuppers fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas. El precio de venta de cada botella de plástico es de 5 euros, mientras que cada tupper se vende a 7 euros. Se pretende maximizar los ingresos.

Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos envases de cada tipo se deben fabricar para maximizar los ingresos?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden los ingresos obtenidos?

1.2.A. Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: x → número de botellas de plástico

y → numero de tuppers

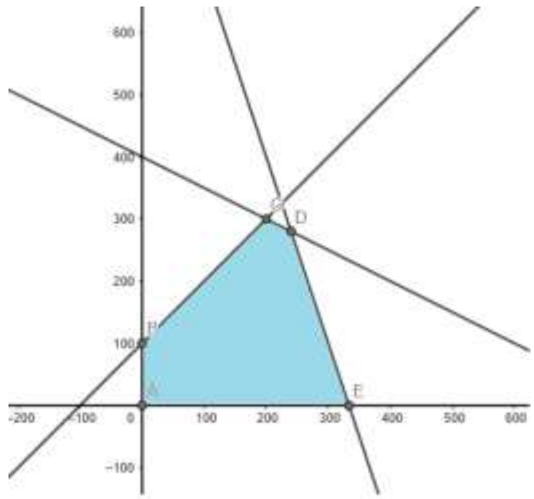
	Cantidad	Gramos de plástico rígido	Gramos de plástico flexible
Botellas de plástico	**x**	**200x**	**300x**
Tuppers	**y**	**400y**	**100y**
	x+y	200x+400y	300x+100y

El objetivo es maximizar los ingresos I(x,y) = 5x + 7y

Restricciones:

$$\begin{cases} 200x + 400y \leq 160.000 \\ 300x + 100y \leq 100.000 \\ y \leq x + 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 800 \\ 3x + y \leq 1000 \\ x - y \geq -100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1.2.B Representación y cálculo de vértices



B)

Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ → A(0,0) → I_A= 5·0 + 7·0 = 0€

B$\begin{cases} x = 0 \\ x - y = -100 \end{cases}$ → $B(0, 100)$ → I_B= 5·0 + 7·100 = 700€

C$\begin{cases} x + 2y = 800 \\ x - y = -100 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 200 \\ y = 300 \end{cases}$ → $C(200,300)$ → I_C= 5·200 + 7·300 = 3100€

D$\begin{cases} x + 2y = 800 \\ 3x + y = 1000 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 240 \\ y = 280 \end{cases}$ → D(240,280) → I_D= 5·240 +7· 280= 3160€

E$\begin{cases} y = 0 \\ 3x + y = 1000 \end{cases}$ → $E(\frac{1000}{3}, 0)$ → I_E= 5·$\frac{1000}{3}$ + 7·0 = 1666,67€

1.2.C y 1.2.D Maximizar Ingresos

Para obtener los máximos Ingresos se deben fabricar 240 botellas de plástico y 280 tuppers, siendo los ingresos de 3160€.

Ejercicio 2 [4 PUNTOS] . **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} (x-4)^2 - 4 \text{ si } x \leq 6 \\ 16 - (x-10)^2 \text{ si } x > 6 \end{cases}$

Tarea 2.1.A [1,5 PUNTOS]. Estudie la continuidad de la función f (x).

Tarea 2.1.B [1 PUNTO]. Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función f(x) con los ejes coordenados y realice un esbozo de la misma.

Tarea 2.1.C [1,5 PUNTOS]. Calcule el área del recinto delimitado por la curva f(x) y el eje de abscisas OX en el intervalo [2,6].

$f(x) = \begin{cases} (x-4)^2 - 4 \text{ si } x \leq 6 \\ 16 - (x-10)^2 \text{ si } x > 6 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 12 & \text{si } x \leq 6 \\ -x^2 + 20x - 84 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

2.1.A Estudio de la continuidad en x = 6

- $\lim_{x \to 6^-} x^2 - 8x + 12 = 0$
- $\lim_{x \to 6^+} -x^2 + 20x - 84 = 0$
- $f(6) = 6^2 - 8 \cdot 6 + 12 = 0$

Como $\lim_{x \to 6^-} f(x) = \lim_{x \to 6^+} f(x) = f(6) \rightarrow$ La función es continua en x = 6

2.1.B Puntos de corte con los ejes

- La función dada es $f(x) = x^2 - 8x + 12$

Corte con el eje 0X (y = 0): $x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 6 \end{cases}$ Puntos (2, 0) y (6, 0)

Corte con el eje 0Y (x = 0): $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 12 = 12 \rightarrow$ Punto (0, 12)

- La función dada es $f(x) = -x^2 + 20x - 84$

Corte con el eje 0X (y = 0): $-x^2 + 20x - 84 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 14 \end{cases}$ Puntos (6, 0) y (14, 0)

Corte con el eje 0Y(x=0): $f(0) = 0^2 - 20 \cdot 0 - 84 = -84$ Punto (0, -84)

Monotonía

- $f(x) = x^2 - 8x + 12$ (Azul)

Derivando e igualando a 0: $f'(x) = 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4$

	$(-\infty, 4)$	$(4, \infty)$
Signo de f´(x)	-	+
Comportamiento de f(x)	↘	↗

Crecimiento: $(4, \infty)$
Decrecimiento: $(-\infty, 4)$
Máximo: no hay
Mínimo: $(4, -4)$

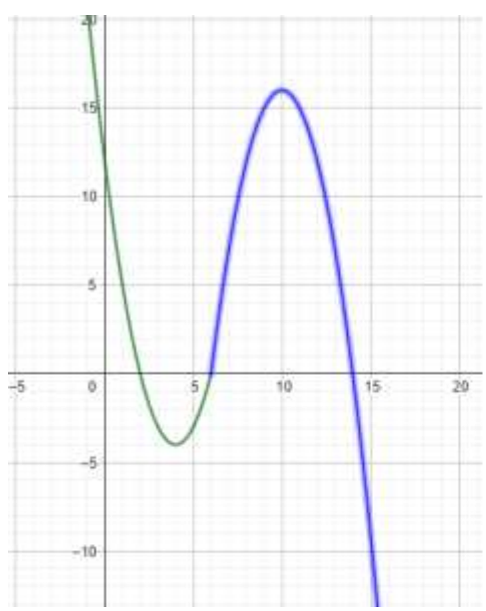
- $f(x) = -x^2 + 20x - 84$ (Verde)

Derivando e igualando a 0: $f'(x) = -2x + 20 = 0 \rightarrow x = 10$

	$(-\infty, 10)$	$(10, \infty)$
Signo de f´(x)	+	-
Comportamiento de f(x)	↗	↘

Crecimiento: $(-\infty, 10)$
Decrecimiento: $(10, \infty)$
Máximo: (10,16)
Mínimo: no hay

Representación de la función definida a trozos



2.1.C Cálculo del área

Observamos que la función que está definida entre [2,6] es la función $f(x) = x^2 - 8x + 12$

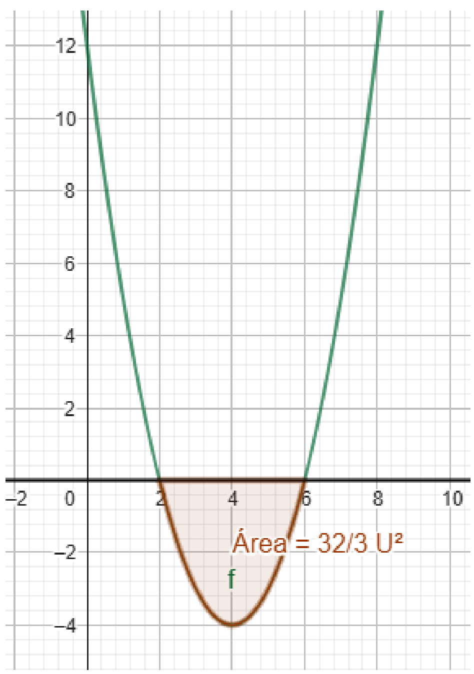
Calculamos los puntos de corte de f(x) con el eje de abscisas 0X

$x^2 - 8x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 6 \end{cases}$ De los dos valores debemos observar si están dentro del recinto que nos marca el enunciado que es [2,6] y vemos que ambos se encuentran dentro de el.

Por lo tanto tendremos un único recinto: [2,6]

$$I = \int_2^6 (x^2 - 8x + 12)dx = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 12x \right]_2^6 \right| = \left| \left[\frac{6^3}{3} - \frac{8 \cdot 6^2}{2} + 12 \cdot 6 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - \frac{8 \cdot 2^2}{2} + 12 \cdot 2 \right] \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{216}{3} - \frac{288}{2} + 72 \right] - \left[\frac{8}{3} - \frac{32}{2} + 24 \right] \right| = \left| [0] - \left[\frac{32}{3} \right] \right| = \frac{32}{3} u^2$$



Ejercicio 3.1 [3 PUNTOS]

En un estudio sobre el tiempo semanal que los alumnos de Bachillerato dedican al ejercicio físico, se ha determinado que esta variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 minutos. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 100 alumnos, obteniendo un promedio de 180 minutos. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 93% para el valor promedio del tiempo dedicado al ejercicio físico por semana.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de la media, con un nivel de confianza del 97,5%, sea de 5 minutos.

3.1.A Cálculo del intervalo de confianza

Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo semanal que los alumnos de Bachillerato dedican al ejercicio físico, donde X ~ N(μ, 15).

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 100 alumnos
$\bar{x} = 180$ min
$\sigma = 25$ min

Para una confianza del 93%, Nivel de confianza = 1- α = 0,93 → α = 0,07

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,965 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,035}$= 1,81

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,93}(\mu) = \left(180 - 1{,}81\frac{25}{\sqrt{100}};\ 180 + 1{,}81\frac{25}{\sqrt{100}}\right) = (175{,}475; 184{,}525)$$

3.1.B Tamaño mínimo de la muestra

Para una confianza del 97,5%, Nivel de confianza = 1- α = 0,975 → α = 0,025

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,9875 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,025}$= 2,24

E = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 5 \rightarrow n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 \rightarrow n > \left(\frac{2{,}24 \cdot 25}{5}\right)^2 \rightarrow n > 125{,}44$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **126 alumnos**

<u>Ejercicio 3.2</u> [3 PUNTOS]

En una cierta ciudad, el 45% del censo vota al partido A, el 40% al partido B y el 15% restante se abstiene. Se sabe, además, que el 25% de los votantes del partido A, el 45% de los del partido B y el 15% de los que se abstienen son mayores de 60 años. Se escoge al azar un ciudadano censado. Realice las siguientes tareas que se plantean:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]- ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?

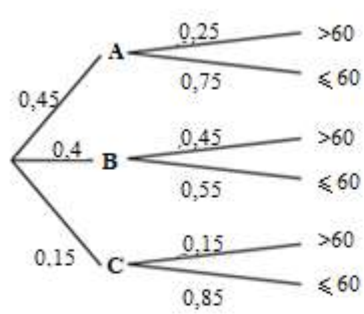
Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

Se designan por:

A = "Votan al partido A " B = " Votan al partido B" C = "Se abstienen "

>60 = "Mayores de 60 años" $\leq$ 60= "Menores o igual a 60 años"

Diagrama de árbol



Tarea 3.2.A Se trata de una probabilidad Compuesta:

$P(B \cap \leq 60) = P(B) \cdot P(\leq 60/B) = 0{,}4 \cdot 0{,}55 = 0{,}22$

Tarea 3.2.B Se trata de una probabilidad total:

$P(>69) = P(A) \cdot P(>60/A) + P(B) \cdot P(>60/B) + P(C) \cdot P(>60/C) = 0{,}45 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}45 + 0{,}15 \cdot 0{,}15 = 0{,}315$

Tarea 3.2.C Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes $\rightarrow P(C/>60) = \frac{P(C \cap >60)}{P(>60)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}15}{0{,}315} = 0{,}0714$