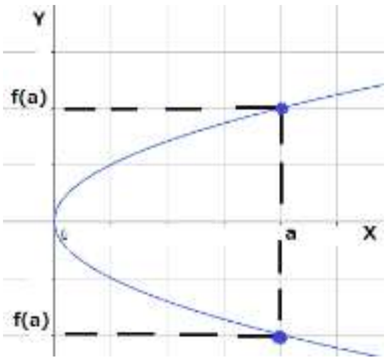
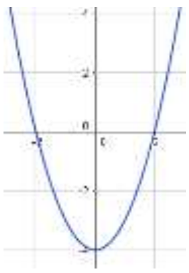
1) Teoría de funciones

- Una función (f) es la relación entre un conjunto de elementos dado X (llamado dominio) y otro conjunto de elementos Y (llamado recorrido o imagen) de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento y (f(x)) del recorrido.
- El subconjunto de números reales x para los que la función está definida se denomina Dominio. D(f)
- El subconjunto de número reales formado por todos los valores de y que toma la función se denomina Imagen o recorrido. Im(f) o R(f)
- El número real x toma el nombre de variable independiente y el número real y toma el nombre de variable dependiente.



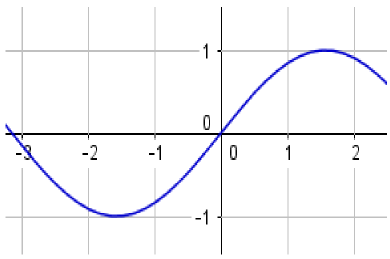
Esta gráfica **no corresponde con una función**. Si nos vamos a la definición nos dice que a cada elemento de x le corresponde un **único** valor de y. Si observamos la gráfica para un valor de x le corresponde varios valores de y.

- **Ejemplos: Vamos a calcular el dominio y la imagen o recorrido de las siguientes funciones:**



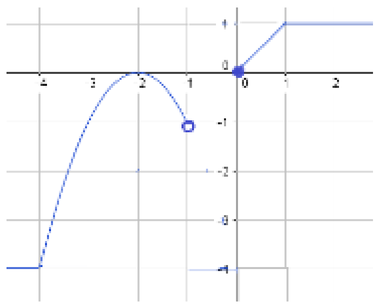
D(f) = $\forall x \in \mathbb{R}$

Im(f) o R(f) = [-4, ∞)



D(f) = $\forall x \in \mathbb{R}$

Im(f) o R(f) = [-1,1]



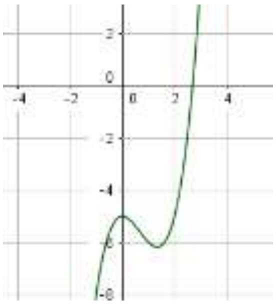
D(f) = xϵ $(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$

Im(f) = R(f) = (-∞,1]

2) Cálculo del dominio de una función a partir de la expresión analítica

- **Dominio de la función polinómica.**

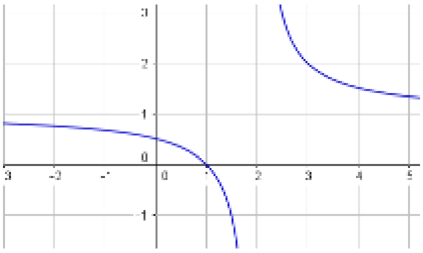
El dominio de una función polinómica está formado por todos los valores reales (ℝ). D(f)= ∀ x∈ ℝ



Ejemplo: **f(x) = x^3-2x^2-5** → D(f) = ∀ x∈ ℝ

- **Dominio de una función racional.**

El dominio de una función racional está formado por todos los valores reales (ℝ)., exceptuando los que anulan el denominador.



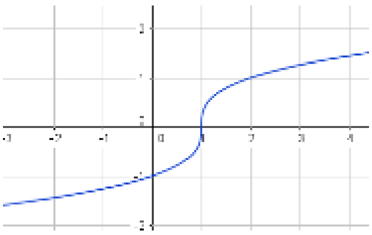
Ejemplo: f(x) = $\frac{x-1}{x-2}$

Condición: x-2≠0 → x≠2 → D(f) = ∀ x∈ $\mathbb{R}-\{2\}$

- **Dominio de la función radical**

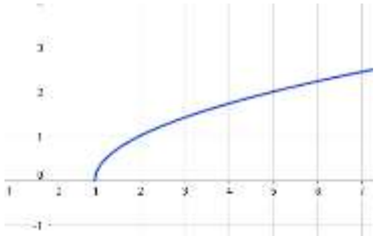
f(x)= $\sqrt[n]{g(x)} \rightarrow \begin{cases} \text{n par} \rightarrow \mathrm{D(f)} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{D(g)}/\mathrm{g(x)} \geq 0\} \\ \text{n impar} \rightarrow \mathrm{D(f)} = \mathrm{D(g)} \end{cases}$

El dominio de una función radical de índice impar está formado por todos los valores reales (ℝ). D(f)=∀x∈ ℝ



Ejemplo: f(x) = $\sqrt[3]{x-1}$ → D(f)= ∀ x∈ ℝ

El dominio de una función radical de índice par está formado por todos los valores del dominio del radicando que hacen que éste sea mayor o igual que cero.



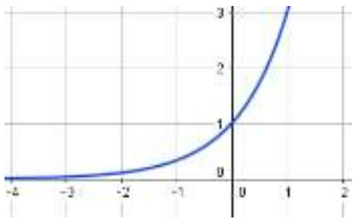
Ejemplo:

f(x) = $\sqrt{x-1}$

Condición: x-1≥ 0 → $x \geq 1$ → D(f) = ∀x∈ $[1, \infty)$

- **Dominio de una función exponencial**

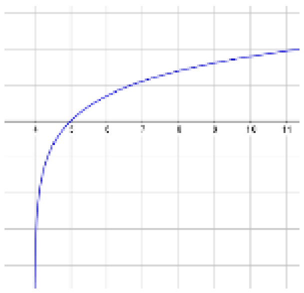
El dominio de una función exponencial está formado por todos los valores reales (ℝ). D(f)= ∀ x∈ ℝ



Ejemplo: f(x) = 3^x → D(f)= ∀ x∈ ℝ

- **Dominio de una función logarítmica**

El dominio de una función logarítmica está formado por todos los valores que hacen que la función que se encuentra dentro del logaritmo sea mayor que 0.



Ejemplo: f(x)= $\log(x-4)$

Condición: x - 4 > 0 → x > 4 → D(f)= ∀ x∈ $\mathbb{R}/x\epsilon(4, \infty)$

3) Cálculo de la imagen o recorrido de una función a partir de la expresión analítica

Se llama función inversa o reciproca de f a otra función f^{-1} que cumple que: Si f(a) = b, entonces $f^{-1}(b) = a$. La notación f^{-1} se refiere a la inversa de la función f y no al exponente −1 usado para números reales.

- **Imagen o recorrido de una función racional.**

Dada la siguiente función racional → **f(x)=** $\frac{2-x^2}{x^2-9}$ → **y =** $\frac{2-x^2}{x^2-9}$

Vamos a calcular la imagen o recorrido, para ello debemos hallar previamente su función recíproca o inversa.

- Cálculo de la función recíproca o inversa.

  $y\cdot(x^2-9)=2-x^2 \rightarrow y\cdot x^2 - 9y = 2-x^2 \rightarrow$

  Pasamos todo lo que tenga x hacia un lado de la ecuación y sacamos factor común.

  $y\cdot x^2 + x^2 = 2 + 9y \rightarrow x^2 (y+1) = 2+9y \rightarrow x^2 = \frac{2+9y}{y+1} \rightarrow x=\mp\sqrt{\frac{2+9y}{y+1}}$ Cogemos la parte positiva ya que si no la función resultante no sería una función.

  Por último sustituimos las x por las y y las y por x

  $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{2+9x}{x+1}}$

- Cálculo de la imagen o recorrido de una función.

  El dominio de la función inversa es igual al recorrido o imagen de la función.

  Dom (f^{-1}) = Im (f) ó R(f)

  $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{2+9x}{x+1}}$ Condición: $\frac{2+9x}{x+1} \geq 0 \rightarrow D(f^{-1}) = Im(f) = (-\infty, -1) U [-2/9, \infty)$

- **Imagen o recorrido de una función radical.**

Dada la siguiente función logarítmica → $f(x)= y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

Vamos a calcular la imagen o recorrido, para ello debemos hallar previamente su función recíproca o inversa.

- Cálculo de la función recíproca o inversa.

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

$y \cdot \sqrt{x^2-4} = x$ → elevamos ambas partes al cuadrado → $\left(y \cdot \sqrt{x^2-4}\right)^2 = x^2 \rightarrow$

$y^2(x^2-4) = x^2 \rightarrow y^2 \cdot x^2 - 4y^2 = x^2$

Pasamos todo lo que tenga x hacia un lado de la ecuación y sacamos factor común.

$y^2 \cdot x^2 - x^2 = 4y^2 \rightarrow x^2\,(y^2 -1) = 4y^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4y^2}{y^2-1}}$ Cogemos la parte positiva ya que si no la función resultante no sería una función.

Por último sustituimos las x por las y y las y por x.

$f^{-1}(x)= \sqrt{\frac{4x^2}{x^2-1}}$

- Cálculo de la imagen o recorrido de una función.

El dominio de la función inversa es igual al recorrido o imagen de la función.

Dom (f^{-1}) = Im (f) ó R(f)

$f^{-1}(x)= \sqrt{\frac{4x^2}{x^2-1}}$ Condición: $\frac{4x^2}{x^2-1} \geq 0 \rightarrow D(f^{-1}) = Im\,(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

- **Imagen o recorrido de una función logarítmica.**

Dada la siguiente función logarítmica → f(x)= y = $\ln\left(\frac{x-3}{x-1}\right) \rightarrow y = \log_e \frac{x-3}{x-1}$

Vamos a calcular la imagen o recorrido, para ello debemos hallar previamente su función recíproca o inversa.

- Cálculo de la función recíproca o inversa.

  $y = \log_e \dfrac{x-3}{x-1}$

  Aplicamos la propiedad de los logaritmos $\log_a N = x \rightarrow a^x = N$

  $e^y = \frac{x-3}{x-1} \rightarrow e^y(x-1) = x-3 \rightarrow e^y x - e^y = x - 3 \rightarrow e^y x - x = e^y - 3$

  Pasamos todo lo que tenga x hacia un lado de la ecuación y sacamos factor común.

  $x(e^y - 1) = e^y - 3 \rightarrow x = \frac{e^y-3}{e^y-1}$ Por último sustituimos las x por las y y las y por x. $f^{-1}(x)= \frac{e^x-3}{e^x-1}$

- Cálculo de la imagen o recorrido de una función.

  El dominio de la función inversa es igual al recorrido o imagen de la función.

  Dom (f^{-1}) = Im (f) ó R(f)

  $f^{-1}(x)= \frac{e^x-3}{e^x-1}$ Condición: $\mathbf{e^x - 1 \neq 0} \rightarrow$ D(f^{-1}) = Im (f) = $\mathbb{R}$ - {0}

- **Imagen o recorrido de una función exponencial.**

Dada la siguiente función logarítmica → f(x)= $e^{\frac{x-4}{x+5}} \rightarrow y = e^{\frac{x-4}{x+5}}$

Vamos a calcular la imagen o recorrido, para ello debemos hallar previamente su función recíproca o inversa.

- Cálculo de la función recíproca o inversa.

f(x)= $e^{\frac{x-4}{x+5}} \rightarrow y = e^{\frac{x-4}{x+5}}$

Aplicamos logaritmos en ambas partes de la igualdad: ln y = ln $e^{\frac{x-4}{x+5}}$

Aplicamos una de las propiedades de los logaritmos. Bajamos el exponente

Lny =$\frac{x-4}{x+5}$ lne →ln y = $\frac{x-4}{x+5}$ → (x+5) lny = x- 4

Pasamos todo lo que tenga x hacia un lado de la ecuación y sacamos factor común.

xlny + 5lny = x-4 → x- xlny= 5lny+4 → x(1-lny)=5lny+4 → x=$\frac{5\ln y+4}{1-\ln y}$

Por último sustituimos las x por las y y las y por x.

$f^{-1}(x)= \frac{5\ln x+4}{1-\ln x}$

- Cálculo de la imagen o recorrido de una función.

El dominio de la función inversa es igual al recorrido o imagen de la función.

Dom (f^{-1}) = Im (f) ó R(f)

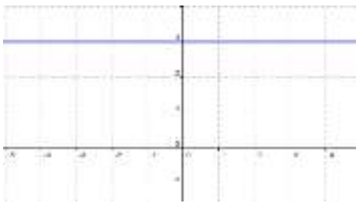
$f^{-1}(x)= \frac{5\ln x+4}{1-\ln x}$ Condiciones: $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x \neq 0 \end{cases}$ → D(f^{-1}) = Im (f) = (0,e)U(e,∞)

Tipo de Funciones. Funciones definidas a trozos

Funciones constantes, lineales y afines.

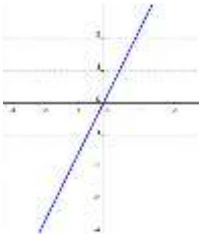
Observamos que las gráficas de las siguientes funciones son líneas rectas. Estas gráficas se corresponden con funciones polinómicas de grado cero o uno. $y = mx + n$

Función constante $m=0$



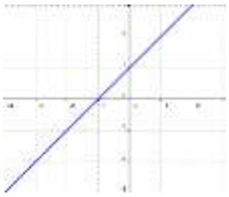
$y = 2$

Funciones lineales $n=0$ y $m \neq 0$



$y = 2x$

Funciones afines $m \neq 0$ y $b \neq 0$



$y = x+1$

Las funciones polinómicas de grado cero o uno tienen por gráfica una línea recta. Estas funciones pueden ser de tres tipos:

- Función constante: su gráfica es una línea recta paralela al eje de abscisas y su ecuación es $y = b$.
- Función lineal: su gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas y su ecuación es $y = mx \rightarrow$ donde $m \neq 0$

  El parámetro m recibe el nombre de pendiente de la recta o constante de proporcionalidad de la función.

- Función Afín: Su gráfica es una recta que no pasa por el origen de coordenadas y su ecuación es $y = mx + b$ donde $m \neq 0$

  El parámetro m es la pendiente de la recta, y el parámetro b se denomina ordenada en el origen.

Si $m > 0$ la pendiente de la recta es positiva (creciente) y si $m < 0$ la pendiente es negativa (decreciente).

Representación de funciones Lineales y Afines

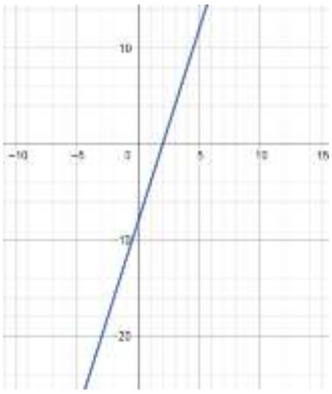
Ejemplo 1: Representar la función y = 4x-8

y = $4x - 8$ como la expresión algebraica de una función lineal o afín es y = mx + n → $\begin{cases} m = 4 \\ n = -8 \end{cases}$

m= 4 >0 → la pendiente es positiva, por la tanto la función es creciente

Para representarla, realizamos una tabla de valores:

X	Y
-1	-12
0	-8
1	-4
2	0



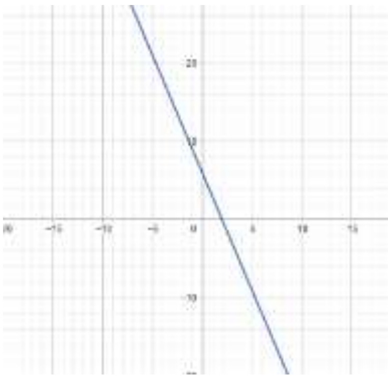
Ejemplo 2: Representar la función y = -3x+6

y = $-3x + 6$ como la expresión algebraica de una función lineal o afín es y = mx + n → $\begin{cases} m = -3 \\ n = 6 \end{cases}$

m= -3 < 0 → la pendiente es negativa, por la tanto la función es decreciente.

Para representarla, realizamos una tabla de valores:

X	Y
-1	9
0	6
1	3
2	0

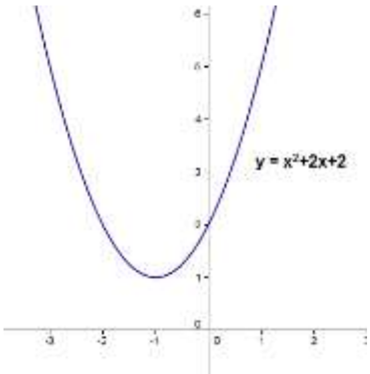


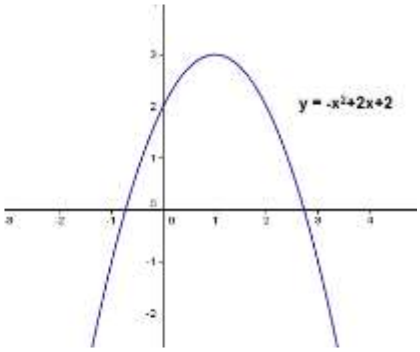
Funciones Cuadráticas

- La expresión algebraica de las funciones polinómicas de segundo grado o funciones cuadráticas es :

  $f(x)= ax^2+bx+c$ donde $a\neq 0$

- Se representan mediante parábolas.
- Si $a > 0$ Las ramas van hacia arriba   Si $a < 0$ Las ramas van hacia abajo





- El vértice de la parábola viene determinado por $Vx = -\frac{b}{2a}$
- Para calcular Vy debemos sustituir Vx en la función.
- La parábola posee simetría par respecto al vértice.
- Para representarla:

  - Observamos si el término cuadrático (a) es mayor o menor que 0. De ello dependerá si la parábola sea cóncava hacia arriba o hacia abajo.
  - Calculamos los puntos de corte con los ejes.
  - Calculamos el vértice.
  - El eje de simetría, es la recta vertical que pasa por el vértice.
  - Calculamos la tabla de valores alrededor del vértice.

Ejemplo 1: Representar la función cuadrática y = $x^2 - x - 6$

y = $x^2 - x - 6$ como la expresión algebraica de una función cuadrática es y = ax^2+ bx +c → $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}$

- Como a = 1 > 0 → las ramas miran hacia arriba ∪
- Calculamos los puntos de corte con los ejes:
  - Corte con el eje OX (y=0) y= $x^2 - x - 6 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 & (3{,}0) \\ x_2 = -2 & (-2{,}0) \end{cases}$
  - Corte con el eje OY (x=0) f(0) = $0^2 - 0 - 6 = -6 \quad (0, -6)$

- Calculamos el vértice de la función, que en este caso se trata de un mínimo, ya que las ramas miran hacia arriba.

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

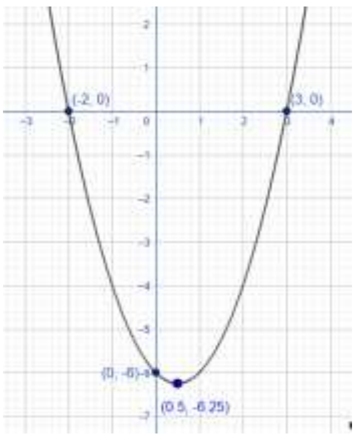
$$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$$

$$V_y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1-2-24}{4} = -\frac{25}{4}$$

- Posee un eje de simetría en x = $\frac{1}{2}$

- Calculamos la tabla de valores alrededor del vértice y representamos la función.

X	Y
-3	6
-1	-4
1	-6
2	-4



Ejemplo 2: Representar la función cuadrática y = $-2x^2 + 8x$

y = $-2x^2 + 8x$ como la expresión algebraica de una función cuadrática es y = ax^2+ bx +c → $\begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \\ c = 0 \end{cases}$

- Como a = -2 < 0 → las ramas miran hacia abajo ∩
- Calculamos los puntos de corte con los ejes:
  - Corte con el eje OX (y=0) y= $-2x^2 + 8x \rightarrow -2x^2 + 8x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & (0,0) \\ x_2 = 4 & (4,0) \end{cases}$
  - Corte con el eje OY (x=0) f(0) = $-2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 = 0$ (0,0)
- Calculamos el vértice de la función, que en este caso se trata de un mínimo, ya que las ramas miran hacia arriba.

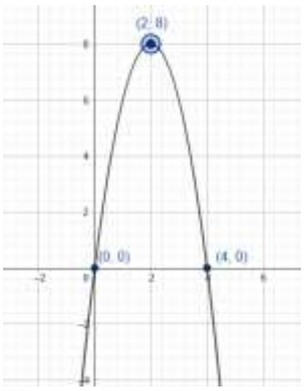
$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2\cdot(-2)} = 2$$

V(2,8)

$$V_y = f(2) = -2 \cdot (2)^2 + 8 \cdot 2 = 8$$

- Posee un eje de simetría en x = 2
- Calculamos la tabla de valores alrededor del vértice y representamos la función

X	Y
-1	-10
1	6
3	6
5	-10



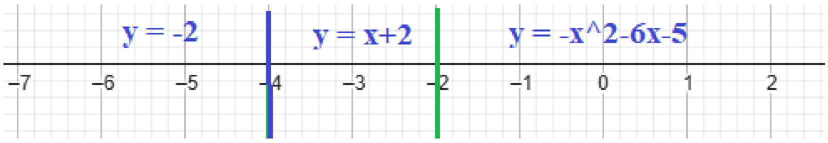
Función definida a trozos

Una función está definida a trozos cuando su expresión es distinta dependiendo de la zona del dominio que estemos analizando.

Ejemplo 1: Representación de una función definida a trozos

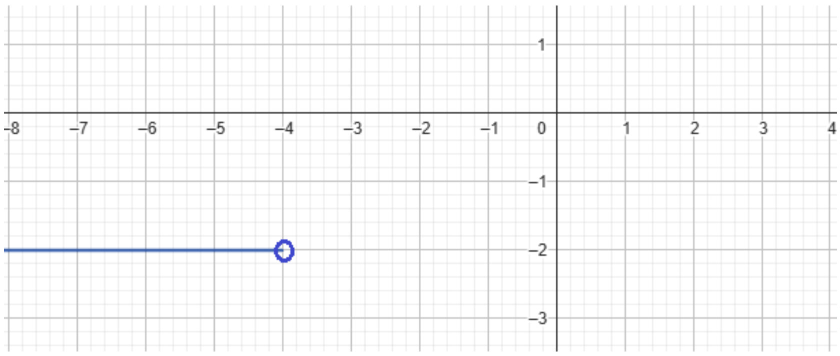
$$f(x) = \begin{cases} -2 & x < -4 \\ x+2 & -4 \leq x < -2 \\ -x^2 - 6x - 5 & x \geq -2 \end{cases}$$

Para empezar a representar, debemos distinguir que función tenemos en cada región



- $(x<-4)$ Observamos que desde -∞ hasta x= -4 la función que está definida es y = -2, es decir una función constante. (lo vamos a representar en azul)
- $(-4 \leq x < -2)$ Observamos que desde x= -4 hasta x= -2, la función que está definida es y= x+2, es decir una función afín. (lo vamos a representar en verde)
- $(x \geq -2)$ Observamos que desde hasta x= -2 hasta ∞ la función que está definida es $y = -x^2 - 6x - 5$, es decir una función cuadrática. (lo vamos a representar en rojo)

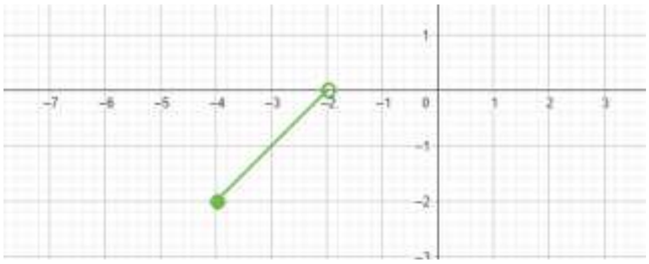
Comenzamos por la primera función, es decir y = -2



Como observamos la función constante y=-2 solo llega hasta x = -4 , y este punto lo dibujamos abierto porque no está incluido en la función. (x<-4 no posee el signo igual)

La segunda función que vamos a representar, es la función y = x+2 (función afín). Para representarla haremos una tabla de valores. Los puntos que deben estar en la tabla son x=-4 y x=-2 porque son los puntos donde empieza y termina la función $(-4 \leq x < -2)$

X	Y
-4	-2
-3	1
-2	0



Como observamos la función afín y= x+2 va desde x =-4 (cerrado porque está incluido) hasta x=-2(abierto porque este punto no está incluido) $(-4 \leq x < -2)$. Los puntos incluidos los pintamos cerrados y los no incluidos los pintamos abiertos.

Para representar la tercera función, que se trata de una función cuadrática y = $-x^2 - 6x - 5$

y = $-x^2 - 6x - 5$ como la expresión algebraica en función cuadrática es y = ax^2+ bx +c → $\begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \\ c = -5 \end{cases}$

- Como a = -1 < 0 → las ramas miran hacia abajo ∩
- Calculamos los puntos de corte con los ejes:
  - Corte con el eje OX (y=0) y= $-x^2 - 6x - 5 \rightarrow -x^2 - 6x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ $(-5,0)$ $(-1,0)$
  - Corte con el eje OY (x=0) f(0) = $-0^2 - 6 \cdot 0 - 5 = -5$ $(0,-5)$

- Calculamos el vértice de la función, que en este caso se trata de un mínimo, ya que las ramas miran hacia arriba.

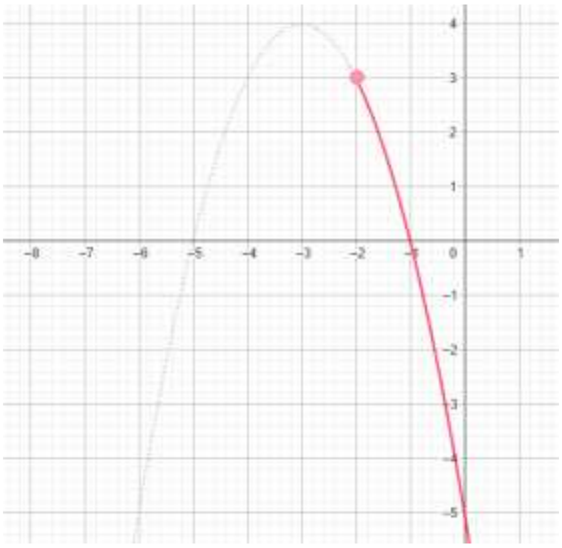
$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2\cdot(-1)} = -3$$

$V(-3,4\ )$

$$V_y = f\,(-3\,) = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 5 = 4$$

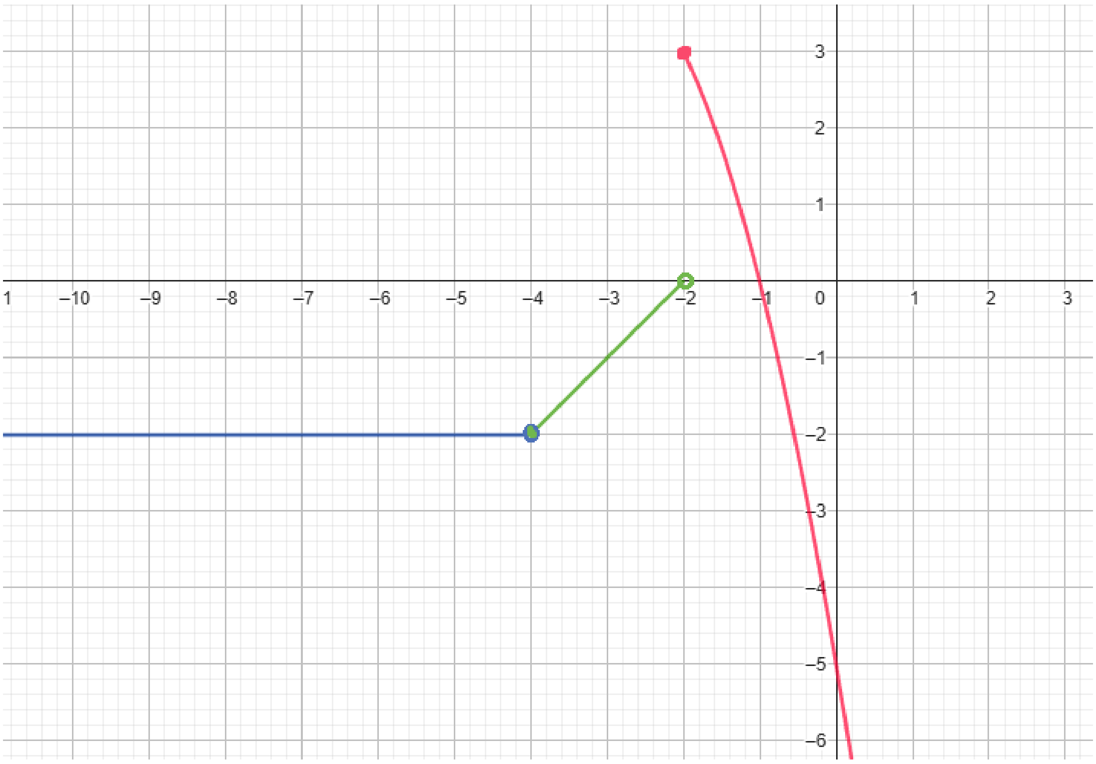
- Posee un eje de simetría en x = -3
- Calculamos la tabla de valores alrededor del vértice:
  En la tabla de valores debe incluir el punto donde empieza y acaba la función $(x \geq -2)$ por lo tanto el punto x = -2 debe estar incluido porque es donde empieza la función.

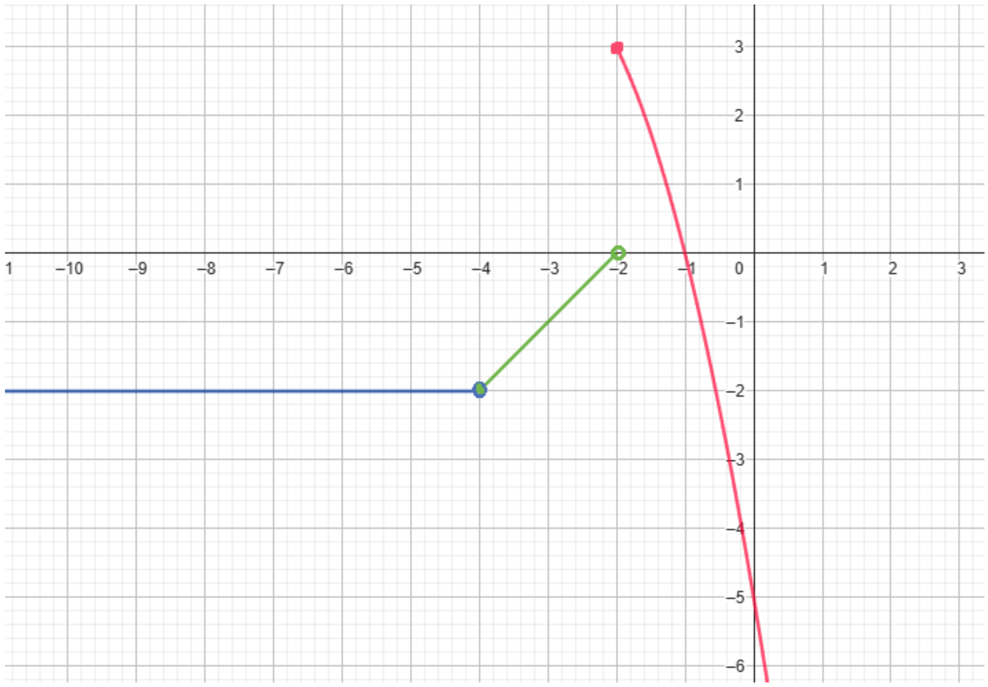
X	Y
-4	3
-3	4
-2	3
-1	0



La representación de la función cuadrática (parábola) si no estuviera definida a trozos sería esta, pero como está definida a partir de x≥ -2, la dibujaremos a partir de ese punto.(está dibujada en rojo) el punto x= -2 está incluido porque tenemos el signo igual .

Ahora representaremos toda la función definida a trozos, para ello debemos unir las tres gráficas:





Una vez representada, vamos a contestar a las siguientes preguntas:

a) ¿Es continua la función? Si es discontinua indica el punto de discontinuidad.
b) Una vez representadas calcula su dominio y su recorrido.
c) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Calcula si los tienen sus máximos y mínimos.
e) Comportamiento de la función en el ∞ y -∞.

a) La función es discontinua en x= -2 (Discontinuidad Inevitable de salto finito)

b) D(f) = ℝ , Im(f) = (-∞, 3] (debemos expresar con un corchete “[,]” cuando el punto está incluido y con un paréntesis “( )” cuando el punto no está incluido)

c) Crecimiento → $(-4, -2)$ (debemos expresar los intervalos del valor x donde la función crece)

Decrecimiento → $(-2, \infty)$ (debemos expresar los intervalos del valor x donde la función decrece)

Continua→ $(-\infty, -4)$ (debemos expresar los intervalos del valor x donde la función sea continua)

d) No hay ni máximos ni mínimos (debemos expresar la coordenada, es decir los valores (x,y) si tuviésemos un extremo relativo.

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$

(Debemos observar el valor de la función, es decir el valor de la variable y cuando nos alejamos en x al $-\infty$)

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

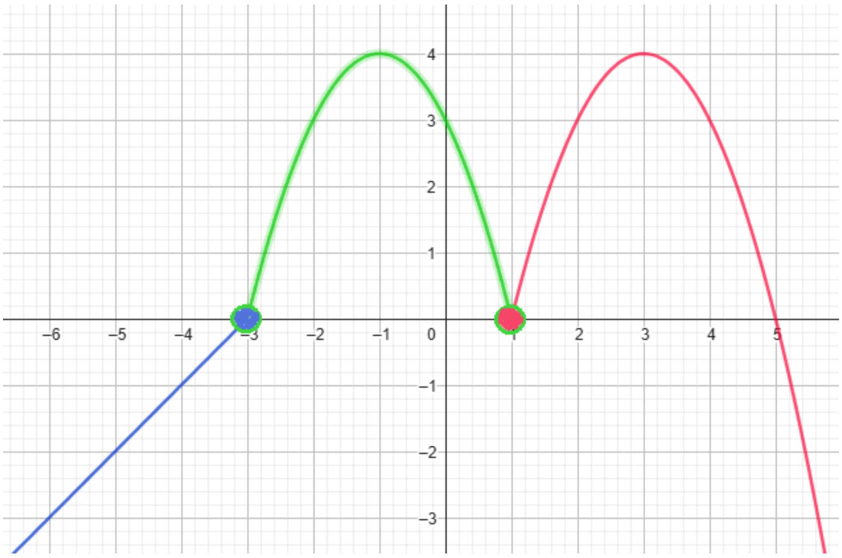
(Debemos observar el valor de la función, es decir el valor de la variable y cuando nos alejamos en x al ∞)

Ejemplo 2: f(x) = $\begin{cases} x+3 & x \leq -3 \\ -x^2-2x+3 & -3 < x < 1 \\ -x^2+6x-5 & x \geq 1 \end{cases}$

Dada la siguiente función definida a trozos:

a) Representa gráficamente cada una de las funciones.
b) ¿Es continua la función? Si es discontinua indica el punto de discontinuidad.
c) Una vez representadas calcula su dominio y su recorrido.
d) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e) Calcula si los tienen sus máximos y mínimos.
f) Comportamiento de la función en el ∞ y -∞.

a)



b) La función es continua en todo su dominio.

c) D(f) = ℝ , Im(f) = (-∞, 4]

d) Crecimiento : (-∞,, -1)U$(1,3)$

Decrecimiento : $(-1,1)$U$(3,\infty)$

Constante: no hay

e) Máximo: (-1,4) y (3,4)

Mínimo: (1,0)

f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

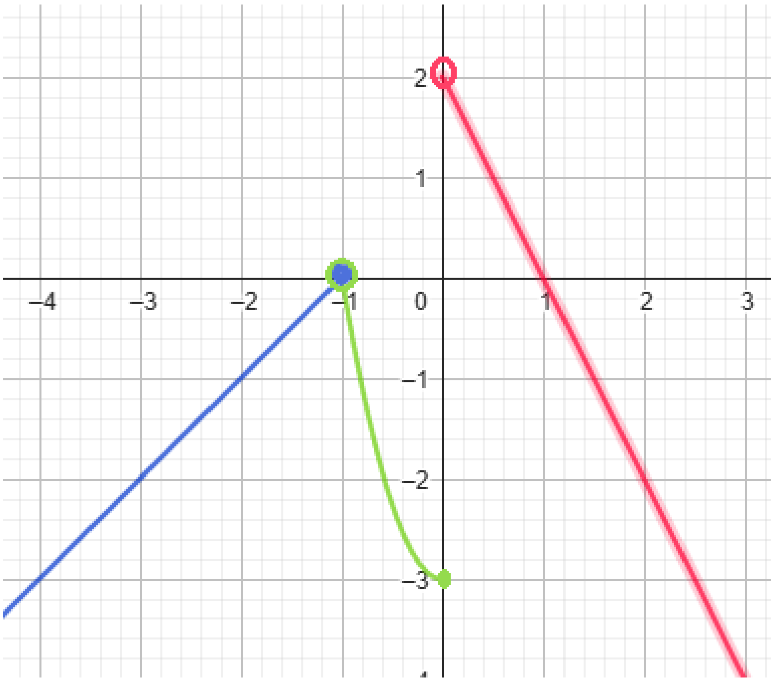
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Ejemplo 3: $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ 3x^2 - 3 & -1 < x \leq 0 \\ -2x+2 & x > 0 \end{cases}$

Dada la siguiente función definida a trozos:

a) Representa gráficamente cada una de las funciones.
b) ¿Es continua la función? Si es discontinua indica el punto de discontinuidad.
c) Una vez representadas calcula su dominio y su recorrido.
d) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e) Calcula si los tienen sus máximos y mínimos.
f) Comportamiento de la función en el ∞ y -∞.

a)



b) La función es discontinua en x=0 (Discontinuidad Inevitable de salto finito)

c) D(f) = ℝ , Im(f) = $(-\infty, 2)$

d) Crecimiento : $(-\infty, -1)$

Decrecimiento : $(-1,0)U(0,\infty)$

Constante: No hay

e) Máximo: (-1,0)

Mínimo: No hay

f) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

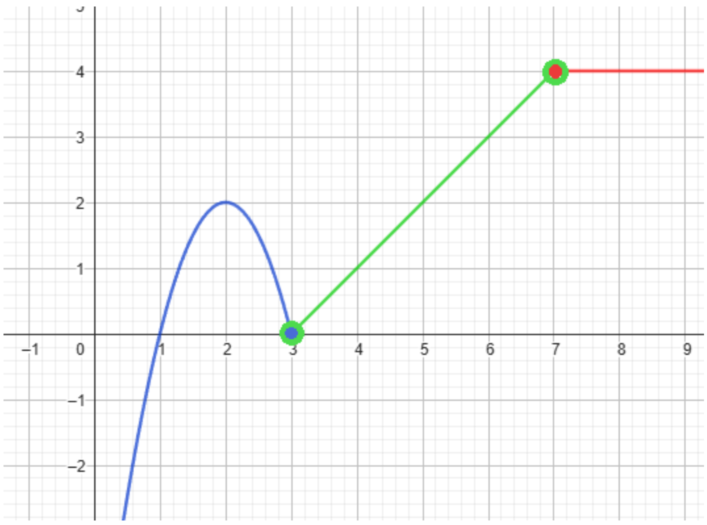
$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

Ejemplo 4: $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 8x - 6 & x \leq 3 \\ x - 3 & 3 < x < 7 \\ 4 & x \geq 7 \end{cases}$

Dada la siguiente función definida a trozos:

a) Representa gráficamente cada una de las funciones.
b) ¿Es continua la función? Si es discontinua indica el punto de discontinuidad.
c) Una vez representadas calcula su dominio y su recorrido.
d) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e) Calcula si los tienen sus máximos y mínimos.
f) Comportamiento de la función en el ∞ y -∞.

a)



b) La función es continua en todo su dominio.

c) $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = (-\infty, 4]$

d) Crecimiento : $(-\infty, 2) \cup (3,7)$

Decrecimiento : $(2,3)$

Constante: $(7, \infty)$

e) Máximo: (2,2)

Mínimo: (3,0)

f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

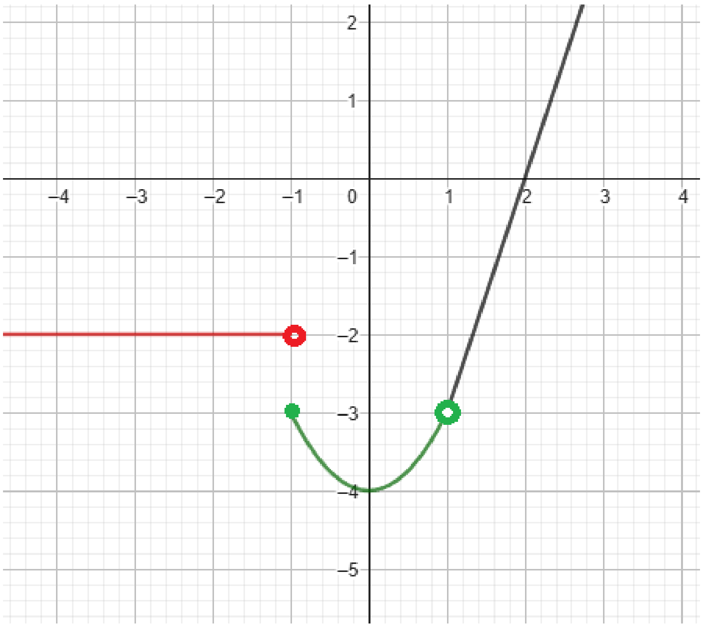
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$

Ejemplo 5: $f(x) = \begin{cases} -2 & x < -1 \\ x^2 - 4 & -1 \leq x < 1 \\ 3x - 6 & x > 1 \end{cases}$

Dada la siguiente función definida a trozos:

a) Representa gráficamente cada una de las funciones.
b) ¿Es continua la función? Si es discontinua indica el punto de discontinuidad.
c) Una vez representadas calcula su dominio y su recorrido.
d) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e) Calcula si los tienen sus máximos y mínimos.
f) Comportamiento de la función en el ∞ y -∞.

a)



b) La función es discontinua en x =-1 (Discontinuidad Inevitable de salto Finito) y en x =1 (Discontinuidad Evitable)

c) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, Im(f) = [-4,∞)

d) Crecimiento : $(0, 1) \cup (1, \infty)$

Decrecimiento : $(-1,0)$

Constante: (-∞, -1)

e) Máximo: No hay

Mínimo: (0,-4)

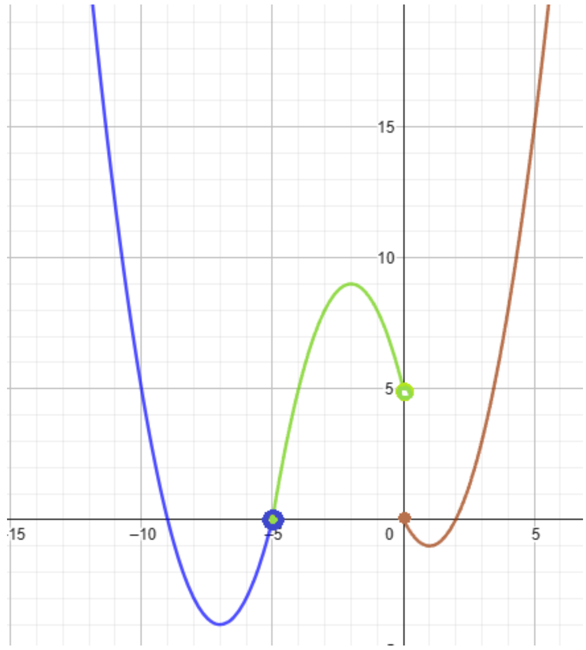
f) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Ejemplo 6: Dada la siguiente función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 14x + 45 & x < -5 \\ -x^2 - 4x + 5 & -5 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x & x \geq 0 \end{cases}$

a) Representa gráficamente cada una de las funciones.
b) ¿Es continua la función? Si es discontinua indica el punto de discontinuidad.
c) Una vez representadas calcula su dominio y su recorrido.
d) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e) Calcula si los tienen sus máximos y mínimos.
f) Comportamiento de la función en el ∞ y -∞.

a)



b) La función presenta una discontinuidad en x=0 (Discontinuidad Inevitable de salto Finito)

c) D(f) = ℝ , Im(f) = [-4,∞)

d) Crecimiento : $(-7, -2) \cup (1, \infty)$

Decrecimiento: $(-\infty, -7) \cup (-2,0) \cup (0,1)$

Constante: No hay

e) Máximo: (-2,9)

Mínimo: Tenemos dos mínimos (-7,-4) y (1,-1)

f) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Ejemplo 7: Dada la siguiente función: $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} (x-4)^2 - 4 \; si \; x \le 6 \\ 16 - (x-10)^2 \; si \; x > 6 \end{cases} \rightarrow \mathbf{f(x)} = \begin{cases} x^2 - 8x + 12 & si \; x \le 6 \\ -x^2 + 20x - 84 & si \; x > 6 \end{cases}$

a) Representa gráficamente cada una de las funciones.
b) ¿Es continua la función? Si es discontinua indica el punto de discontinuidad.
c) Una vez representadas calcula su dominio y su recorrido.
d) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e) Calcula si los tienen sus máximos y mínimos.
f) Comportamiento de la función en el ∞ y -∞.

a) Representación de la función definida a trozos

Puntos de corte con los ejes:

- La función dada es f(x) = x^2 -8x +12

Corte con el eje 0X (y = 0): x^2 - 2x +12 = 0 $\rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 6 \end{cases}$ Puntos (2, 0) y (6, 0)

Corte con el eje 0Y (x = 0): f(0)= $0^2 - 2 \cdot 0 + 12 = 12 \rightarrow$ Punto (0, 12)

- La función dada es f(x) = $-x^2$ +20x -84

Corte con el eje 0X (y = 0): $-x^2$ +20x -84 = 0 $\rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 14 \end{cases}$ Puntos (6, 0) y (14, 0)

Corte con el eje 0Y(x=0): f(0)= $0^2 - 20 \cdot 0 - 84 = -84$ Punto (0, -84)

Monotonía

- f(x) = x^2 -8x +12 (Azul)

Derivando e igualando a 0: f´(x)= 2x -8 = 0 → x = 4

	$(-\infty, 4)$	$(4, \infty)$
Signo de f´(x)	-	+
Comportamiento de f(x)	↘	↗

Crecimiento: $(4, \infty)$ Decrecimiento: $(-\infty, 4)$

Máximo: no hay Mínimo: $(4, -4)$

- f(x) = - x^2 +20x -84 (Verde)

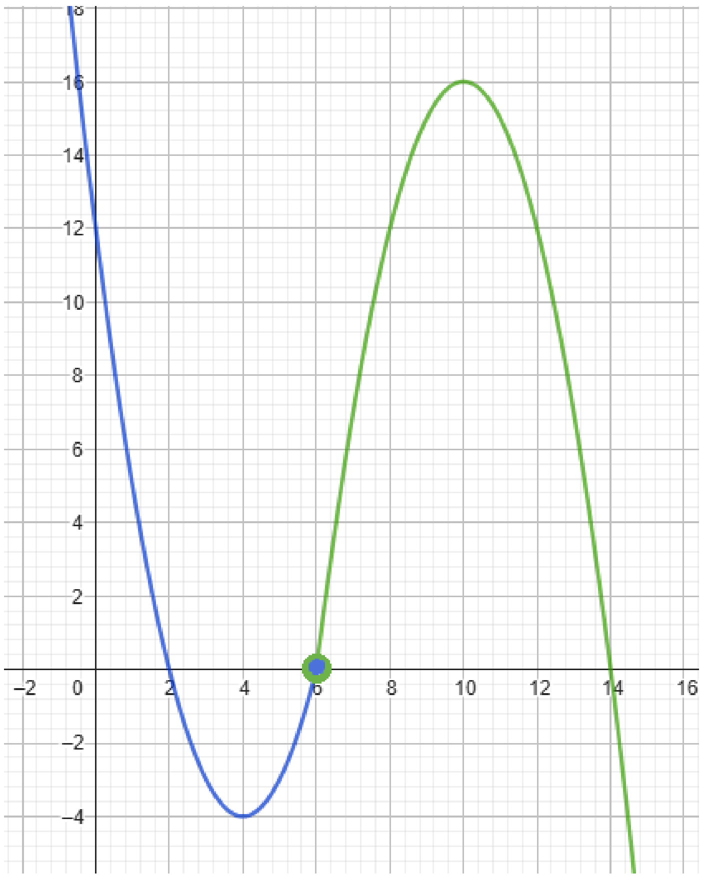
Derivando e igualando a 0: f´(x)= -2x +20 = 0 → x = 10

	$(-\infty, 10)$	$(10, \infty)$
Signo de f´(x)	+	-
Comportamiento de f(x)	↗	↘

Crecimiento: $(-\infty, 10)$ Decrecimiento: $(10, \infty)$

Máximo: (10,16) Mínimo: no hay

Representación de la función definida a trozos



b) La función es continua en todo su dominio

c) D(f) = ℝ , Im(f) = ℝ

d) Crecimiento : $(4, 10)$

Decrecimiento : $(-\infty, 4)\mathrm{U}(10, \infty)$

Constante: No hay

e) Máximo: (10,16)

Mínimo: (4,-4)

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$