## Ejercicio 1.1 [3 puntos]

**Dadas las matrices:** $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

**Realice las siguientes tareas:**

**Tarea 1.1A [1 PUNTO]. Estudie para qué valores del parámetro $a$ la matriz $M$ tiene inversa.**

**Tarea 1.1B [2 PUNTOS]. Para $a = 1$, obtenga la matriz $X$ de la siguiente ecuación:**

**MX = 2N**

### 1.1.A La condición necesaria y suficiente para que exista la matriz inversa ($M^{-1}$) es que $|M| \neq 0$

Calculamos el determinante de M

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 5a - a^2 - 6 = -a^2+5t-6=0 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto para que exista matriz inversa $M^{-1}$, a tiene que ser distinto de 2 y 3 ($a \neq 2$ y $a \neq 3$)

### 1.1.B Resolución de la ecuación matricial

Si a =1, la matriz M nos queda de la siguiente manera $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Lo primero que deberemos realizar es despejar la ecuación matricial:

**MX = 2N** → $(M)^{-1} \cdot (M) \cdot X = (M)^{-1} \cdot (2N)$

$I \cdot X = (M)^{-1} \cdot (2N)$

$\mathbf{X = (M)^{-1} \cdot (2N)}$

Calculamos la matriz inversa de la matriz M mediante determinantes

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot Adj(M)^t$$

- Calculamos el determinante de M:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 5+0+0-1+0-6= -2\neq 0$$ → Por lo tanto habrá matriz inversa.

- Calculamos los Adjuntos de M:

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -1$ $\quad M_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1$ $\quad M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -1$

$M_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 6$ $\quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$ $\quad M_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -6$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad M_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

- Escribimos la matriz adjunta.

$$\mathrm{Adj}(M) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}(M)^t = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \mathrm{Adj}(M)^t \rightarrow M^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{M})^{-1} \cdot (\mathbf{2N}) \rightarrow X = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -13 & 2 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

## Ejercicio 1.2 [3 puntos]

**Un pastelero dispone de un máximo de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas. Para la elaboración de cada sobao se requieren 45 minutos y 200 gramos de mantequilla, y para la elaboración de cada quesada se requieren 90 minutos y 100 gramos de mantequilla. Por limitaciones logísticas, la cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades y se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla. El beneficio que se obtiene por cada sobao es de 1,5€ y el que se obtiene por cada quesada es de 2€. La intención del pastelero es maximizar el beneficio total.**

**Realice las siguientes tareas:**

**Tarea 1.2A el problema.[1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen**

**Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.**

**Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos sobaos y cuántas quesadas se deben fabricar para maximizar el beneficio total?**

**Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto asciende dicho beneficio?**

**1.2.A. Se trata de un problema de programación lineal.**

Las variables de decisión son: x → número de sobaos que se deben fabricar

y → numero de quesadas que se deben fabricar

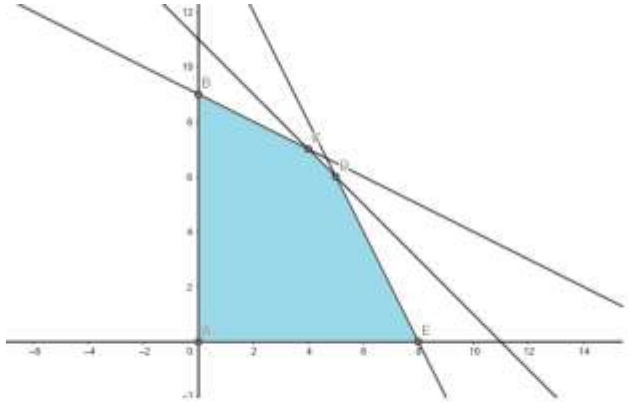
| | Cantidad | Minutos de elaboración | Gramos de mantequilla |
|---|---|---|---|
| **Sobaos** | **x** | **45x** | **200x** |
| **Quesadas** | **y** | **90y** | **100y** |
| | x+y | 45x+90y | 200x+100y |

El objetivo es maximizar los beneficios B(x,y) = 1,5x + 2y

Restricciones:

$$\begin{cases} 45x + 90y \leq 810 \\ 200x + 100y \leq 1600 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 18 \\ 2x + y \leq 16 \\ x + y \geq 11 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

### 1.2.B Representación y cálculo de vértices



B)

Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los máximos beneficios, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos beneficios en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ A(0,0) → $B_A$= 1,5·0 + 2·0 = 0€

B$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 18 \end{cases} \rightarrow B(0,9) \rightarrow$ $B_B$= 1,5·0 + 2·9 = 18€

C$\begin{cases} x + 2y = 18 \\ x + y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} \rightarrow C(4,7) \rightarrow$ $B_C$= 1,5·4 + 2·7 = 20€

D$\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x + y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow$ D(5,6) → $B_D$= 1,5·5 +2· 6= 19,5 €

E$\begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 16 \end{cases} \rightarrow E(8,0) \rightarrow$ $B_E$= 1,5·8 + 2·0 = 12€

### 1.2.C y 1.2.D Maximizar Beneficios

Para obtener los máximos beneficios se deben fabricar 4 sobaos y 7 quesadas, siendo los beneficios de 20€.

**Ejercicio 2 [4 PUNTOS] . Dada la función f($x$) = (x+2)$(x-3)^2$**

**Tarea 2.1.A [1,5 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función e indique los extremos relativos.**

**Tarea 2.1.B [1 PUNTO]. Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función f(x) con los ejes coordenados. A continuación, represente gráficamente f(x) señalando dichos puntos de corte y los extremos relativos.**

**Tarea 2.1.C [1,5 PUNTOS]. Calcule el área del recinto delimitado por la gráfica de la función f(x) por la curva f(x) y el eje de abscisas OX.**

**f($x$) = $(x+2)(x-3)^2$ → f($x$) = (x+2)($x^2-6x+9$) = $x^3+2x^2-6x^2-12x+9x+18$**

**f(x) = $x^3-4x^2-3x+18$**

**2.1.A Estudio de los intervalos de crecimiento, decrecimiento y extremos relativos (Monotonía)**

f(x) = $x^3-4x^2-3x+18$      D(f) = ∀x ∈ R

Derivando e igualando a 0: f´(x)= $3x^2-8x-3$ = 0 → $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$

| | $(-\infty,-1/3)$ | $\left(-\frac{1}{3},3\right)$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo de f´(x) | + | - | + |
| Comportamiento de f(x) | ↗ | ↘ | ↗ |

Crecimiento: $(-\infty,-1/3)\cup(3,\infty)$      Decrecimiento: $\left(-\frac{1}{3},3\right)$

Máximo: (-1/3, 500/27) = (-0,$\hat{3}$, 18,52)      Mínimo: (3,0)

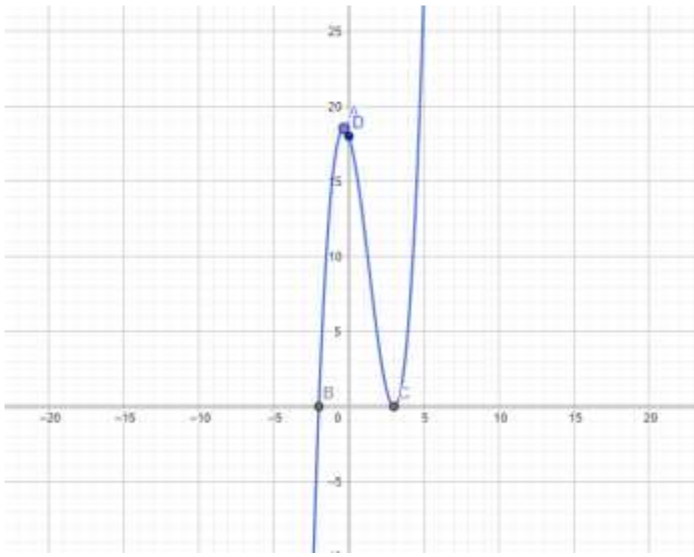
**2.1.B Puntos de corte con los ejes**

- La función dada es f(x) = $x^3-4x^2-3x+18$

Corte con el eje 0X (y = 0): $x^3-4x^2-3x+18$ = 0 → $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$      Puntos (-2, 0) y (3, 0)

Corte con el eje 0Y (x = 0): f(0)= $0^3-4\cdot 0^2-3\cdot 0+18=18$ → Punto (0, 18)

## Representación de la función



## 2.1.C Cálculo del área

Sea la función f(x) = $x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

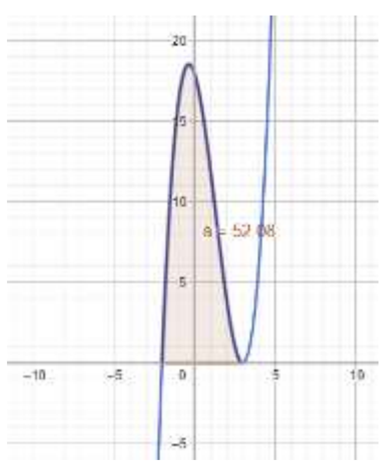
Calculamos los puntos de corte de f(x) con el eje de abscisas 0X

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto tendremos un único recinto: [-2,3]

$$A = \int_{-2}^{3}((x^3 - 4x^2 - 3x + 18) - 0)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 18x\right]_{-2}^{3} = \left(\frac{3^4}{4} - \frac{4\cdot 3^3}{3} - \frac{3\cdot 3^2}{2} + 18\cdot 3\right) -$$

$$\left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{4\cdot(-2)^3}{3} - \frac{3\cdot(-2)^2}{2} + 18\cdot(-2)\right) = \frac{99}{4} - \left(-\frac{82}{3}\right) = \frac{625}{12}\ u^2 = 52{,}08u^2$$



**Ejercicio 3.1** **[3 PUNTOS]**

**Se sabe que el número de viajes realizados mensualmente por los usuarios de una línea de autobuses sigue una distribución normal con desviación estándar $\sigma$ = 5. Para una muestra de 225 usuarios, seleccionados aleatoriamente, se obtiene una media de 21 viajes por mes.**

**Realice las siguientes tareas:**

**Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 93% para la media de los viajes mensuales.**

**Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de dicha media, con un nivel de confianza del 97%, sea de 1 viaje al mes.**

### 3.1.A Cálculo del intervalo de confianza

Sea X la variable aleatoria que mide el número de viajes realizados mensualmente por los usuarios de una línea de autobuses, donde X ~ N(μ, 5).

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 225 usuarios
$\bar{x} = 21$ viajes/mes
$\sigma = 5$ viajes/mes

Para una confianza del 93%, Nivel de confianza = 1- α = 0,93 → α = 0,07

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,965 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,035}$= 1,81

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 − α.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,93}(\mu) = \left(21 - 1{,}81\frac{5}{\sqrt{225}};\ 21 + 1{,}81\frac{5}{\sqrt{225}}\right) = (20{,}397; 21{,}603)$$

### 3.1.B Tamaño mínimo de la muestra

Para una confianza del 97%, Nivel de confianza = 1- α = 0,97 → α = 0,03

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,985 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,015}$= 2,17

E = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1 \to n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{E}\right)^2 \to n > \left(\frac{2{,}17\cdot 5}{1}\right)^2 \to n > 117{,}72$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **118 viajeros**

**Ejercicio 3.2 [3 PUNTOS]**

**En una compañía de seguros de automóviles, el 17% de los clientes tiene menos de 30 años, el 60% tiene entre 30 y 60 años, y el resto es mayor de 60 años. El historial de partes de accidente del último año indica lo siguiente: entre los menores de 30 años, 3 de cada 5 no presentaron ningún parte; entre los clientes de 30 a 60 años, 9 de cada 10 no presentaron ningún parte; entre los mayores de 60 años, 3 de cada 4 no presentaron ningún parte. Se selecciona al azar un cliente de la compañía.**

**Realice las siguientes tareas:**

**Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente seleccionado presentara un parte de accidente el año pasado?**

**Tarea 3.2B [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga 30 años o más y no presentara un parte de accidente el año pasado?**

**Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Si se sabe que el cliente presentó un parte de accidente el año pasado, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 30 años?**

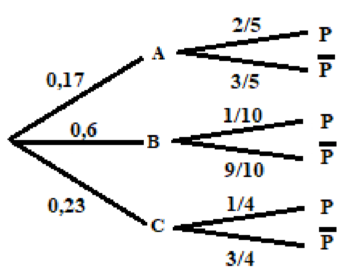
Se designan por:

A = “Clientes con menos de 30 años “ B = “Clientes que tienen entre 30 y 60 años“

C = “Clientes mayores de 60 años “

P = “El último año, tienen parte de accidente” $\overline{P}$= “El último año, no tienen parte de accidente”

Diagrama de árbol




**Tarea 3.2.A** Se trata de una probabilidad Total:

P($P$) = P(A)·P(P/A)+ P(B)·P(P/B)+ P(C)·P(P/C) = 0,17·2/5 + 0,6·1/10 + 0,23·1/4 = 0,1855

**Tarea 3.2.B** P(B∩ $\overline{P}$) + P(C∩ $\overline{P}$) = P(B)·P($\overline{P}$/B)+ P(C)·P($\overline{P}$/C)= 0,6·9/10 + 0,23·3/4 = 0,7125

**Tarea 3.2.C** Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes → P (A/P) = $\frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{0,17 \cdot 2/5}{0,1855} = 0,3666$