SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Calcula los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} 3x-2y+z=-17 \\ -5x+2y-4z=-17 \\ 4x+y-5z=17 \end{cases}$

Resolvemos el sistema de Ecuaciones

<u>1er Método: Lo resolvemos también por el método de Gauss:</u>

$$A^*=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -17 \\ -5 & 2 & -4 & -17 \\ 4 & 1 & -5 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to 3F_3-4F_1]{F_2\to 3F_2+5F_1} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -17 \\ 0 & -4 & -7 & -136 \\ 0 & 11 & -19 & 119 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to 4F_3+11F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -17 \\ 0 & -4 & -7 & -136 \\ 0 & 0 & -153 & -1020 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -153z=-1020 \to z=\frac{1020}{153}=\frac{20}{3} \\ -4y-7\cdot\left(\frac{20}{3}\right)=-136 \to -4y=\frac{-268}{3} \to y=\frac{268}{12}=\frac{67}{3} \\ 3x-2\cdot\frac{67}{3}+\frac{20}{3}=-17 \to 3x=21 \to x=\frac{21}{3}=7 \end{cases} \to \begin{cases} Solución \\ x=7 \\ y=\frac{67}{3} \\ z=\frac{20}{3} \end{cases}$$

<u>2º Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:</u>

Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -17 \\ -5 & 2 & -4 & -17 \\ 4 & 1 & -5 & 17 \end{pmatrix}$

Calculamos $|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$ = -30-5+32-8+50+12=51 ≠0 → rg(A)=3

Tenemos rg(A) = rg(A*) = nº Incógnitas = 3 → Sistema Compatible Determinado (S.C.D) Tiene una única solución.

Aplicamos Cramer:

$$X=\frac{\begin{vmatrix} -17 & -2 & 1 \\ -17 & 2 & -4 \\ 17 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{357}{51}=7 \qquad Y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -17 & 1 \\ -5 & -17 & -4 \\ 4 & 17 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{1139}{51}=\frac{67}{3} \qquad Z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -17 \\ -5 & 2 & -17 \\ 4 & 1 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{340}{51}=\frac{20}{3}$$

$$\begin{cases} Solución \\ x=7 \\ y=\frac{67}{3} \\ z=\frac{20}{3} \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases}$

Resolvemos el sistema de Ecuaciones

<u>1er Método: Lo resolvemos también por el método de Gauss:</u>

$$A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3-5F_1]{F_2 \to F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & -8 & 10 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \to$$

Es un Sistema Incompatible (No tiene solución)

<u>2º Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:</u>

Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ y $A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \end{vmatrix}$= 10-18+10-30+30-2=0 → rg(A)<3

Como $|A|$ =0 y, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$= -2-6=-8≠0 → rg(A*)=2

Por otra parte calculamos el rg(A*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = -2+18+70+30-6-14≠0 → rg(A*)=3

Como rg(A) ≠ rg(A*) → El sistema es Incompatible, no tiene solución.

3) $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases}$

<u>1er Método: Lo resolvemos también por el método de Gauss:</u>

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & 9 & -6 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3-4F_1]{F_2 \to F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Quedan dos filas y el sistema tiene tres incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible Indeterminado.

Haciendo z=λ, las infinitas soluciones son:

$$\begin{cases} z=\lambda \\ y+2z=2 \to y=2-2\lambda \\ x+2y-2z=4 \to x=4+2\lambda-4+4\lambda=6\lambda \end{cases} \to \begin{cases} x=6\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \forall\lambda\epsilon\mathbb{R}$$

<u>2º Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:</u>

Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & 9 & -6 & 18 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A: $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -6 \end{vmatrix}$ = -30-36-16+40+24+18= 0 → rg(A) < 3

Como $|A|$ =0 y, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ = 5- 4=1≠0 → rg(A)=2

Por otra parte calculamos el rango de A* rg (A*)→ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \\ 4 & 9 & 18 \end{vmatrix}$ = 90+72+80-80-72-90=0 → rg(A*)=2

Como rg(A) = rg(A*) < nº de incógnitas → Tenemos un sistema compatible Indeterminado (S.C.I) (tenemos Infinitas soluciones que podemos calcular aplicando la regla de Cramer)

- Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A) = 2. Las ecuaciones que no intervienen se pasan al segundo miembro con valor de parámetro.

$$\begin{cases} \boxed{x+2y}-2z=4 \\ \boxed{2x+5y}-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases} \to Z=\lambda\ , \begin{cases} x+2y=4+2\lambda \\ 2x+5y=10+2\lambda \end{cases}$$

- Se aplica la regla de Cramer al sistema resultante:

$$X=\frac{\begin{vmatrix} 4+2\lambda & 2 \\ 10+2\lambda & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{20+10\lambda-20-4\lambda}{1}=6\lambda \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+2\lambda \\ 2 & 10+2\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}=2-2\lambda \to \begin{cases} x=6\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \forall\lambda\epsilon\mathbb{R}$$

4) $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2z = 2} \\ \boldsymbol{y + 2z = 2} \\ \boldsymbol{2x + 2y + 4z = 3} \end{cases}$

<u>1er Método: Lo resolvemos también por el método de Gauss:</u>

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 2F_3 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 3 \rightarrow x = \frac{-1}{2} \\ y + 2z = 2 \rightarrow z = \frac{5}{4} \\ -2y = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{-1}{2} \\ z = \frac{5}{4} \end{cases}$

<u>2º Método: Vamos a resolverlo por la regla de Cramer:</u>

Las matrices del sistema son A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y A*= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A (Matriz de los coeficientes)

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ = 4-4-4 =-4≠0 → El rango de A rg(A) = 3

Como máximo el rg(A*) puede ser tres, por lo tanto rg(A*)=3

Como rg(A) = rg(A*)= 3 = nº de incógnitas → El sistema es Compatible Determinado (Una única solución)

Aplicamos Cramer:

$X=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$ $y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$ $Z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$

Solución: $\begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{-1}{2} \\ z = \frac{5}{4} \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 3 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$

Las matrices del sistema $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Vemos que como máximo el rg(A) puede ser 2 y el rg(A*)=3

Calculamos el rango de la matriz ampliada:

$|A^*|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ = 5+12+3+3+10-6≠0 → rg(A*)=3

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$ → rg (A) = 2

Como rg(A)=2 y rg(A*)= 3→ rg(A) ≠ rg(A*) → El Sistema es Incompatible (S.I) (No tiene solución)

6) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$

Las matrices del sistema: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Vemos que como máximo el rg(A) puede ser 2 y el rg(A*)=3

$|A^*|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ = -4+12+3+3-8-6=0 → rg(A*) < 3 Tomamos una menor de orden 2

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$= 1+2 = 3 → rg(A)=2=rg(A*)

Como el rg(A) =2= rg(A*) = nº de Incógnitas → El Sistema es Compatible Determinado (S.C.D) →Tiene Una única solución

Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2

$\begin{cases} \boxed{x - y} = 3 \\ \boxed{2x + y} = 3 \\ -x + 2y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ Aplicamos Cramer:

$X=\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{6}{3} = 2$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{3-6}{3} = -1 \rightarrow \begin{cases} \text{Solución} \\ x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

SISTEMAS CON UN PARÁMETRO

7) Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x - y + 3z = -14} \\ \boldsymbol{3x - y - z = -4} \\ \boldsymbol{4x - y - 5z = a} \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 & a \end{pmatrix}$$

En este caso, el máximo rango que pueden tener ambas matrices es 3.

Calculamos el rango de A: $|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rg}(A) < 3$

Tomamos una menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$=-2+3=1≠0 → rg(A) =2

Calculamos El rango de A*: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -14 \\ 3 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & a \end{vmatrix}$= -2a+42+16-56+3a-8 = a-6 =0 → a=6

Por tanto hay que distinguir dos casos:

Caso I : Cuando a ≠ 6

Tenemos que rg(A) ≠ rg(A*) ya que rg(A) = 2 y rg(A*) = 3 → por lo tanto el sistema es incompatible

Caso II Cuando a =6

Se cumple que rg(A) = rg(A*)=2<nº de incógnitas → Tenemos un sistema compatible Indeterminado.

Calculamos las soluciones

Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2. Las ecuaciones que no intervienen se pasan al segundo miembro con valor de parámetro.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ 4x - y - 5z = 6 \end{cases} \rightarrow Z=\lambda, \begin{cases} 2x - y = -14 - 3\lambda \\ 3x - y = -4 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = 10 + 4\lambda \\ y = 34 + 11\lambda \\ z = \lambda \end{matrix} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

8) $\begin{cases} \boldsymbol{x + ay + z = 2} \\ \boldsymbol{-x + ay - z = 0} \\ \boldsymbol{ax + y + z = 2a} \end{cases}$

Las matrices de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema son:

A=$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A*= $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 2a \end{pmatrix}$

En este caso, el máximo rango que tener ambas matrices es 3, por lo que conviene empezar calculando el

Determinante de A y hallando para qué valores de a es distinto de 0, ya que el rg(A) = 3

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = a-1-a^2-a2+a+1=0 → -2a^2+2a =0 → a(-2a+2)=0 → a=0 y a=1

Caso I si a=0

A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A*=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rg(A), como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ≠0 y $|A|$=0 → El rg(A)=2

Calculamos el rg(A*)

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$=-2≠0 → rg(A*)=3 Como rg(A)≠rg(A*) → Sistema Incompatible

Caso II si a=1

A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A*=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos el rg(A) como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$≠0 y como $|A|$=0 → El rg(A)=2

Calculamos el rg(A*) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$=- 2-2-2+2=0 → rg(A*)=2 → rg(A) = rg(A*) = 2 < nº de incógnitas →

Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones)

- Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2. Las ecuaciones que no intervienen se pasan al segundo miembro con valor de parámetro.

$$\begin{cases} \boxed{x+y} + z = 2 \\ \boxed{-x+y} - z = 0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \rightarrow Z=\lambda,\ \begin{cases} x+y=2-\lambda \\ -x+y=\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

Caso III Si a≠0 y a≠1

rg(A) = rg(A*) =3 = nº de incógnitas → El sistema es Compatible Determinado (Una única solución)

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 2a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1+2a}{a} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ a & 2a & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1}{a} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & a & 0 \\ a & 1 & 2a \end{vmatrix}}{|A|}= -\frac{a+1}{a}$$

Aunque la solución depende de a, es única.

9) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=-1} \\ \boldsymbol{ax+y+z=-a^2} \\ \boldsymbol{a^2x+ay+z=-a^3} \end{cases}$

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema son:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$ y A*= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & -a^2 \\ a^2 & a & 1 & -a^3 \end{pmatrix}$

En este caso, el máximo rango que tener ambas matrices es 3, por lo que conviene empezar calculando el determinante de A y hallando para qué valores de a es distinto de 0, ya que el rg(A) = 3

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$ = $1+a^2+a^2-a^2-a-a = a^2-2a+1 = 0 \rightarrow a=1$

Caso I Si a = 1

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A*= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Vemos que ambas matrices las filas como las columnas son proporcionales entre sí, por lo tanto

rg(A) = rg(A*) = 1 <nº de incógnitas→ Tendremos un sistema compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

Para saber el número de parámetros: Nº parámetros = nº incógnitas – rango = 3 -1 = 2

$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x+y+z=-1 \\ x+y+z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} z=\lambda \\ y=\mu \\ x+y+z=-1 \rightarrow x=-1-\lambda-\mu \end{array} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Caso II Si a≠1

En este caso rg(A) = rg(A*)=3 =nº Incógnitas → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (Una única solución)

$X=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -a^2 & 1 & 1 \\ -a^3 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -a-1$ $\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -a^2 & 1 \\ a^2 & -a^3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = a$ $\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & -a^2 \\ a^2 & a & -a^3 \end{vmatrix}}{|A|} = 0$

Solución: $\begin{cases} x = -a-1 \\ y = a \\ z = 0 \end{cases}$

$$\textbf{10)}\begin{cases} \boldsymbol{x+2y-z=5} \\ \boldsymbol{-2x+3y+4z=6} \\ \boldsymbol{(a-3)x+12y+(a+3)z=27} \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ a-3 & 12 & a+3 \end{pmatrix} \qquad y \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ a-3 & 12 & a+3 & 27 \end{pmatrix}$$

En este caso, el máximo rango que tener ambas matrices es 3, por lo que conviene empezar calculando el

Determinante de A y hallando para qué valores de a es distinto de 0, ya que el rg(A)=3

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ a-3 & 12 & a+3 \end{vmatrix} = 3a+9+24+8a-24+3a-9+4a+12-48= 18a- 36=0 \rightarrow a=2$$

Caso I Cuando a=2

$$|A|=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 12 & 5 \end{pmatrix} \qquad y \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ -1 & 12 & 5 & 27 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$=3+4=7≠0 y $|A|$=0 → El rg(A) =2

Calculamos el rg(A*) → $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \\ -1 & 12 & 27 \end{vmatrix}$ = 81-120-12+15+108-72=0 → rg(A*)=2

Como rg(A) = rg(A*)< nº de incógnitas → El sistema es S.C.I (Sistema Compatible Indeterminado) , tiene

Infinitas soluciones. El número de parámetros = nº de incógnitas- rango =3-2 = 1

- Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2. Las ecuaciones que no intervienen se pasan al segundo miembro con valor de parámetro.

$$z=\lambda, \begin{cases} x+2y=5+\lambda \\ -2x+3y=6-4\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{23+11\lambda}{7} \\ y=\frac{6-2\lambda}{7} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Caso II : Cuando a ≠2

El rg(A) = rg(A*) = nº de incógnitas → El sistema es Compatible Determinado (S.C.D) (solución única)

$$X=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 27 & 12 & a+3 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1}{6} \qquad Y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & 6 & 4 \\ a-3 & 27 & a+3 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{7}{3} \qquad Z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \\ a-3 & 12 & 27 \end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{1}{6}$$

11) Determinar, según los valores del parámetro a, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \\ 6x - 4y = a \end{cases}$$

Resolverlo para los valores de a que lo hacen compatible.

Las matrices de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema son:

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ A*= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & a \end{pmatrix}$

Como máximo la matriz de los coeficientes tendrá rg(A)=2 ya que las dimensiones son 3x2, y cómo

Máximo la matriz ampliada tendrá rg(A*)=3

Calculamos el determinante de la matriz ampliada y lo igualamos a 0.

$|A^*|=$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & a \end{vmatrix}$ = 3a-24-6-54+2a+4= 0 → 5a-80=0 → a=$\frac{80}{5} = 16$

<u>Caso I: Cuando a= 16</u>

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ A*= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & 16 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$=3+2=5≠0 y $|A^*|$=0 → rg(A) = rg(A*) = 2= nº de incógnitas (S.C.D) (Una única solución)

Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \\ 6x - 4y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

<u>Caso II: Cuando a≠16</u>

Rg(A)=2 ≠ Rg(A*)=3 → Sistema Incompatible (S.I) → No tiene solución

12) Determinar, según los valores del parámetro a, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} x + ay = 0 \\ 2x + 4y = 1 \\ x + 2y = 1/2 \end{cases}$$

b) Resolverlo para a = 3.

El sistema es lineal y tiene 3 ecuaciones con 2 incógnitas, con matriz de coeficientes y ampliada

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

El determinante de A* es: $|A^{*}| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1/2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rg}(A^{*}) < 3$

(Podría observarse que la tercera ecuación es la mitad de la segunda).

Calculamos un menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, se tiene que rg(A*) = 2.

Para calcular el rango de A observemos que el menor $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2a = 0$ → a = 2.

Por tanto:

Caso I: Si a ≠ 2

rg(A) = rg(A*) = 2 = nº de incógnitas. En este caso, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Caso I: Si a = 2

Si a = 2, se tiene A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y es evidente que rg(A) = 1, ya que la segunda columna es el doble que la primera. Por tanto rg(A) ≠ rg(A*), y en este caso el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

c) Según el apartado anterior, si a = 3, el sistema tiene solución única.

Suprimiendo la última ecuación (que es la mitad de la segunda), el sistema queda

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

13) Determinar, según los valores del parámetro a, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-4y=-a \\ 4x+10y=a^2 \end{cases}$$

Resolverlo para los valores de a que lo hacen compatible.

a) Se trata de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas.

Para que tenga solución única es necesario que rg(A) = rg(A*) = 2, siendo A la matriz de coeficientes y A* la matriz ampliada. Si rg(A*) = 3, el sistema será incompatible.

Las matrices son: $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \boldsymbol{-a} \\ \mathbf{4} & \mathbf{10} & \boldsymbol{a^2} \end{pmatrix}$ y A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$

El determinante de A* vale:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -a \\ 4 & 10 & a^2 \end{vmatrix} = -4a^2+10a-(2a^2+4a)+20+16 = -6a^2+6a+36 = -6(a+2)(a-3)$$

Este determinante vale 0 si a = −2 o a = 3.

Por tanto:

- Si a ≠ −2 y a≠ 3 → rg(A*) = 3≠ rg(A)=2 El sistema será incompatible.
- Si a = −2 o a = 3→ rg(A) = rg(A*) = 2. El sistema será compatible determinado.

b) Si a = −2 el sistema es: $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-4y=2 \\ 4x+10y=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-4y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Si a = −3 el sistema es: $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-4y=-3 \\ 4x+10y=9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-4y=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1/6 \\ y=5/6 \end{cases}$

14) Consideramos las matrices M=$\begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 3 & -2b & -2c \\ 5a & -2 & c \end{pmatrix}$ y N=$\begin{pmatrix} 3c \\ a \\ -4b \end{pmatrix}$

a) Determina los valores a,b y c para que se verifique la igualdad M·$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ = N

b) Estudia el carácter del sistema de ecuaciones lineales M·$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$=N cuando a=0, b=-1 y c=2

a) $\begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 3 & -2b & -2c \\ 5a & -2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c \\ a \\ -4b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ a + 4b + 6c = 3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases}$

A*=$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 5F_1 - 2F_3]{F_2 \to 2F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 15 & 9 \\ 0 & 2 & -21 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 3F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 15 & 9 \\ 0 & 0 & -78 & -78 \end{array}\right)$ –>

$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -3 \rightarrow 2x = -3 + 3 + 2 \rightarrow x = 1 \\ 6y + 15z = 9 \rightarrow 6y = 9 - 15 \rightarrow y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -y + z = 6 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 0 \\ -y + z = 6 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases}$

A*=$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$

El sistema es Incompatible (S.I) No tiene Solución.

15) Calcula los valores del parámetro k para los cuales la matriz A tiene inversa.

A= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$

a) Analiza el rango de A según los valores del parámetro k.

b) Tomando como referencia exclusivamente los resultados obtenidos en el apartado a), ¿ se puede determinar algún valor de k para el cual el sistema tiene solución? En caso afirmativo, indica si la solución es única o no, y resuelve el sistema

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+4y=-1 \\ -2x+3y=k \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & k \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz ampliada A* y lo igualamos a cero.

$$|A^*|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & k \end{vmatrix}= 4k+27+4+24-6k+3=0 \rightarrow -2k+58=0 \rightarrow k=29$$

Sólo existirá matriz inversa si k≠29

a) <u>Caso I: Cuando k= 29</u>

Como $|A^*|=0 \rightarrow \text{rg}(A^*)<3$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = 4-6 = -2≠0 y como $|A|$=0 → rg(A*) = 2

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes A : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = 4-6 = -2≠0 → rg(A) = 2

Como el rg (A) = rg(A*) = nº de incógnitas = 2 → Sistema Compatible Determinado (Una única solución)

Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2.

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+4y=-1 \\ -2x+3y=k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+4y=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=5 \end{cases}$$

b) <u>Caso II: Cuando k≠ 29</u>

Como $|A^*|\neq 0$ → rg(A*) = 3

Las matrices de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema son:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y A* = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & k \end{pmatrix}$ Como máximo el rg(A)=2 y rg(A*)=3

Como rg(A*)=3 ≠ rg(A)=2 → Sistema Incompatible (no tiene solución)

16) Estudia el siguiente sistema según los valores del parámetro a y resuélvelo en los casos en que sea posible.

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax+y+z=1} \\ \boldsymbol{x+ay+z=a} \\ \boldsymbol{x+y+az=a^2-2a+2} \end{cases}$$

Las matrices de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema son:

A= $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y A*= $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2-2a+2 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ = a^3+1+1-a-a-a= a^3-3a+2=0 → $\begin{cases} a=-2 \\ a=1\ (doble) \end{cases}$

a) <u>Caso I Cuando a= -2</u>

Calculamos el rg(A)

Como $|A| = 0$ → el rg(A) <3

Calculamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$=4-1=3≠0 → rg(A)=2

Calculamos el rg(A*)

$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix}$= 40+1-2+2-10-4≠0 → rg(A*)=3

Como rg(A) ≠ rg(A*) → Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) <u>Caso II Cuando a=1</u>

Calculamos el rg(A)

Como A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Las filas son proporcionales por lo que rg(A) = 1 = rg(A*) <nºde incógnitas → El sistema es Compatible Indeterminado (S.C.I) (Infinitas soluciones)

Nº de parámetros= nº de incógnitas- rango =3-1= 2

$$\begin{cases} x = 1-\mu-\lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

c) **<u>Caso III Cuando a≠1 y a≠-2</u>**

Tenemos que rg(A) = rg(A*) = 3 = nº de incógnitas → Sistema Compatible Determinado)

$$X=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2-2a+2 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a^2+a+a^2-2a+2-a^3+2a^2-2a-a^2-1}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{-a^3+3a^2-3a+1}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{-(a-1)^3}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{1-a}{a+2}$$

$$Y=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2a+2 & a \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a^3+a^2-2a+2+1-a-a-a^3+2a^2-2a}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{3a^2-6a+3}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{3\cdot(a-1)^2}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{3}{a+2}$$

$$Z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2-2a+2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a^4-2a^3+2a^2+1+a-a-a^2+2a-2-a^2}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{a^4-2a^3+2a-1}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{(a-1)^3(a+1)}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{a^2-1}{a+2}$$

17) (EBAU Cantabria Junio 2019) Determinar, según los valores del parámetro a, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución. Resolver los casos compatibles.

$$\begin{cases} -x+4y=6 \\ 2x+3y=5a/2 \\ 5x+2y=a^2 \end{cases}$$

Calculamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5a/2 \\ 5 & 2 & a^2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz cuadrada, en este caso la matriz ampliada:

$$|A^*|=\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5a/2 \\ 5 & 2 & a^2 \end{vmatrix}=-3a^2+24+50a-90-8a^2+5a=-11a^2+55a+66$$

$$-11a^2+55a+66=0 \rightarrow -a^2+5a+6=0 \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=3 \end{cases}$$

<u>Caso I cuando a≠2 y a≠3</u>

Como $|A^*| \neq 0$ → por tanto rg(A^*) = 3

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes

El rango de la matriz A será:

$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-3-8=-11\neq 0$ → rg(A)=2

Teorema de Rouché-Fröbenius → Como rg(A*) ≠ rg(A) → Tendremos un Sistema Incompatible (S.I) (no hay solución)

Caso II cuando a= 2

Como $|A^*| = 0 \rightarrow rg(A^*) < 3$

Tomamos una menor de orden 2: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0 \rightarrow$ rg(A*)=2

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes

El rango de la matriz A será: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0 \rightarrow$ rg(A)=2

Teorema de Rouché-Fröbenius

$$\left.\begin{array}{r} rg(A^*) = 2 \\ rg(A) = 2 \\ n^{\underline{o}} \text{ de incógnitas} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Como } rg(A^*) = rg(A) = n^{\underline{o}} \text{ de incógnitas} = 2$$

Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D) (Una única solución)

Vamos a cacular el valor del sistema para a = 2

$$\begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2/11 \\ y = 17/11 \end{cases}$$

Caso III cuando a= 3

Como $|A^*| = 0 \rightarrow rg(A^*) < 3$

Tomamos una menor de orden 2: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0 \rightarrow$ rg(A*)=2

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes

El rango de la matriz A será: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0 \rightarrow$ rg(A)=2

Teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\left.\begin{array}{r} rg(A^*) = 2 \\ rg(A) = 2 \\ n^{\underline{o}} \text{ de incógnitas} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Como } rg(A^*) = rg(A) = n^{\underline{o}} \text{ de incógnitas} = 2$$

Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D) (Una única solución)

Vamos a calcular el valor del sistema para a = 2

$$\begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = 15/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 12/11 \\ y = 39/22 \end{cases}$$

18) (EBAU Cantabria 2019 Julio) Una empresa que fabrica bombillas debe satisfacer un pedido de 450 unidades que empaqueta en cajas de tamaños distintos. Hay dos modelos de cajas, A y B, en los que caben respectivamente 15 y 20 unidades. Se dispone de un total de k cajas. Además, el número de cajas del modelo A coincide con las dos terceras partes del total de cajas del modelo B. El sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el número de cajas de cada modelo a utilizar para enviar el pedido, es el siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{15x + 20y = 450} \\ \mathbf{x + y = k} \\ \mathbf{3x - 2y = 0} \end{cases}$$

Determinar, según el número total de cajas disponibles, (según los valores del parámetro k), los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución, y si esta es única o no. Resolver el sistema cuando tenga solución.

Calculamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A=\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 450 \\ 1 & 1 & \mathrm{k} \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz cuadrada, en este caso la matriz ampliada:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 15 & 20 & 450 \\ 1 & 1 & \mathrm{k} \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -900 + 60\mathrm{k} - 1350 + 30\mathrm{k} = 90\mathrm{k} - 2250 = 0 \rightarrow \mathrm{k} = 25$$

Caso I cuando k ≠25

Como $|A^*| \neq 0 \rightarrow$ por tanto $\mathrm{rg}(A^*) = 3$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes

El rango de la matriz A será: $\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 20 = -5 \neq 0 \rightarrow$ rg(A)=2

Teorema de Rouché-Fröbenius → Como $\mathrm{rg(A^*)} \neq \mathrm{rg(A)} \rightarrow$ Tendremos un Sistema Incompatible (S.I) (no hay solución)

Caso II cuando k = 25

Como $|\mathrm{A}^*| = 0 \rightarrow \mathrm{rg(A^*)} < 3$

Tomamos una menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 20 = -5 \neq 0 \rightarrow$ rg(A*)=2

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes

El rango de la matriz A será: $\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 20 = -5 \neq 0 \rightarrow$ rg(A)=2

Teorema de Rouché-Fröbenius

$$\left.\begin{array}{r} rg(A^*) = 2 \\ rg(A) = 2 \\ nº\ de\ incógnitas = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Como } rg(A^*) = rg(A) = nº\ de\ incógnitas = 2$$

Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D) (Una única solución)

Vamos a calcular el valor del sistema para k = 25

$$\begin{cases} 15x + 20y = 450 \\ x + y = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$$

La solución es 10 cajas de tipo A y 15 cajas de tipo B

19) (EBAU Cantabria Junio 2018) Analizar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & -\boldsymbol{a}^2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{3} & \boldsymbol{a} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

B. [0,5 PUNTOS] Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior, analizar si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen o no tienen solución:

B1. [0,25 PUNTOS] $\begin{cases} \mathbf{x + 2y = -1} \\ \mathbf{-3y = 1} \\ \mathbf{-2x + 2y = 4} \end{cases}$ **B2. [0,25 PUNTOS]** $\begin{cases} \mathbf{x + 2y = -4} \\ \mathbf{-3y = 2} \\ \mathbf{-2x + 2y = 4} \end{cases}$

C. [0,5 PUNTOS] Resolver los casos compatibles del apartado B.

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

El determinante de la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es $|A|$ = -12 – 4a + $6a^2$-2a = $6a^2$-6a -12

Se anula cuando $6a^2$-6a -12= 0 → $a^2 - a - 2 = 0$ → a= $\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ → $\begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$

1) Si a ≠ –1 y a≠ 2 se tendrá que rg(A) = 3, pues $|A| \neq 0$

2) Si a = -1 o a = 2 rg(A) = 2, pues el menor (de orden 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$ ≠0

B) $\begin{cases} \mathbf{x + 2y = -1} \\ \mathbf{-3y = 1} \\ \mathbf{-2x + 2y = 4} \end{cases}$

Estamos ante un sistema en el que el valor de la a = 1 y por lo tanto estaríamos en el caso de a ≠-1 y a≠ 2.

Por lo tanto el rg(A*) = 3 ≠ rg (A) = 2 → **Teorema de Rouché-Fröbenius**:

Como rg(A*) ≠ rg (A) → Se trataría de un Sistema Incompatible. El Sistema no tiene Solución.

$\begin{cases} \mathbf{x + 2y = -4} \\ \mathbf{-3y = 2} \\ \mathbf{-2x + 2y = 4} \end{cases}$ Estamos ante un sistema en el que el valor de la a = 2.

Por lo tanto el rg(A*) = 2 = rg (A) = 2 → **Teorema de Rouché-Fröbenius**:

Como rg(A*) = rg (A) = nº de incógnitas = 2 → Se trataría de un **Sistema Compatible Determinado**. (Una única solución)

Para resolver el sistema escogemos aquella menor que garantice que el rango de la matriz sea 2.

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ -3y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

20) (EBAU Cantabria Junio 2017) Una empresa elabora dos modelos de un determinado producto. Un empleado necesita dos minutos para cada unidad del primer modelo y cuatro para cada unidad del segundo. Los costes unitarios de producción de cada modelo son de 4 y 6 euros respectivamente. Por otro lado, el número de unidades del primer modelo debe ser diariamente el doble que el número de unidades del segundo modelo. El sistema de ecuaciones lineales para calcular el número de unidades de cada modelo que puede acabar un empleado en una jornada de 8 horas si se invierten k euros diarios de presupuesto, es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 480 \\ 4x + 6y = k \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Determinar, según el presupuesto disponible (según los valores del parámetro k), los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución. Resuelve los casos en los que el sistema tenga solución.

b) (0,5 puntos) Dada la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & 840 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Tiene inversa? Justifica la respuesta basándote únicamente en los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Lo primero vamos a calcular los valores de k, para ello calcularemos previamente la matriz A y la matriz A*(matriz ampliada).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & k \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular el parámetro K, debemos realizar el determinante de aquella matriz que sea cuadrada, en este caso escogeremos la matriz ampliada.

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & k \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3840 + 4k - 2880 - 0 + 4k = 6720 + 8k$$

$$|A^*| = 0 \rightarrow 6720 + 8k = 0 \rightarrow k = \frac{6720}{8} = 840$$

<u>Teorema de Rouché-Fröbenius</u>: Vamos a analizar los diferentes casos:

<u>Caso I cuando k ≠ 840</u>

Como $|A^*| \neq 0 \rightarrow \mathrm{rg}(A^*) = 3$

El rango de la matriz A será:

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 16 = -4 \neq 0 \rightarrow$ rg(A)=2

Como $\mathrm{rg}(A^*) \neq \mathrm{rg}(A) \rightarrow$ **Tendremos un Sistema Incompatible (S.I) (no hay solución)**

Caso II cuando k = 840

Como $|A^*| = 0 \rightarrow \text{rg}(A^*) < 3$

Tomamos una menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 16 = -4 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A^*)$=2

$$\left.\begin{array}{r} rg(A^*) = 2 \\ rg(\text{A}) = 2 \\ n^{\text{o}}\ de\ incógnitas = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Como rg}(\text{A}^*) = \text{rg}(\text{A}) = \text{nº de incógnitas} = 2$$

Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D) (Una única solución)

Vamos a calcular el valor del sistema para k = 840:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 480 \\ 4x + 6y = 840 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 120} \\ \boldsymbol{y = 60} \end{cases}$$

b) **Dada la siguiente matriz:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{480} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{840} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

¿Tiene inversa? Justifica la respuesta basándote únicamente en los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Como k = 840 → Observamos que dicha matriz coincide con la matriz ampliada del apartado a) . Como el determinante de esta matriz ampliada para el valor k=840 es igual a cero $(|A^*| = 0)$, la matriz del enunciado **no va a tener matriz inversa**.

21) (EBAU Cantabria Junio 2016) Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 & a^2 \\ 0 & -2 & a \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Analizar su rango según los valores del parámetro a.

b) Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -x+3y=a^2 \\ -2y=a \\ 3x+y=-2 \end{cases}$$

Basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior:

b1) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de a tenemos un sistema compatible determinado?

b2) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de a tenemos un sistema incompatible?

c) (0,5 puntos) Resolver los casos compatibles del sistema anterior.

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

El determinante de la matriz A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 & a^2 \\ 0 & -2 & a \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es $|A|$ = -(4-a) + 3· (3a+2a^2)= 6a^2+10a-4

Se anula cuando $6a^2 + 10a - 4 = 0 \rightarrow a = \frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{12} \rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a=\frac{1}{3} \end{cases}$

- Si a ≠ –2 y a≠ $\frac{1}{3}$, se tendrá que rg(A) = 3, pues $|A| \neq 0$
- Si a = –2 o a = $\frac{1}{3}$, rg(A) = 2, pues el menor (de orden 2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

b) El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -x+3y=a^2 \\ -2y=a \\ 3x+y=-2 \end{cases}$, será compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada. Si ambos rangos coinciden con el número de incógnitas, que en este caso es 2, el sistema será determinado.

La matriz de coeficientes es A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2; la ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & a^2 \\ 0 & -2 & a \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

b1) El sistema será compatible determinado cuando ambos rangos sean iguales a 2. Esto sucede, como se ha visto en el apartado A, cuando a = –2 o a = $\frac{1}{3}$

b2) Si a ≠ –2 y a ≠ $\frac{1}{3}$, como rg(A*) = 3, el sistema será incompatible.

c) Para a = –2, el sistema es:

$$\begin{cases} -x+3y=4 \\ -2y=-2 \\ 3x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3+3F_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3+5F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+3y=4 \\ -2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+3y=4 \Rightarrow x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Para a = $\frac{1}{3}$, el sistema queda:

$$\begin{cases} -x+3y=\frac{1}{9} \\ \quad -2y=\frac{1}{3} \\ 3x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & \frac{1}{9} \\ 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3+3F_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & \frac{1}{9} \\ 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 10 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3+5F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & \frac{1}{9} \\ 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+3y=\frac{1}{9} \\ -2y=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+3y=\frac{1}{9} \Rightarrow x=-\frac{11}{18} \\ y=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

22) (EBAU Cantabria 2015 Septiembre) (3 puntos) Determinar, según los valores del parámetro a, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} -x+3y=a \\ x+2y=-2 \\ 4x+3y=3a \end{cases}$$

[0,5 puntos] Resolver los casos compatibles.

Lo primero vamos a calcular los valores de a, para ello calcularemos previamente la matriz A y la matriz A*(matriz ampliada).

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} -1 & 3 & a \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 3a \end{pmatrix}$$

Para calcular el parámetro a, debemos realizar el determinante de aquella matriz que sea cuadrada, en este caso escogeremos la matriz ampliada.

$$|A^*|=\begin{vmatrix} -1 & 3 & a \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 3a \end{vmatrix}=-6a+3a-24-8a-9a-6=-20a-30$$

$$|A^*|=0 \rightarrow -20a-30=0 \rightarrow a=\frac{30}{-20}=-\frac{3}{2}$$

<u>Teorema de Rouché-Fröbenius</u>: Vamos a analizar los diferentes casos:

<u>Caso I cuando a ≠ -3/2</u>

Como $|A^*| \neq 0 \rightarrow \mathrm{rg}(A^*)=3$

El rango de la matriz A será: $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2-3=-5\neq 0 \rightarrow$ rg(A)=2

Como $\mathrm{rg}(A^*) \neq \mathrm{rg}(A) \rightarrow$ Tendremos un Sistema Incompatible (S.I) (no hay solución)

<u>Caso I cuando a = -3/2</u>

Como $|A^*|=0 \rightarrow \mathrm{rg}(A^*)<3$

Tomamos una menor de orden 2: $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2-3=-5\neq 0 \rightarrow$ rg(A*)=2

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{rg}(A^*)=2 \\ \mathrm{rg}(A)=2 \\ \text{nº de incógnitas}=2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Como } \mathrm{rg}(A^*)=\mathrm{rg}(A)=\text{nº de incógnitas}=2$$

Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D) (Una única solución)

Vamos a calcular el valor del sistema para a = $-\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} -x+3y=-\frac{3}{2} \\ x+2y=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-3/5 \\ y=-7/10 \end{cases}$$

23) Determina, según los valores del parámetro a, los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = a \\ 4x + 2y = 2a \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = a \\ 4x + 2y = 2a \end{cases}$, será compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada. Si ambos rangos coinciden con el número de incógnitas, que en este caso es 2, el sistema será determinado.

La matriz de coeficientes es A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2; la ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & a \\ 4 & 2 & 2a \end{pmatrix}$.

Empezamos realizando el determinante de aquella matriz que sea cuadrada, en este caso lo haremos con la matriz ampliada.

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & a \\ 4 & 2 & 2a \end{vmatrix} = -12a + 2 - 4a + 12 + 2a - 4a = -18a + 14 = 0 \rightarrow a = \frac{14}{18} = \mathbf{\frac{7}{9}}$$

a1) **<u>Caso I cuando a = 7/9</u>**

$|A^*| = 0 \rightarrow$ rg(A*)<3

Buscamos una menor de orden 2:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 1 = -5 \neq 0 \rightarrow$ rg(A) =rg(A*)=nº de incógnitas =2 por lo tanto estaremos ante un sistema

<u>Sistema Compatible Determinado</u> (Una única solución)

Vamos a calcular el valor del sistema para a = 7/9:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = 7/9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 4/9} \\ \boldsymbol{y = -1/9} \end{cases}$$

a2) **<u>Caso I cuando a ≠ 7/9</u>**

Como rg(A*) = 3, y el rg(A) = 2 → El sistema será <u>Sistema Incompatible</u>. (No tiene solución)

24) (EBAU Cantabria 2014 Septiembre)[1,5 PUNTOS] Analiza el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & k \end{pmatrix}$$ **según los valores de k.**

El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

El determinante de la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & k \end{pmatrix}$ es $|A|$ = -k -9 -10 +2 +15k +3 = 14k -14

Se anula cuando 14k -14 = 0 → k = 1

<u>Caso I cuando k ≠ 1</u>

Como $|A| \neq 0$ → rg (A) = 3

<u>Caso I cuando k ≠ 1</u>

Como $|A| = 0$ → rg (A) < 3

Calculamos un menor de orden 2 → $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ ≠.0 → rg(A) = 2

b) [1,5 PUNTOS] Basándote en los resultados obtenidos en el apartado A), ¿podrías afirmar si el siguiente sistema tiene solución?

$$\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x - y = -1 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x - y = -1 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Justifica las respuestas utilizando los resultados obtenidos en el apartado A).

c) [0,5 PUNTOS] En caso de existir soluciones en alguno de los dos anteriores sistemas, calcúlalas.

$\begin{cases} \boldsymbol{x - 5y = -1} \\ \boldsymbol{3x - y = -1} \\ \boldsymbol{-2x + 3y = 7} \end{cases}$ Estamos ante un sistema en el que el valor de la k = 7 y por lo tanto estaríamos en el caso de k≠1.

Por lo tanto el rg(A*) = 3 ≠ rg (A) = 2 → **<u>Teorema de Rouché-Fröbenius</u>**:

Como rg(A*) ≠ rg (A) → Se trataría de un <u>Sistema Incompatible</u>. El Sistema no tiene Solución.

$\begin{cases} \boldsymbol{x - 5y = -1} \\ \boldsymbol{3x - y = -1} \\ \boldsymbol{-2x + 3y = 1} \end{cases}$ Estamos ante un sistema en el que el valor de la k = 1.

Por lo tanto el rg(A*) = 2 = rg (A) = 2 → **<u>Teorema de Rouché-Fröbenius</u>**:

Como rg(A*) = rg (A) = nº de incógnitas = 2 → Se trataría de un **Sistema Compatible Determinado**. (Una única solución)

Para resolver el sistema escogemos aquella menor que garantice que el rango de la matriz sea 2.

$$\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = -\dfrac{2}{7} \\ y = \dfrac{1}{7} \end{cases}$$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

16) $a)\begin{cases} \mathbf{3x+3y+4z=0} \\ \mathbf{-2x+y-z=0} \\ \mathbf{2x+y+z=0} \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ =3-8-6-8+6+3=-10 → S.C.D Una única solución que es la trivial: x=0 , y=0 y z=0

$b)\begin{cases} \mathbf{x-2y+z=0} \\ \mathbf{-x+2y-3z=0} \\ \mathbf{-x+2y-5z=0} \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ = -10-2-6+2+10+6=0 → S.C.I (infinitas soluciones)

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3+F_1}{\xrightarrow{F_2 \to F_2+F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

c) $\begin{cases} \mathbf{x+y+z=0} \\ \mathbf{2x+2y+2z=0} \\ \mathbf{3x+3y+3z=0} \end{cases}$

El sistema es equivalente a $\{x+y+z=0 \to$ S.C.I

Sus infinitas soluciones se deben escribir con la ayuda de dos parámetros.

$$\begin{cases} x=-\mu-\lambda \\ y=\mu \\ z=\lambda \end{cases} \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

d) $\begin{cases} \mathbf{-x-2y+3z=0} \\ \mathbf{2x+4y-6z=0} \end{cases}$

El sistema es equivalente a $\{x+2y-3z=0 \to$ Sistema.Compatible.Indeterminado

$$\begin{cases} x=-2\lambda+3\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases} \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

e) $\begin{cases} \mathbf{2x + y - z = 0} \\ \mathbf{2x - y + z = 0} \end{cases}$

El sistema es Sistema.Compatible.Indeterminado.

Sus infinitas soluciones son: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \ \forall \lambda \epsilon \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$

f) $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 0} \\ \mathbf{-x + 4y = 0} \\ \mathbf{-2x - 3y = 0} \end{cases}$

A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ rg(A)=2 =rg(A*)= nº de incógnitas

S.C.D Una única solución que es la trivial: x = 0 y=0