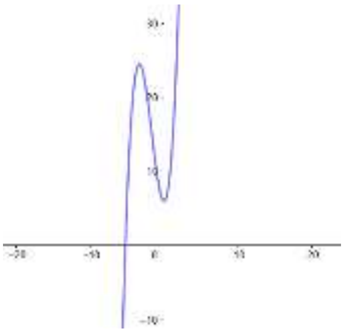
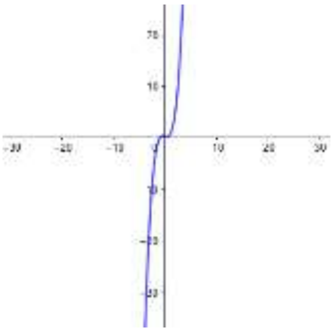
1) $y = f(x) = x^3 + 5x^2 + 6$ Solución: D(f)= ∀xϵR



Se trata de una función polinómica y, como se observa en la gráfica, está definida en todo su dominio.

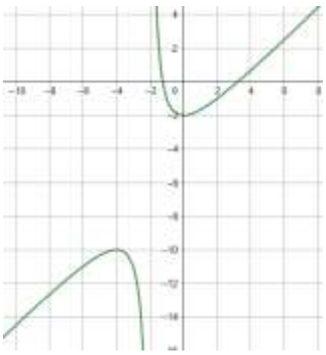
2) $y = \frac{4x^3-2x+2}{6}$ Solución: D(f)= ∀xϵR



Se trata de una función polinómica y, como se observa en la gráfica, está definida en todo su dominio. A primera vista podría parecer una función racional por la presencia de un denominador, pero este no contiene la variable x.

Por ello, la función puede reescribirse de la siguiente manera: $y = \frac{4}{6}x^3 - \frac{2}{6}x + \frac{2}{6}$

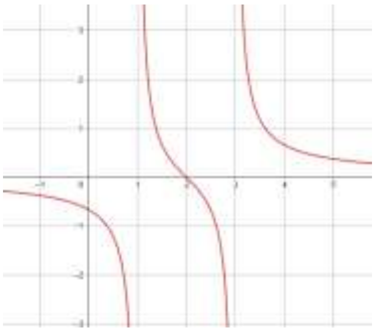
3) $y = \frac{x^2-2x-4}{x+2}$ Solución: D(f)= ∀xϵR-$\{-2\}$



Se trata de una función racional, de modo que está definida en todo su dominio salvo en los valores que anulan el denominador. En este caso, el denominador se hace cero en x=−2, por lo que este valor debe excluirse del dominio.

Condición: $x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$

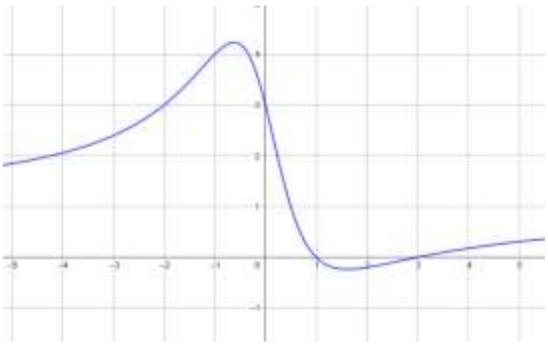
4) y = $\frac{x-3}{x^2-4x+3}$ Solución: D(f)= ∀x∈R-{1,3}



Se trata de una función racional. Por lo tanto la función está definida en todo el dominio exceptuando los puntos que anulen el denominador, en este caso serán los puntos, x_1=1 y x_2=3

Condición: x^2- 4x + 3 ≠ 0 → $\begin{cases} x_1 \neq 1 \\ x_2 \neq 3 \end{cases}$

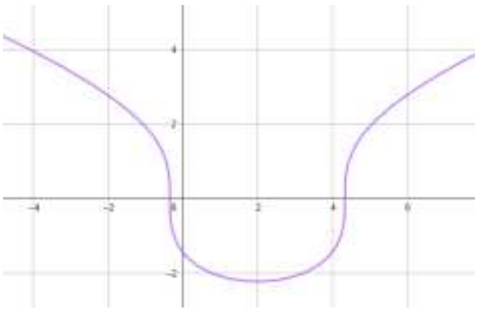
5) y = $\frac{x^2-4x+3}{x^2+1}$ Solución: D(f)= ∀x∈R



Se trata de una función racional. Por lo tanto la función está definida en todo el dominio exceptuando los puntos que anulen el denominador, en este caso no existe ninguno.

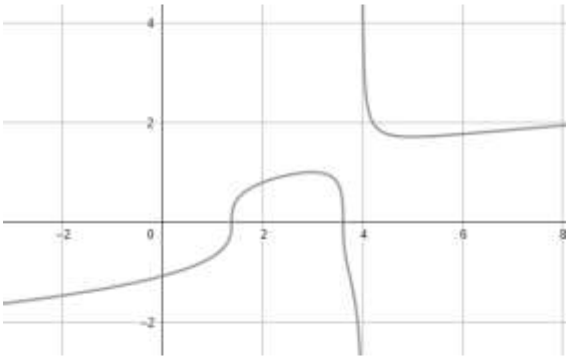
Condición: $x^2 + 1 \neq 0$ → $x^2 = \pm\sqrt{-1}$ → no tiene solución real, por lo tanto no hay ningún valor que anule el denominador.

6) y = $\sqrt[3]{2x^2 - 8x - 3}$ Solución: D(f)= ∀x∈R



Se trata de una función radical. Como se observa en la gráfica, la función está definida en todo su dominio porque la raíz es de índice impar (en este caso, 3), lo que permite que el radicando —lo que está dentro de la raíz— pueda tomar valores tanto positivos como negativos.

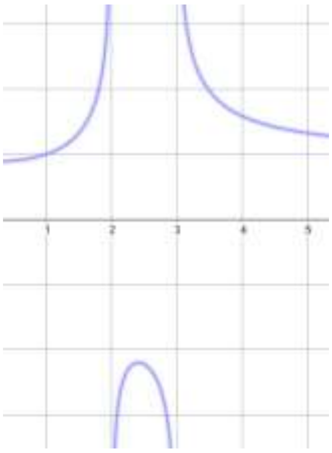
7) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2-5x+5}{x-4}}$ Solución: D(f)= ∀xϵR-{4}



Se trata de una función radical de índice impar (en este caso, 3), lo que permite que el radicando —lo que está dentro de la raíz— pueda tomar valores tanto positivos como negativos. Pero tenemos un problema, que el denominador no se puede anular, por lo tanto tendremos una condición.

Condición: x-4 ≠ 0 → x ≠ 4

8) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2-3x+4}{x^2-5x+6}}$ Solución: D(f)= ∀xϵR-{2,3}

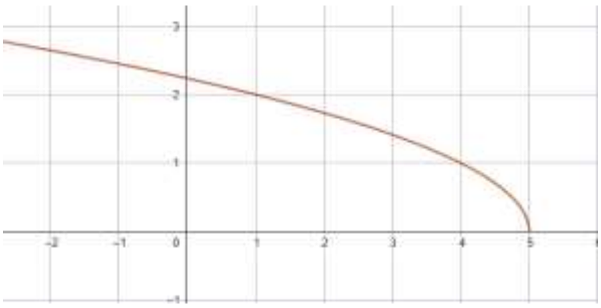


Se trata de una función radical de índice impar (en este caso, 3), lo que permite que el radicando —lo que está dentro de la raíz— pueda tomar valores tanto positivos como negativos.

Pero tenemos un problema, que el denominador no se puede anular, por lo tanto tendremos una condición.

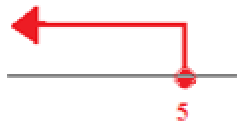
Condición: x^2-5x+6 ≠ 0 → $\begin{cases} x_1 \neq 2 \\ x_2 \neq 3 \end{cases}$

9) y = f(x)= $\sqrt{-x+5}$ Solución: D(f)= xϵ (-∞,5]

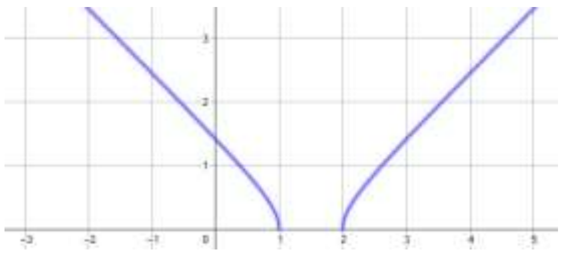


Se trata de una función radical de índice par (en este caso, 2), lo que no permite que el radicando —lo que está dentro de la raíz— pueda tomar valores negativos. Por lo tanto la condición es que el radicando sea mayor o igual a cero.

Condición: $-x+5 \geq 0 \rightarrow -x \geq -5 \rightarrow x \leq 5$



10) y = $\sqrt{x^2-3x+2}$ Solución: D(f)= xϵ (-∞,1]∪ [2, ∞)



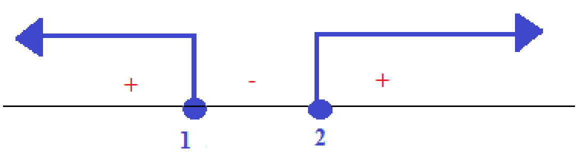
Se trata de una función radical de índice par (en este caso, 2), lo que no permite que el radicando —lo que está dentro de la raíz— pueda tomar valores negativos. Por lo tanto la condición es que el radicando sea mayor o igual a cero.

Condición: $x^2-3x+2 \geq 0$

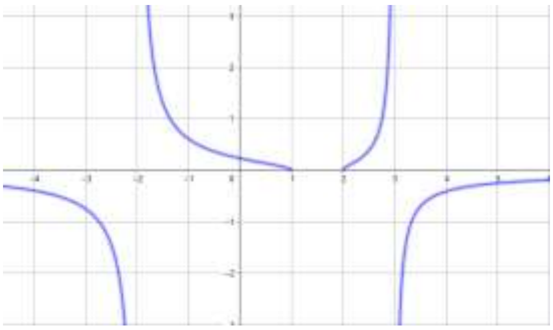
Calculamos las raíces: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Calculamos la región que cumple dicha desigualdad:

$$(x-1)(x-2) \geq 0$$



11) $y = \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{-x^2+x+6}$ Solución: D(f)= xϵ $(-\infty,-2) \cup (-2,1] \cup [2,3) \cup (3,\infty)$



Se trata de una función radical de índice par (en este caso, 2), lo que no permite que el radicando —lo que está dentro de la raíz— pueda tomar valores negativos. Por lo tanto la condición es que el radicando sea mayor o igual a cero.

Pero tenemos otro problema, que el denominador no se puede anular, por lo tanto tendremos una segunda condición.

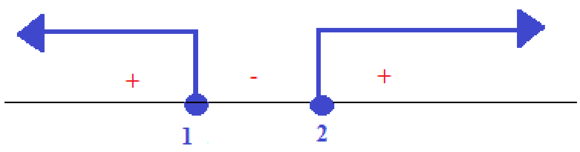
Condiciones: $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ -x^2 + x + 6 \neq 0 \end{cases}$

- $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

Calculamos las raíces: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

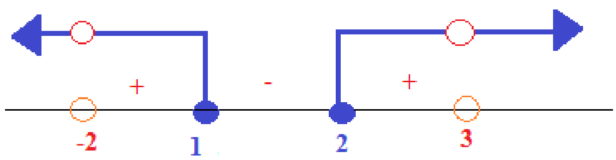
Calculamos la región que cumple dicha desigualdad:

(x-1)(x-2)$\geq$ 0



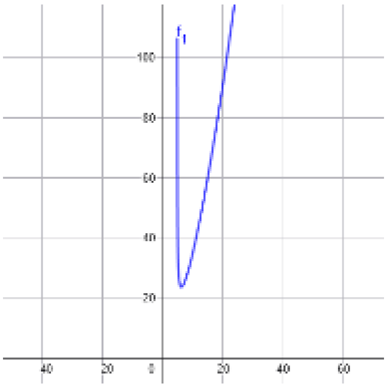
- $-x^2 + x + 6 \neq 0$

Calculamos las raíces: $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ que son los puntos que debemos eliminar de nuestra región



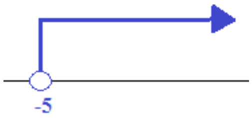
Por lo tanto el dominio de la función será: D(f)= xϵ $(-\infty,-2) \cup (-2,1] \cup [2,3) \cup (3,\infty)$

12) $y = \frac{x^2-3x+6}{\sqrt{x+5}}$ Solución: D(f)= xϵ(-5,∞)

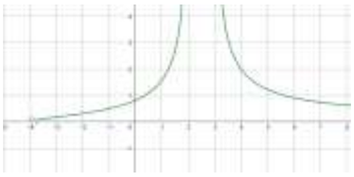


Condiciones: $\begin{cases} x+5 \geq 0 \rightarrow \text{el radicando tiene que ser mayor o igual que cero} \\ x+5 \neq 0 \rightarrow \text{el denominador tiene que ser distinto de cero} \end{cases}$

Juntando estas dos condiciones, llegamos a esta única condición → $x + 5 > 0$



13) $y=f(x)=\sqrt{\frac{x+4}{x^2-5x+6}}$ Solución: D(f)= xϵ[-4,2) ∪ (3,∞)

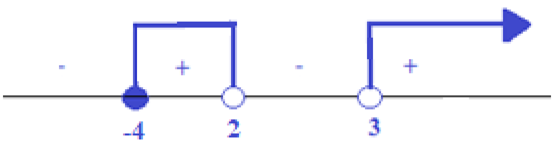


Condición: $\begin{cases} \frac{x+4}{x^2-5x+6} \geq 0 \rightarrow \text{El radicando tiene que ser mayor o igual a cero} \\ x^2-5x+6 \neq 0 \rightarrow \text{El denominador tiene que ser distinto de cero} \end{cases}$

Se trata de una inecuación racional

- Calculamos las raíces del numerador : $\{x = -4$
- Calculamos las raíces del denominador: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ como están en el denominador estas raíces no estarán incluidas.
- Calculamos la región que cumple dicha desigualdad:

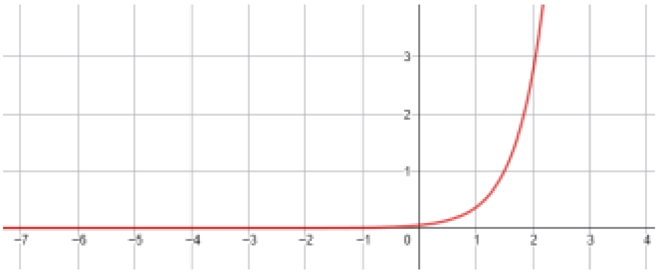
$$\frac{(x+4)}{(x-2)(x-3)} \geq 0$$



Por lo tanto el dominio de la función será:

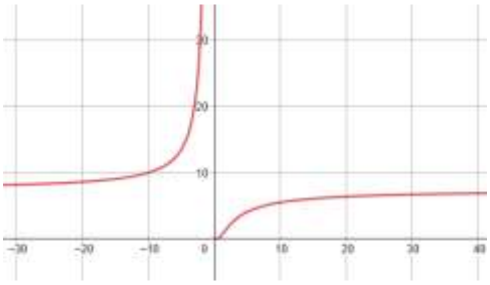
D(f)= xϵ [-4,2) ∪ (3,∞)

14) $y = e^{2x-3}$ Solución: D(f)= ∀xϵℝ



Se trata de una función exponencial y, como se observa en la gráfica, está definida en todo su dominio.

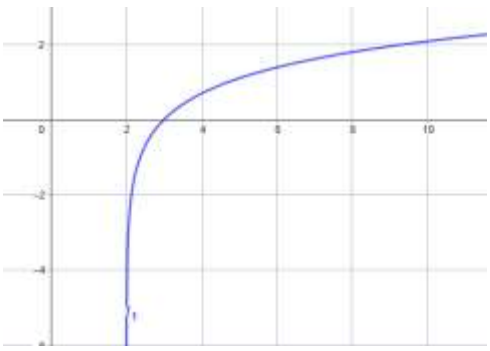
15) $y = e^{\frac{2x-3}{x}}$ Solución: D(f)= ∀xϵℝ-{0}



Se trata de una función exponencial, por lo tanto estaría definida en todo su dominio. Pero tenemos un problema, ya que tenemos un cociente y por lo tanto el denominador tiene que ser distinto de cero.

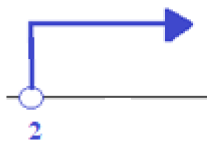
Condición: $x \neq 0$

16) $y = \ln(x-2)$ Solución: D(f)= ∀xϵ(2,∞)

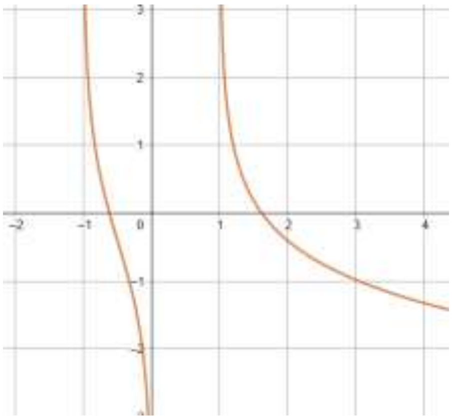


Se trata de una función logarítmica, lo que no permite que el argumento —lo que está dentro del logaritmo— pueda tomar valores negativos o cero. Por lo tanto la condición es que el argumento sea mayor a cero.

Condición $x-2 > 0 \rightarrow x > 2$



17) y = ln$\frac{x}{x^2-1}$ Solución: D(f)= ∀x∊(-1,0) ∪ (1, ∞)



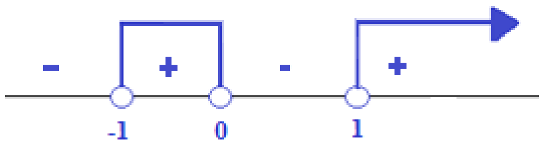
Se trata de una función logarítmica, lo que no permite que el argumento —lo que está dentro del logaritmo— pueda tomar valores negativos o cero. Por lo tanto la condición es que el argumento sea mayor a cero.

Condición: $\frac{x}{x^2-1} > 0$

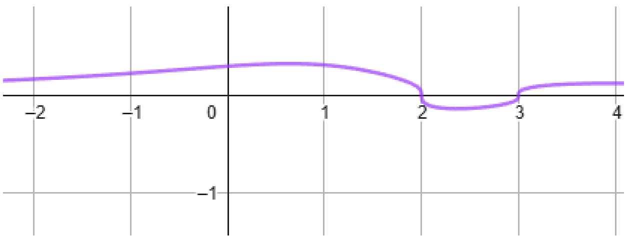
Se trata de una inecuación racional

- Calculamos las raíces del numerador : $\{x = 0$
- Calculamos las raíces del denominador: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ como están en el denominador estas raíces no estarán incluidas.
- Calculamos la región que cumple dicha desigualdad:

$\frac{x}{(x-1)(x+1)}>0$



18) y = $\frac{\sqrt[3]{x^2-5x+6}}{x^2-3x+6}$ Solución: D(f)= ∀x∊ℝ



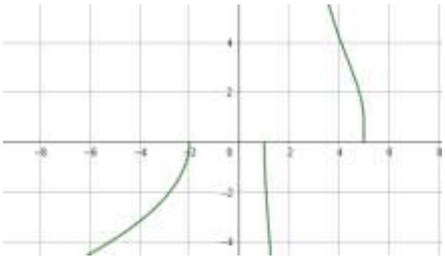
En el numerador, nos encontramos con una función radical. Como la raíz es de índice impar (en este caso, 3), permite que el radicando —lo que está dentro de la raíz— pueda tomar valores tanto positivos como negativos. Por lo que esa función estará definida en todo su dominio.

Tenemos un último problema, el denominador de la función no se puede anular, por lo que tendremos una Condición: $x^2 - 3x + 6 \neq 0$

Calculamos las raíces: x^2-3x + 6 = 0→ x = $\frac{3\pm\sqrt{9-24}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}$ → no tiene solución real. Por lo tanto no existe ningún valor que anule el denominador. D(f)= ∀x∊ℝ

19) y = $\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{1-\log_3(5-x)}$ D(f)= xϵ (-∞,-2] ∪ [1,2) ∪ (2,5)

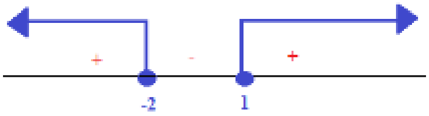
Condiciones: $\begin{cases} x^2+x-2 \geq 0 \\ 5-x > 0 \\ 1-\log_3(5-x) \neq 0 \end{cases}$



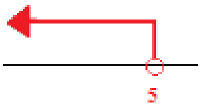
- $x^2+x-2 \geq 0$

Calculamos las raíces: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Calculamos la región que cumple dicha desigualdad: (x-1)(x+2) ≥ 0



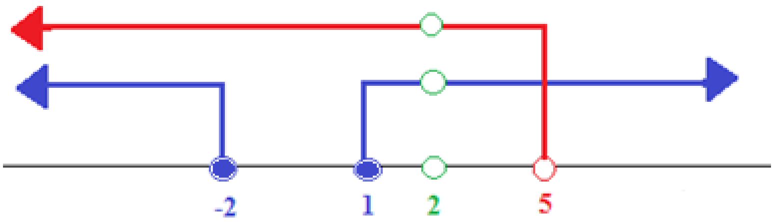
- $5-x > 0$ → x < 5



- $1-\log_3(5-x) \neq 0 \rightarrow \log_3(5-x) \neq 1 \rightarrow$ aplicamos la definición de logaritmo $5-x \neq 3^1 \rightarrow$

$$x \neq 5-3 \rightarrow x \neq 2$$

- Juntamos todas las condiciones:



Por lo tanto el dominio de la función será: D(f)= xϵ (-∞,-2] ∪ [1,2) ∪ (2,5)

Ejercicios propuestos de dominios

Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)= x^4-7x^3+5x+6$ Solución: $D(f) = \forall x \epsilon \mathbb{R}$

b) $f(x)= 3x^2 - 11x + 4$ Solución: $D(f) = \forall x \epsilon \mathbb{R}$

c) $f(x)=3x^5+8x^3- 4x^2-5$ Solución: $D(f) = \forall x \epsilon \mathbb{R}$

d) $f(x)=\frac{4x^3-2x+2}{6}$ Solución: $D(f) = \forall x \epsilon \mathbb{R}$

e) $f(x)= \frac{x^4-2x+4}{3}$ Solución: $D(f) = \forall x \epsilon \mathbb{R}$

f) $f(x)=\frac{4x^3-2x+6}{x+2}$ Solución: $D(f) = \forall x \epsilon \mathbb{R} -\{x=-2\}$

g) $f(x)= \frac{x-3}{x^2-4x+3}$ Solución: $D(f) = \forall x \epsilon \mathbb{R}- \{x=1, x=3\}$

h) $f(x)=\frac{4x^2-4x+8}{x^2-1}$ Solución: $D(f)= \forall x \epsilon \mathbb{R} -\{x=1, x=-1\}$

i) $f(x)= \frac{x^2-4x+3}{x^2+1}$ Solución: $D(f)= \forall x \epsilon \mathbb{R}$

j) $f(x)=\frac{4x^3-2x^2+x-3}{x^2-5x+6}$ Solución: $D(f)= \forall x \epsilon \mathbb{R}- \{x=2, x=3\}$

k) $f(x)=\frac{4x^3-2x^2+3x-2}{x^3+3x^2+3x+1}$ Solución: $D(f)= \forall x \epsilon \mathbb{R}- \{x=-1\}$

l) $f(x)=\frac{3x^3-2x^2+3x-7}{(x^2-9)(x^2-4)}$ Solución: $D(f)=\forall x \epsilon \mathbb{R}-\{x=-3, x=3, x=-2, x=2\}$

m) $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-8x-3}$ Solución: $D(f)= \forall x \epsilon \mathbb{R}$

n) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-5x+5}{x-4}}$ Solución: $D(f)= \forall x \epsilon \mathbb{R}-\{x=4\}$

o) $f(x)= \sqrt[3]{\frac{x^2-3x+4}{x^2-5x+6}}$ Solución: $D(f)= \forall x \epsilon \mathbb{R}-\{x=2, x=3\}$

p) $f(x)=\sqrt{-x+3}$ Solución: $D(f)= \forall x \epsilon \mathbb{R}/x \epsilon (-\infty, 3]$

q) $f(x)=\sqrt{x^3-x}$ Solución: $D(f)= \forall x \epsilon \mathbb{R}/[-1,0] \cup [1, \infty)$

r) $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-8}$ Solución: $D(f)= \forall x \epsilon \mathbb{R}/x \epsilon [2,4]$

s) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$ Solución: $D(f)= \forall x \epsilon \mathbb{R}/x \epsilon (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$

t) $f(x)=\frac{x^2-3x+6}{\sqrt{x-5}}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon(5,\infty)$

u) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x^2-1}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon/x\epsilon(-\infty,-4]\cup(1,\infty)$

v) $f(x)=\frac{\sqrt{x-5}}{x-8}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon[5,8)\cup(8,\infty)$

w) $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^3-2x^2-x+2}}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon(-1,1)\cup(2,\infty)$

x) $f(x)=\frac{x-8}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon(-\infty,2)\cup(3,\infty)$

y) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^3-3x^2-10x+24}}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon(-3,2)\cup(4,\infty)$

z) $f(x)=\sqrt{\frac{x+4}{x^2-5x+6}}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon[-4,2)\cup(3,\infty)$

aa) $f(x)=e^{2x-2}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R$

bb) $f(x)=e^{\frac{2x-2}{x}}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R-\{x=0\}$

cc) $f(x)=\ln(x-2)$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon(2,\infty)$

dd) $f(x)=\ln\frac{x}{x^2-1}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon(-1,0)\cup(1,\infty)$

ee) $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon[-4,2)\cup(3,\infty)$

ff) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+4} & \text{si } x<0\\ \sqrt{\frac{3}{x-3}} & \text{si } x>0\end{cases}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon(-\infty,-4)\cup(-4,0)\cup(3,\infty)$

gg) $f(x)=\sqrt{\frac{-x^2+4}{(x-3)^2}}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon[-2,2]$

hh) $f(x)=\frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{x}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon[2,4]$

ii) $f(x)=\sqrt{\frac{x^4-13x^2+36}{x^2-2x+1}}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon(-\infty,-3]\cup[-2,1)\cup(1,2]\cup[3,\infty)$

jj) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2-5x+6}}{x^2-3x+6}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R$

kk) $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{x^4-5x^2+4}$ Solución: $D(f)=\forall x\epsilon R/x\epsilon[-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2)\cup(2,\infty)$