CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 3

1) Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot1\cdot(-1)+1\cdot0\cdot3+(-2)\cdot0\cdot2 - [2\cdot1\cdot3+1\cdot(-2)\cdot(-1)+4\cdot0\cdot0]=-4+0+0-[6+2+0] =$

$= -4-6-2= -12$

b) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3+1\cdot0\cdot1+1\cdot0\cdot1-[1\cdot1\cdot(1-x)+1\cdot1\cdot(1-x)+0\cdot0\cdot(1-x)] =$

$= -x^3+3x^2-3x+1+0+0 - [1-x+1-x+0] = -x^3+3x^2-3x+1-1+x-1+x = -x^3+3x^2-x-1$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot1\cdot0+1\cdot3\cdot(-1)+2\cdot2\cdot(-2)-[(-1)\cdot1\cdot(-2)+2\cdot1\cdot0+2\cdot3\cdot0] = 0-3-8-2+0+0 = -13$

2) Calcula el valor de x para que el determinante sea igual a 0.

$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3x+2+3x^2-2x^2-3x-3=0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow x = \pm 1$

3) Calcula el valor de t para que el determinado sea igual a 0.

$\begin{vmatrix} 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \\ t & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \\ t & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 4t+0+t^3-0-2t-4t=0 \rightarrow t^3-2t=0 \rightarrow t(t^2-2)=0 \rightarrow \begin{cases} \text{Soluciones} \\ t=0 \\ t=+\sqrt{2} \\ t=-\sqrt{2} \end{cases}$

4) Indica si son ciertas las siguientes igualdades.

a) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a/2} & \boldsymbol{b/2} \\ \boldsymbol{2x} & \boldsymbol{2y} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{5x} & \boldsymbol{5a} \\ \boldsymbol{5y} & \boldsymbol{5b} \end{vmatrix} = \boldsymbol{5} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a/2 & b/2 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}$ → ay – xb = $\frac{a}{2} \cdot 2y - \frac{b}{2} \cdot 2x$ = ay –xb → La igualdad se cumple

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5a \\ 5y & 5b \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$ → 5x ·5b – 5a·5y = 25xb-25ay ≠ 5·[xb –ay] = 5xb – 5ay → La igualdad no se cumple

CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 4

5) Los elementos de la matriz cuadrada de orden 4. A= (aij) son : $\begin{cases} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{si\ \ i = j = 1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{si\ \ i = j \neq 1} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{si\ i \neq j} \end{cases}$

a) Escribe la matriz.
b) Calcula el determinante de la matriz.

a) A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $|A|$ = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ = -5

6) Calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \to C_1} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{\begin{matrix} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{matrix}} 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \cdot [2 + 6 + 2 + 6 + 2 - 2] = 160$$

7) Resuelve la siguiente ecuación : $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$ **= 80x – 96**

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} \underset{=}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \to C_1} \begin{vmatrix} 6+x & 1 & 2 & 3 \\ 6+x & x & 1 & 2 \\ 6+x & 3 & x & 1 \\ 6+x & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = (6+x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \\ = \end{matrix}$$

$$= (6+x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & x-2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = (6+x) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 2 & x-2 & -2 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = x^4 - 20x^2 + 80x - 96 = 80x - 96 \to$$

$$x^4 - 20x^2 = 0 \to x^2 \cdot (x^2 - 20) = 0 \to \begin{matrix} x = 0 \\ x = \sqrt{20} \\ x = -\sqrt{20} \end{matrix}$$

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR UNA FILA O COLUMNA

8) Determina el valor de los siguientes determinantes:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_3 - 3F_1 \to F_3 \\ = \\ F_4 - 4F_1 \to F_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} =$$

= 1· [-104-140-140+392+52+100] = 160

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 + F_3 \to F_3 \\ = \\ F_4 - 2F_1 \to F_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \\ -6 & -3 & -9 \end{vmatrix} =$$

= 1· [-108-12-192+24+144+72] = - 72

c) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3 - 2C_2 \to C_3 \\ = \\ C_4 - 3C_2 \to C_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & -5 \\ 3 & -3 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 2 & -5 & -5 \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix} =$$

= 1·[-120-40+60-75+96+40] = -39

d) $$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} C_1 - 5C_2 \to C_1 \\ = \\ C_4 - 6C_2 \to C_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 28 & -5 & 2 & 32 \\ -31 & 7 & 8 & -15 \\ -24 & 5 & 3 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 28 & 2 & 32 \\ -31 & 8 & -15 \\ -24 & 3 & -18 \end{vmatrix} =$$

= 1·[-4032 – 2976+720+6144-1116+1260] = 0

9) Calcula el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ = \\ F_4 - 3F_1 \to F_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot [\ 30+8-14-24] = 0$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_3 - 3F_1 \to F_3 \\ = \\ F_4 - 2F_1 \to F_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot[\ 12-9+6-27] = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3 + C_1 \to C_3 \\ = \\ C_4 - 2C_1 \to C_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot[\ -48-96-48+96+64+36] = 4$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 + 2F_1 \to F_2 \\ = \\ F_4 + 7F_1 \to F_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 0 & 13 & 23 & -9 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -5 & 10 & 4 \\ 13 & 23 & -9 \end{vmatrix}$

$= (-1)\cdot[-360-115+260-130-225-368] = 938$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

10) Si A y B son dos matrices 2x2, tales que $|A|$ =2 y $|B|$ = -3, calcula: $|AB|$ $|A^2|$ $|3A|$ $|-A|$ $|A^t|$ $|A^{-1}|$

- $|AB| \rightarrow |AB| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot (-3) = -6$

- $|A^2| = |A \cdot A| \rightarrow |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 2 \cdot 2 = 4$

- $|3A| \rightarrow$ **Aplico la propiedad $|\alpha \cdot A| = \alpha^n \cdot |A|$ siendo "n" el orden de la matriz A**

  $|3A| = 3^2 \cdot |A| = 9 \cdot 2 = 18$

- $|-A| = |(-1) \cdot A| \rightarrow |(-1) \cdot A| = (-1)^2 \cdot |A| = 1 \cdot 2 = 2$

- $|A^t| \rightarrow |A^t| = |A| = 2$

- $|A^{-1}|$ Para hallar la inversa tenemos en cuenta que $A \cdot A^{-1}$ =I y que existe la inversa (A^{-1}) , debido a que el determinante de A es distinto de cero $|A| = 2 \neq 0$

  $|A \cdot A^{-1}| = |I| \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$

11) A y B son dos matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes tienen como valor 4 y –5 respectivamente. Con estos datos, calcular:

a) $|B^{-1}|$

b) El determinante del producto A^t B, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

c) El determinante del producto CB, siendo C la matriz resultante de multiplicar por 5 los elementos de la segunda fila de A.

Tenemos que $|A| = 4$ y $|B| = -5$

a) $B \cdot B^{-1} = I \rightarrow |B \cdot B^{-1}| = |I| \rightarrow |B| \cdot |B^{-1}| = |I| \rightarrow (-5) \cdot |B^{-1}| = 1 \rightarrow |B^{-1}| = \frac{-1}{5}$

b) $|A^t \cdot B| = |A^t| \cdot |B| \overset{|A| = |A^t|}{=} |A| \cdot |B| = 4 \cdot (-5) = -20$

c) $|C| = 5 \cdot |A|$

$|C \cdot B| = |C| \cdot |B| = 5 \cdot |A| \cdot |B| = 5 \cdot 4 \cdot (-5) = -100$

12) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 3$, calcula el valor de los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} x & y \\ a-x & b-y \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ a & b \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} x & y \\ a-x & b-y \end{vmatrix} \overset{F_2+F_1\to F_2}{=} \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 3$

b) $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \overset{F_1\leftrightarrow F_2}{=} (-1)\cdot \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -3$

c) $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ a & b \end{vmatrix} = 5\cdot \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 5\cdot 3 = 15$

d) $\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix}$ → si os dais cuenta es la matriz traspuesta de A.

$|A| = |A^t| \to \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 3$

13) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$. Demuestra sin desarrollar (aplicando las propiedades) que el determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \overset{C_3+C_2\to C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$$

Según la propiedad 2, como la columna 1 y la columna 3 son iguales determinamos que ese determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

14) Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcula: $|B| = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 5/2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 5/2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{6}{2}\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 = 15$$

15) Calcula el siguiente determinante aplicando sus propiedades

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \underset{=}{C_1+C_2+C_3+C_4 \to C_1} \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} F_2-F_1 \to F_2 \\ F_3-F_1 \to F_3 \\ = \\ F_4-F_1 \to F_4 \end{matrix} \quad (a+3)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

Según la propiedad 10 el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$= (a+3)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)\,[1\cdot(a-1)\cdot(a-1)\cdot(a-1)] = (a+3)\cdot(a-1)^3$$

16) Sabiendo que $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{t} & \boldsymbol{3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{5}$**, calcula el valor de** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x+1} & \boldsymbol{y+1} & \boldsymbol{x+y} \\ \boldsymbol{u+2} & \boldsymbol{v+2} & \boldsymbol{u+v} \\ \boldsymbol{s+3} & \boldsymbol{t+3} & \boldsymbol{s+t} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & x+y \\ u+2 & v+2 & u+v \\ s+3 & t+3 & s+t \end{vmatrix} \overset{=}{C_3-C_1-C_2 \to C_3} \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & -2 \\ u+2 & v+2 & -4 \\ s+3 & t+3 & -6 \end{vmatrix} = (-2)\cdot \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & 1 \\ u+2 & v+2 & 2 \\ s+3 & t+3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} C_1-C_3 \to C_1 \\ C_2-C_3 \to C_2 \\ = \end{matrix} \; (-2)\cdot \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ u & v & 2 \\ s & t & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 5 = -10$$

17) Sabiendo que el determinante $|A|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix}$ **=20 calcula** $|B|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{2a} & \boldsymbol{2c} & \boldsymbol{2b} \\ \boldsymbol{2g} & \boldsymbol{2i} & \boldsymbol{2h} \\ \boldsymbol{2d} & \boldsymbol{2f} & \boldsymbol{2e} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 3g & 3i & 3h \\ 2d & 2f & 2e \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot2\cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ g & i & h \\ d & f & e \end{vmatrix} \underset{=}{C_2 \leftrightarrow C_3} (-1)\cdot2\cdot3\cdot2\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} =$$

$$\underset{=}{F_2 \leftrightarrow F_3} (-1)\cdot(-1)\cdot2\cdot3\cdot2\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 12\cdot 20 = 240$$

18) Sabiendo que el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = 7$ **calcula** $|B| = \begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 2 \\ a+2 & 2a+1 & 2a \end{vmatrix}$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 2 \\ a+2 & 2a+1 & 2a \end{vmatrix} \overset{C_2 - C_3 \to C_2}{=} \begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c & 2 \\ a+2 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{C_1 - C_3 \to C_1}{=} 2\cdot \begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 3 & c & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$\overset{|B| = |B^t|}{=} 2\cdot \begin{vmatrix} b & 3 & 2 \\ 5 & c & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} 2\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} b & 3 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 5 & c & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} 2\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} b & 2 & 3 \\ 0 & a & 1 \\ 5 & 1 & c \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=}$$

$$= 2\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot|A| = = 2\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 7 = -14$$

19) Sabiendo que el determinante $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$ **calcula** $|B| = \begin{vmatrix} 3b & 3 & 0 \\ a+c & 2 & 8 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 3b & 3 & 0 \\ a+c & 2 & 8 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{F_2 - F_3 \to F_2}{=} \begin{vmatrix} 3b & 3 & 0 \\ c & 1 & 5 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ c & 1 & 5 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{|B| = |B^t|}{=} 3\cdot \begin{vmatrix} b & c & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} 3\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} b & c & a \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} 3\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=}$$

$$= 3\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot|A| = = 3\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-5) = 15$$

20) Sabiendo que el determinante $|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{-5}$ **calcula** $|B| = \begin{vmatrix} \mathbf{3}\boldsymbol{z}-\mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{y} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 3z-3 & 6 & -2 \\ 3x+1 & -2 & -2 \\ 3y & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot\begin{vmatrix} 3z-3 & 6 & 1 \\ 3x+1 & -2 & 1 \\ 3y & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} 3z-3 & -3 & 1 \\ 3x+1 & 1 & 1 \\ 3y & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{C_1 - C_2 \to C_1} \begin{vmatrix} 3z & -3 & 1 \\ 3x & 1 & 1 \\ 3y & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2)\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} z & -3 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{|B| = |B^t|} (-2)\cdot(-2)\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} z & x & y \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{C_2 \leftrightarrow C_3} (-2)\cdot(-2)\cdot 3\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} z & y & x \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{C_1 \leftrightarrow C_3} (-2)\cdot(-2)\cdot 3\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$=(-2)(-2)\cdot 3\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot|A| = (-2)(-2)\cdot 3\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-5) =$ - 60

21) Sabiendo que el determinante $|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r} \end{vmatrix} = \mathbf{-12}$ **calcula** $|B| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b}+\boldsymbol{y} & \boldsymbol{y}+\boldsymbol{q} & \mathbf{2}\boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{x} & \boldsymbol{x}+\boldsymbol{p} & \mathbf{2}\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{z} & \boldsymbol{z}+\boldsymbol{r} & \mathbf{2}\boldsymbol{r} \end{vmatrix}$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} b+y & y+q & 2q \\ a+x & x+p & 2p \\ c+z & z+r & 2r \end{vmatrix} = (2)\cdot\begin{vmatrix} b+y & y+q & q \\ a+x & x+p & p \\ c+z & z+r & r \end{vmatrix} = \underset{=}{C_2 - C_3 \to C_2} (2)\cdot\begin{vmatrix} b+y & y & q \\ a+x & x & p \\ c+z & z & r \end{vmatrix} =$$

$$\underset{=}{C_1 - C_2 \to C_1} (2)\cdot\begin{vmatrix} b & y & q \\ a & x & p \\ c & z & r \end{vmatrix} \underset{=}{|B| = |B^t|} (2)\cdot\begin{vmatrix} b & a & c \\ y & x & z \\ q & p & r \end{vmatrix} \underset{=}{C_1 \leftrightarrow C_2} (2)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = (2)\cdot|A| = (2)\cdot(-12) = -24$$

22) Sabiendo que el determinante $|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{m} & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{-5}$ **calcula** $|B| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{m} & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{m}+\mathbf{2} & \boldsymbol{n}+\mathbf{4} & \boldsymbol{p}+\mathbf{6} \end{vmatrix}$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ m+2 & n+4 & p+6 \end{vmatrix} \underset{=}{F_3 - F_1 \to F_3} \begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{1}{3}\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= (2)\cdot\frac{1}{3}\cdot|A| = = (2)\cdot\frac{1}{3}\cdot(-5) = -\frac{10}{3}$

23) Sabiendo que el determinante $|A| = \begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$ **calcula** $|B| = \begin{vmatrix} m+1 & m & m-1 \\ n+1 & n & n-2 \\ p+1 & p & p-3 \end{vmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} m+1 & m & m-1 \\ n+1 & n & n-2 \\ p+1 & p & p-3 \end{vmatrix} \overset{C_1 - C_2 \to C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & m & m-1 \\ 1 & n & n-2 \\ 1 & p & p-3 \end{vmatrix} \overset{C_3 - C_2 \to C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 1 & n & -2 \\ 1 & p & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & n & 2 \\ 1 & p & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & m & 1 \\ 3 & n & 2 \\ 3 & p & 3 \end{vmatrix} \overset{|B| = |B^t|}{=} (-1) \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ m & n & p \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{=} (-1) \cdot \tfrac{1}{3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \tfrac{1}{3} \cdot (-1) \cdot |A| = (-1) \cdot \tfrac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-5) = -\tfrac{5}{3}$$

24) Sabiendo que el determinante $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 72$ **calcula** $|B| = \begin{vmatrix} x+y & 2y & y+z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} x+y & 2y & y+z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x+y & y & y+z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 - C_2 \to C_1}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & y+z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_3 - C_2 \to C_3}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot |A| = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 72 = 72$$

25) Sabiendo que el determinante $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 30$ **calcula** $|B| = \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ x+z & -4 & 2 \\ y+x & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ x+z & -4 & 2 \\ y+x & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{F_2 - F_1 \to F_2}{=} \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ z & -6 & 1 \\ y+x & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{F_3 - F_2 \to F_3}{=} \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ z & -6 & 1 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ z & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{|B| = |B^t|}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} x & z & y \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot |A| = 2 \cdot 30 = 60$$

RANGO DE UNA MATRIZ

26) Halla el rango de las siguientes:

a) A= $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **b) B=** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c) C=** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Es una matriz con 4 filas y tres columnas, el determinante sólo puede ser de 3x3. Como máximo el rango podría ser 3.

Tomamos un menor 2x2 y hallamos su determinante:

- Si nos diese distinto de cero el rango es como mínimo dos.
- Si nos diese cero, probamos con otros menores 2x2, hasta encontrar uno que sea ≠ 0. Si no existiera ninguno que fuese distinto de cero el rango sería 1. A no ser que tuviésemos una matriz nula que en ese caso el rango sería 0 → rg(A) = 0

1. Calculamos el rango de la matriz mediante determinantes

$\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ = -10 ≠ 0 → rg(A)≥ 2 Las filas 1 y 2 son linealmente independientes.

Tomamos un menor de orden 3 : $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ = 5+20-15 =10≠0 → rg(A)= 3

Como la dimensión de la matriz es 4x3 , el determinante sólo puede ser 3x3 por lo tanto → El rg(A) = 3

2. Calculamos el rango de la matriz mediante el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \underset{\rightarrow}{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 - 6F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \\ \rightarrow \\ F_4 - 4F_1 \rightarrow F_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -8 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 - 2F_3 \rightarrow F_3 \\ \rightarrow \\ F_2 - 2F_4 \rightarrow F_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el rg(A)=3

b) **rg(B)= 3**

c) **rg(C) = 4**

27) Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) A= $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -10 & 8 & 6 & -8 \end{pmatrix}$ **b) B=** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

a) Es una matriz con 4 filas y 4 columnas, el determinante puede ser 4x4. Como máximo el rango podría ser 4. Tomamos un menor 2x2 y hallamos su determinante:

1. <u>Calculamos el rango de la matriz mediante determinantes</u>

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$ = 4-10 = -6 ≠ 0 → rg(A)≥ 2

Tomamos un menor de orden 3:

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ -10 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \\ -10 & 8 & -8 \end{vmatrix} = 0$

Como todos los determinantes son igual a cero, el rg(A)= 2

2. <u>Calculamos el rango de la matriz mediante el método de Gauss</u>

Hemos comprobado que estas filas no son linealmente dependientes. De hecho:
F_4= -2 F_2 y F_2= 2·F_3- F_1

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -10 & 8 & 6 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - 10F_1 \to F_4]{\substack{F_2 + 5F_1 \to F_2 \\ F_3 + 2F_1 \to F_3}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & -12 & -24 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 12 & 4 \\ 0 & -12 & -24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4 + 4F_1 \to F_4]{F_3 - 2F_2 \to F_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que rg(A)=2 ya que la tercera y cuarta fila tiene todos sus valores nulos.

b) Es una matriz con 3 filas y 4 columnas, el determinante sólo puede ser 3x3. Como máximo el rango podría ser 3.

1. <u>Calculamos el rango de la matriz mediante determinantes</u>

Tomamos un menor 2x2 y hallamos su determinante:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$ 0+2=2 $\neq 0 \rightarrow$ rg(B)$\geq$ 2

Tomamos un menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

Como todos los determinantes son igual a cero $\rightarrow$ rg(B)= 2

Hemos comprobado también que estas filas no son linealmente independientes.

2. <u>Calculamos el rango de la matriz mediante el método de Gauss</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ \rightarrow \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -10 & -10 & -20 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3 + 5F_2 \rightarrow F_3 \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el rg(B) =2 ya que la tercera fila todos los valores son nulos.

RANGO DE UNA MATRIZ CON PARÁMETROS

28) Estudia, según los valores del parámetro a, el rango de las siguientes matrices.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{pmatrix}$ b= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & a \\ a & 6 & 9 \end{pmatrix}$ c= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -a & a-4 \end{pmatrix}$ d= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2a & 2a \\ 3 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$

a) 1. Calculamos el determinante de la matriz A.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{vmatrix}$ = -10-6a+6-8-15-3a = -27-9a

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de a.

$|A| = 0 \rightarrow |A| = -27 - 9a = 0 \rightarrow$ a= -3

3. Si $|A| \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz
Si $|A| = 0 \rightarrow$ El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- Caso I: Si a≠ -3 → Como $|A| \neq 0 \rightarrow$ El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 3 → rg(A)=3

- Caso II: Si a = -3 → Como $|A| = 0 \rightarrow$ El rango no coincidirá con su orden de la matriz → rg (A) <3

  Tendremos que calcular un determinante de un orden menor
  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ = 2+ 3 = 5≠ 0 → rg(A) = 2

b) 1. Calculamos el determinante de la matriz B.

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & a \\ a & 6 & 9 \end{vmatrix}$ = 36+12a+ 2a^2 -4a^2-36-6a = -2a^2 + 6a

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de a.

$|B| = 0 \rightarrow |B| = -2a^2 + 6a = 0 \rightarrow$ a(-2a+6) = 0 → $\begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$

3. Si $|B| \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz

Si $|B| = 0 \rightarrow$ El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- Caso I: Si a≠ 0 y a≠ 3 → Como $|B| \neq 0 \rightarrow$ El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 3 → rg(B)=3

- Caso II: Si a = 0 → Como $|B| = 0 \rightarrow$ El rango no coincidirá con su orden de la matriz → rg (B) <3

  Tendremos que calcular un determinante de un orden menor

  $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$ = 12-0 = 12≠ 0 → rg(B) = 2

- Caso II: Si a = 3 → Como $|B| = 0 \rightarrow$ El rango no coincidirá con su orden de la matriz → rg (B) <3

  Tendremos que calcular un determinante de un orden menor

  $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$ = 36 -18 = 18 ≠ 0 → rg(B) = 2

c) 1. Calculamos el determinante de la matriz C.

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -a & a-4 \end{vmatrix} = a^2$-4a-a+4-a-2a+8+2a= a^2-6a+12

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de a.

$|C| = 0 \rightarrow |C| = a^2 - 6a + 12 = 0 \rightarrow$ a= $\frac{6 \pm \sqrt{36-48}}{2}$

No existe ningún valor real de a que anule el determinante de C → rg(C)=3 en todos los casos.

d) 1. Calculamos el determinante de la matriz D.

$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2a & 2a \\ 3 & 3 & a+2 \end{vmatrix} = 2a^2$+4a+6a+6a-6$a^2$-2a-4-6a= -4$a^2$+8a-4

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de a.

$|D| = 0 \rightarrow |D| = -4a^2 + 8a - 4 = 0 \rightarrow$ a = 1(doble)

3. Si $|D| \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz

Si $|D| = 0$ → El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- Caso I: Si a≠ 1 → Como $|D| \neq 0$ → El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 3 → rg(D)=3

- Caso II: Si a = 1 → Como $|D| = 0$ → El rango no coincidirá con su orden de la matriz → rg (D) <3

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

rg (D) = 1 → ya que las filas son proporcionales

29) Estudia, según los valores de m, el rango de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{m} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2}\boldsymbol{m} \end{pmatrix}$

1. Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathrm{m} & 1 & -2 \\ 2\mathrm{m} & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4m^2 -4m -4 +4 + 4m^2 +4m = 0$$

Observamos que para cualquier valor de m, el determinante de la matriz A es nula. Por lo tanto rg(A)≤ 2

2. Calculamos un determinante menor de orden 2

$$\begin{vmatrix} 2m & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m -2$$

3. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de m.

$|A| = 0$ → $|A| = 2\mathrm{m} - 2 = 0$ → m= 1

4. Si $|A| \neq 0$ → El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz
   Si $|A| = 0$ → El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- Caso I: m≠ 1 → Como el determinante de la menor de orden 2 es distinto de cero → El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 2 → rg(A)=2

- Caso II: Si m = 1 → Como $|A| = 0$ → El rango no coincidirá con el orden de la matriz menor → rg (A) < 2

  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ → Observamos que las filas son proporcionales → rg(A) = 1

30) Estudia, según los valores de t, el rango de la matriz A= $\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{t} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

1. Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} t & -1 & 3 \\ 1 & t & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2+6+4-12t+2+2t = 2t^2-10t+12$$

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de t.

$$|A| = 0 \rightarrow |A| = 2t^2 - 10t + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$$

3. Si $|A| \neq 0$ → El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz
   Si $|A| = 0$ → El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- Caso I: Si t≠ 2 y t≠ 3 → Como $|A| \neq 0$ → El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 3 → rg(A)=3

- Caso II: Si t = 2 → Como $|A| = 0$ → El rango no coincidirá con su orden de la matriz → rg (A) <3

  Tendremos que calcular un determinante de un orden menor

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 4+1 = 5≠ 0 → rg(A) = 2

- Caso II: Si t= 3 → Como $|A| = 0$ → El rango no coincidirá con su orden de la matriz → rg (A) <3

  Tendremos que calcular un determinante de un orden menor

  $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ = 9+1 = 10 ≠ 0 → rg(A) = 2

31) Estudia, según los valores de a, el rango de la matriz A= $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{(a+2)(a+1)} & \boldsymbol{a}+\mathbf{2} & \mathbf{(a+2)a} \\ \mathbf{a+2} & \mathbf{a+2} & \mathbf{a+2} \end{pmatrix}$

1. Calculamos el determinante de la matriz A.

$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ (a+2)(a+1) & a+2 & (a+2)a \\ a+2 & a+2 & a+2 \end{vmatrix}$ = (a+2)(a+2) $\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ (a+1) & 1 & a \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix}$ $= (a+2)^2 \begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ (a+1) & 1 & a \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix}$

$|A| = (a+2)^2 \cdot [a(a+2) + 2(a+1) + 2a - 2 - 2(a+1)(a+2) - a^2]$

$|A| = (a+2)^2 \cdot [a^2 + 2a + 2a + 2 + 2a - 2 - 2a^2 - 6a - 4 - a^2] = (a+2)^2 \cdot [-2a^2 - 4]$

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de a.

$|A| = 0 \rightarrow |A| = (a+2)^2 \cdot [-2a^2 - 4] = 0 \rightarrow \{a = -2$

4. Si $|A| \neq 0$ → El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz
Si $|A| = 0$ → El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- Caso I: Si a≠ -2 → Como $|A| \neq 0$ → El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 3 → rg(A)=3

- Caso II: Si a = -2 → Como $|A| = 0$ → El rango no coincidirá con su orden de la matriz → rg (A) <3

A = $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tendremos que calcular un determinante de un orden menor

$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ Observamos que todos los determinantes de orden 2 son iguales a cero → rg(A) < 2

Tendremos que calcular un determinante de un orden menor $|-2| = -2 \rightarrow \mathrm{rg(A)} = 1$

32) Estudia, según los valores de a, el rango de la matriz A= $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a^2-1} & \mathbf{a(a+1)} & \mathbf{a+1} \\ \boldsymbol{-(a-1)^2} & \boldsymbol{a-1} & \mathbf{-(a-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

1. Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2-1 & \mathrm{a(a+1)} & \mathrm{a+1} \\ -(a-1)^2 & a-1 & -(\mathrm{a}-1) \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+1)(a-1) & \mathrm{a(a+1)} & \mathrm{a+1} \\ -(a-1)^2 & a-1 & -(\mathrm{a}-1) \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1)(a-1) \begin{vmatrix} a-1 & \mathrm{a} & 1 \\ -(\mathrm{a}-1) & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (a+1)(a-1)\cdot[a-1+2(a-1)+a(a-1)-2(a-1)]$$

$$=(a+1)(a-1)\cdot[a-1+2a-2+a^2-a-2a+2] = (a+1)(a-1)\cdot[a^2-1]$$

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de a.

$$|A| = 0 \rightarrow |A| = (a+1)(a-1)\cdot[a^2-1] = 0 \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

3. Si $|A| \neq 0$ → El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz

   Si $|A| = 0$ → El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- Caso I: Si a≠ -1 y a≠ 1 → Como $|A| \neq 0$ → El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 3 → rg(A)=3

- Caso II: Si a = -1 → Como $|A| = 0$ → El rango no coincidirá con su orden de la matriz → rg (A) <3

  A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

  Tendremos que calcular un determinante de un orden menor

  $\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ = 8 ≠0 → rg(A) = 2

- Caso II: Si a = 1 → Como $|A| = 0$ → El rango no coincidirá con su orden de la matriz → rg (A) <3

  A = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

  Tendremos que calcular un determinante de un orden menor

  $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ = 2+4=6 ≠0 → rg(A) = 2

33) Estudia, según los valores de a, el rango de la matriz A= $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{a+1} & \mathbf{1} & \mathbf{-a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{a+1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

1. Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = (a+1)(a+1)-a-1+a\cdot a \cdot (a+1) = a^2+2a+1-a-1+a^3+a^2$$

2. Igualamos el determinante a 0 y resolvemos la ecuación resultante para calcular el valor en este caso de t.

$$|A| = 0 \rightarrow |A| = a^3+2a^2+a = 0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases}$$

3. Si $|A| \neq 0$ → El rango de la matriz coincidirá con el orden de la matriz
   Si $|A| = 0$ → El rango de la matriz no coincidirá con su orden. Tendremos que calcular un determinante de un orden menor.

- Caso I: Si a≠ 0 y a≠ -1 → Como $|A| \neq 0$ → El rango coincidirá con el orden de la matriz. En este caso el orden de la matriz es 3 → rg(A)=3

- Caso II: Si a = 0 → Como $|A| = 0$ → El rango no coincidirá con su orden de la matriz → rg (A) <3
  A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
  Tendremos que calcular un determinante de un orden menor
  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 0-1 = -1≠ 0 → rg(A) = 2

- Caso II: Si a = -1 → Como $|A| = 0$ → El rango no coincidirá con su orden de la matriz → rg (A) <3
  A= $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  Tendremos que calcular un determinante de un orden menor
  $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = -1-0 = -1≠ 0 → rg(A) = 2

MATRIZ INVERSA

34) Calcula, si es posible, la inversa de la matriz : A = $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$ **para los casos en los que a=2 y a=0**

Para a = 2

Calculamos la matriz inversa de Z mediante determinantes:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t$

1. Calculamos la matriz A para a = 2 $\quad A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. Calculamos el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6+3+1-1-2-9=-2 \neq 0$ → Por lo tanto existe la matriz inversa A^{-1}.

3. Calculamos los adjuntos de la matriz A:

$A_{11}= -1$	$A_{12}=-1$	$A_{13}=2$
$A_{21}=1$	$A_{22}=5$	$A_{23}=-8$
$A_{31}=0$	$A_{32}=-2$	$A_{33}=2$

4. Escribimos la matriz adjunta.

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Para a =0

1. Calculamos la matriz A para a = 0 $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Calculamos el determinante |A| $\quad |A| = 0 \rightarrow$ No existe matriz inversa, por tanto no existe A^{-1}

35) Calcula para qué valores de t existe la inversa de la matriz A= $\begin{pmatrix} t & -1 & 2 \\ 2 & t & -1 \\ -1 & t & 2 \end{pmatrix}$

Calcula A^{-1} para t =0

a) La condición necesaria y suficiente para que exista la matriz inversa (A^{-1}) es que $|A| \neq 0$

Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} t & -1 & 2 \\ 2 & t & -1 \\ -1 & t & 2 \end{vmatrix} = 2t^2+4t-1+2t+4+t^2 = 3t^2+6t+3=0 \rightarrow t = -1$$

Por lo tanto para que exista matriz inversa A^{-1}, t tiene que ser distinto de -1 ($t \neq -1$)

b) Si t =0, la matriz A nos queda de la siguiente manera A= $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante para demostrar que existe matriz inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0+0-1+0+4+0=3 \neq 0$$ → Por lo tanto habrá matriz inversa.

- Calculamos los adjuntos de la matriz A:

$A_{11} = 0$ $A_{12} = -3$ $A_{13} = 0$

$A_{21} = 2$ $A_{22} = 2$ $A_{23} = 1$

$A_{31} = 1$ $A_{32} = 4$ $A_{33} = 2$

- Escribimos la matriz adjunta.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- La matriz inversa de la matriz A será

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ -1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

36) Calcula los valores de a para los que existe la matriz inversa de B= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Calcula $\boldsymbol{B^{-1}}$ **para a =0**

a) La condición necesaria y suficiente para que exista la matriz inversa (B^{-1}) es que $|B| \neq 0$

Calculamos el determinante de B

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-2a^2+2-a-a= -2a^2-2a+4=0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

- Caso I Si a≠1 y a≠-2 existe la matriz inversa de la matriz B ya que $|B| \neq 0$
- Caso II Si a = 1 no existe la matriz inversa de la matriz B ya que $|B| = 0$
- Caso III Si a = -2 no existe la matriz inversa de la matriz B ya que $|B| = 0$

b) Calculamos B^{-1} para a=0, así que sustituimos a por 0 en la matriz B.

$$B= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos su determinante para demostrar que existe matriz inversa.

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+0+2+0+0 = 4 \neq 0$$ Vamos a tener matriz inversa.

- Calculamos los adjuntos de la matriz B:

$B_{11}= 1$ $\quad$ $B_{12}= -1$ $\quad$ $B_{13}= 3$

$B_{21}= 1$ $\quad$ $B_{22}=3$ $\quad$ $B_{23}=-1$

$B_{31}= -1$ $\quad$ $B_{32}= 1$ $\quad$ $B_{33}= 1$

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(B))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$