

1) $f(x) = x^3 - x$

Dominio

$D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$

Simetrías

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$ Tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$
 $f(x) = x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0$ El punto de corte será el (0,0)
 $\rightarrow x = 1$ El punto de corte será el (1,0)
 $\rightarrow x = -1$ El punto de corte será el (-1,0)
- Corte con el eje OY :
 $f(0) = (0)^3 - 0 = 0$ El punto de corte será el (0,0)

Asíntotas Verticales:

No hay ya que el $D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$

Asíntota Horizontal

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x = \infty$ No tiene asíntota horizontal.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x = -\infty$

Asíntota Oblicua

No hay asíntota oblicua

Signo de la función

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f(x)$	-	+	-	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$f'(x) = 3x^2 - 1$ $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = +\sqrt{\frac{1}{3}}$ y $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

	$(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(+\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- Crecimiento : $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}) \cup (+\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty)$
- Decrecimiento: $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{1}{3}})$
- Tenemos un mínimo en $(+\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{2\sqrt{3}}{9})$
- Tenemos un máximo en $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{9})$

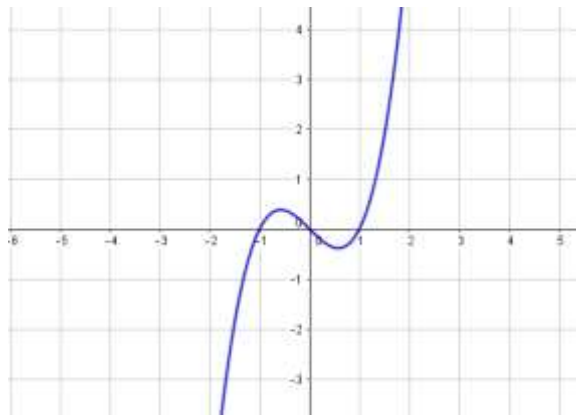
Concavidad

$$f''(x) = 6x \quad f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \quad x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+
Comportamiento de $f(x)$	$\cap$	$\cup$

- Cóncava hacia arriba: $(0, \infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0)$
- Punto de inflexión $(0, 0)$

Representación gráfica



$$2) f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

Simetrías

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 + (-x) - 1 = -x^3 - x^2 - x - 1 \quad f(-x) \neq f(x) \quad \text{No tiene simetría par}$$

$$f(-x) \neq -f(x) \quad \text{No tiene simetría impar}$$

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 1 \quad \text{El punto de corte será el (1,0)}$$

- Corte con el eje OY :

$$f(0) = (0)^3 - (0)^2 + 0 - 1 = -1 \quad \text{El punto de corte será el (0,-1)}$$

Asíntotas Verticales

No hay ya que el $D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$

Asíntota Horizontal

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2 + x - 1 = \infty$ No tiene asíntota horizontal.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x^2 + x - 1 = -\infty$

Asíntota Horizontal

No hay asíntota oblicua

Signo de la función

	$(-\infty, 1)$	$(1, 0)$
Signo de $f(x)$	-	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución real}$$

	$(-\infty, \infty)$
Signo $f'(x)$	+
Comportamiento de $f(x)$	↗

- Crecimiento : $(-\infty, \infty)$
- Decrecimiento: No hay
- No hay ni mínimo ni máximo

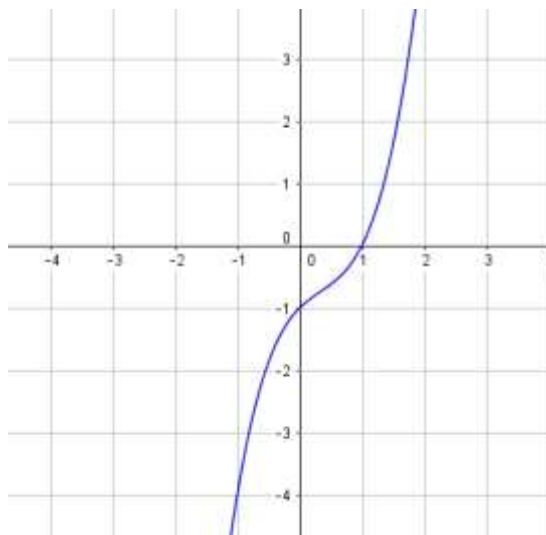
Concavidad

$$f''(x) = 6x - 2 \quad f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 2 = 0 \quad x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+
Comportamiento de $f(x)$	$\cap$	$\cup$

- Cóncava hacia arriba: $(\frac{1}{3}, \infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, \frac{1}{3})$
- Punto de inflexión $(\frac{1}{3}, -\frac{20}{27})$

Representación gráfica



3) $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$ (EBAU 2018 Septiembre)

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

Simetrías

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 - 12(-x) = -x^3 - x^2 + 12x$$

$$f(-x) \neq f(x) \text{ No tiene simetría par}$$

$$f(-x) \neq -f(x) \text{ No tiene simetría impar}$$

Puntos de corte con los ejes

$$\begin{aligned} \text{Con el eje OX} \rightarrow x^3 + x^2 - 12x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 & (-4, 0) \\ x_2 = 0 & (0, 0) \\ x_3 = 3 & (3, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Con el eje OY} \rightarrow f(0) = 0^3 + 0^2 - 12 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Asíntotas Verticales

No hay ya que el $D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$

Asíntota Horizontal

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + x^2 - 12x = \infty \quad \text{No tiene asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x^2 - 12x = -\infty$$

Asíntota Horizontal

No hay asíntota oblicua

Signo de la función

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $f(x)$	-	+	-	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 - \sqrt{148}}{6} = -2,36 \\ x_2 = \frac{-2 + \sqrt{148}}{6} = 1,69 \end{cases} \rightarrow \text{Posibles extremos relativos}$$

	$(-\infty, -2,36)$	$(-2,36; 1,69)$	$(1,69; \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-	+
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- Crecimiento: $(-\infty, -2,36) \cup (1,69, \infty)$
- Decrecimiento: $(-2,36; 1,69)$
- Máximo: $(-2,36; 20,75)$
- Mínimo: $(1,69; -12,6)$

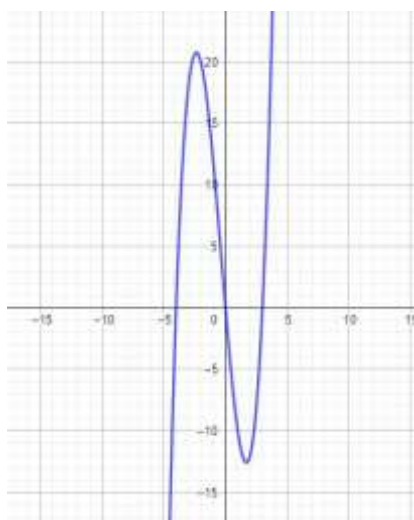
Concavidad

$$f''(x) = 6x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+
Comportamiento de $f(x)$	$\cap$	$\cup$

- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -\frac{1}{3})$
- Cóncava hacia arriba: $(-\frac{1}{3}, \infty)$
- Punto de Inflexión: $(-0,33; 4,07)$

Representación gráfica



- 4) PAU 2025 (Julio) Dada la función $f(x) = (x+2)(x-3)^2$
- a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función e indique los extremos relativos.
- b) Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)$ con los ejes coordenados. A continuación, represente gráficamente $f(x)$ señalando dichos puntos de corte y los extremos relativos.

$$f(x) = (x+2)(x-3)^2 \rightarrow f(x) = (x+2)(x^2 - 6x + 9) = x^3 + 2x^2 - 6x^2 - 12x + 9x + 18$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$$

a) Estudio de los intervalos de crecimiento, decrecimiento y extremos relativos (Monotonía)

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \quad D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Derivando e igualando a 0: } f'(x) = 3x^2 - 8x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

	$(-\infty, -1/3)$	$(-\frac{1}{3}, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-	+
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$\text{Crecimiento: } (-\infty, -1/3) \cup (3, \infty)$$

$$\text{Decrecimiento: } (-\frac{1}{3}, 3)$$

$$\text{Máximo: } (-1/3, 500/27) = (-0, \hat{3}, 18,52)$$

$$\text{Mínimo: } (3,0)$$

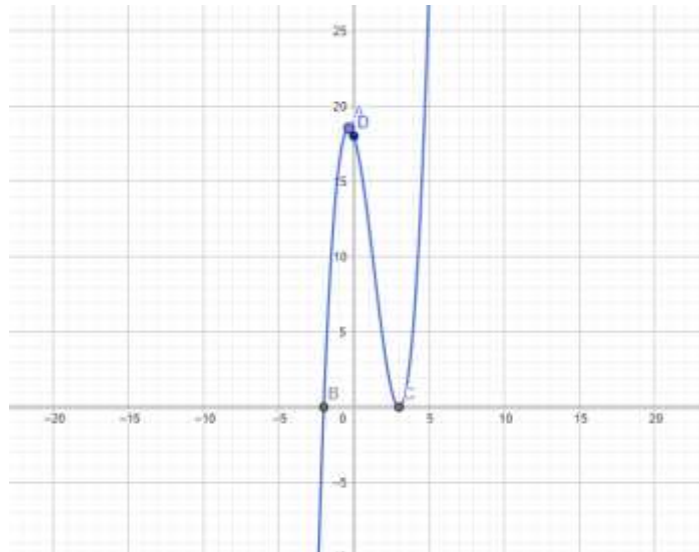
b) Puntos de corte con los ejes

- La función dada es $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

$$\text{Corte con el eje OX (y = 0): } x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{Puntos } (-2, 0) \text{ y } (3, 0)$$

$$\text{Corte con el eje OY (x = 0): } f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 18 = 18 \rightarrow \text{Punto } (0, 18)$$

c) Representación de la función



5) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2}$ (EBAU 2019 Junio)

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + (-x) - 2}{(-x) - 2} = \frac{x^2 - x - 2}{-x - 2} \quad f(-x) \neq f(x) \text{ No tiene simetría par}$$

$$f(-x) \neq -f(x) \text{ No tiene simetría impar}$$

Cortes con los ejes

- Con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2-x-2}{x-2} = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, 0) \\ (2, 0) \end{cases}$ (No existe la función)
- Con el eje Y : $x=0 \rightarrow f(0) = 1 \quad (0, 1)$

Asíntotas Verticales

Para $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-2}{x-2} = \frac{4}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \rightarrow \text{Calculamos los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+x-2}{x-2} = \frac{+}{0^-} = -\infty \rightarrow \text{Tenemos una Asíntota Vertical en } x=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x-2}{x-2} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Como el grado del numerador es igual que el grado del denominador, tendremos una Asíntota Horizontal.

Asíntota Oblicua: $y = mx+n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+x-2}{x-2}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-2}{x^2-2x} = 1 \quad \text{Asíntota oblicua: } y = x+3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-2}{x-2} - x = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-2-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{x-1} = 3$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - \text{Oblicua}$

$$g(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2} - (x+3) = \frac{x^2+x-2-x^2-2x-3x-6}{x-2} = \frac{4}{x-2}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x-2} = 0^+ \rightarrow$ La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x-2} = 0^- \rightarrow$ La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua

Monotonía

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{(2x+1) \cdot (x-2) - (1)(x^2+x-2)}{(x-2)^2} = \frac{(2x^2+x-4x-2)-x^2-x+2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow \text{Posibles Máximo o Mínimo (Extremos Relativos)}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-	-	+
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

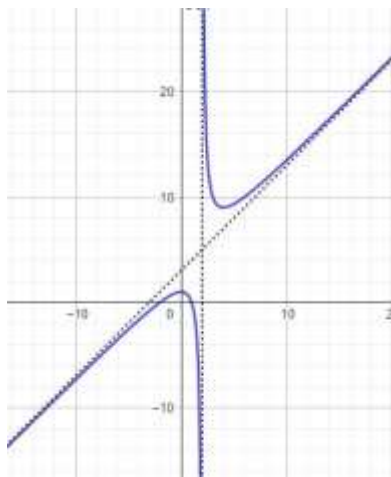
- Crecimiento: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
- Decrecimiento: $(0, 2) \cup (2, 4)$
- Mínimo en $x = 4$: $(4, 9)$
- Máximo en $x = 0$: $(0, 1)$

Concavidad

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)[(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x)]}{(x-2)^4} = \frac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow$ No hay puntos de Inflexión

Representación Gráfica:



$$6) y = f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2, 6\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 2(-x)^2}{(-x)^2 - 8(-x) + 12} = \frac{-x^3 - 2x^2}{x^2 + 8x + 12}$$

$f(-x) \neq f(x)$ No tiene simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$ No tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12} = 0 \rightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (0,0) \\ (2,0) \end{cases}$ (No existe la función)
- Con el eje Y: $x=0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

Asíntotas Verticales

Para $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2)}{x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{(x-6)} = \frac{4}{-4} = -1 \rightarrow \text{No tenemos una Asíntota Vertical en } x = 2$$

Para $x = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12} = \frac{144}{0} \left[\frac{k}{0} \right] \rightarrow \text{Calculamos los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \frac{+}{0^-} = -\infty \quad \text{Tenemos una Asíntota Vertical en } x = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Como el Grado del Numerador > Grado del Denominador $\rightarrow$ Tendremos una Asíntota

Asíntota Oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 - 8x^2 + 12x} = 1$$

Asíntota oblicua: $y = x + 6$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12} - x = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x^3 + 8x^2 - 12x}{x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 12x}{x^2 - 8x + 12} = 6$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - \text{Oblicua}$

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 8x + 12} - (x + 6) = \frac{x^3 - 2x^2 - x^3 + 8x^2 - 12x - 6x^2 + 48x - 72}{x^2 - 8x + 12} = \frac{36x - 72}{x^2 - 8x + 12}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x - 72}{x^2 - 8x + 12} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{36x - 72}{x^2 - 8x + 12} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua}$$

Monotonía

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x) \cdot (x^2 - 8x + 12) - (2x - 8)(x^3 - 2x^2)}{(x^2 - 8x + 12)^2} = \frac{3x^4 - 4x^3 - 24x^3 + 32x^2 + 36x^2 - 48x - 2x^4 + 8x^3 + 4x^3 - 16x^2}{(x^2 - 8x + 12)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{x^4 - 16x^3 + 52x^2 - 48x}{(x^2 - 8x + 12)^2} = \frac{x \cdot (x-2)^2 (x-12)}{(x-2)^2 \cdot (x-6)^2} = \frac{x(x-12)}{(x-6)^2} = \frac{x^2 - 12x}{(x-6)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 12x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 12 \end{cases} \rightarrow$$

Posibles Máximos o Mínimo (Extremos Relativos), exceptuando en $x=2$ que no se encuentra dentro del dominio de la función

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 6)$	$(6, 12)$	$(12, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-	-	-	+
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- Crecimiento: $(-\infty, 0) \cup (6, \infty)$
- Decrecimiento: $(0, 2) \cup (2, 6) \cup (6, 12)$
- Mínimo en $x = 4$: $(12, 24)$
- Máximo en $x = 0$: $(0, 0)$

Concavidad

$$f''(x) = \frac{(2x-12)(x-6)^2 - 2(x-6)(x^2-12x)}{(x-6)^4} = \frac{(x-6)[(2x-12)(x-6) - 2(x^2-12x)]}{(x-6)^4} = \frac{2x^2 - 12x - 12x + 72 - 2x^2 + 24x}{(x-6)^3} = \frac{72}{(x-6)^3}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow$ No hay puntos de Inflexión

Representación Gráfica:



$$7) y = f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8} \quad (\text{EBAU Junio 2022})$$

Se trata de una Función Racional, por lo tanto el dominio de la función existirá en todo $\mathbb{R}$ exceptuando los valores que anulan el denominador.

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-4}{2}$$

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-4, 2\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2 + 2(-x) - 24}{(-x)^2 + 2(-x) - 8} = \frac{2x^2 - 2x - 24}{x^2 - 2x - 8}$$

$f(-x) \neq f(x)$ No tiene simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$ No tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x) = 0$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

El punto de corte será el ~~$(-4, 0)$~~ (No está en el dominio)

El punto de corte será el $(3, 0)$

- Corte con el eje OY ($x = 0$):

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 24}{0^2 + 2 \cdot 0 - 8} = 3 \rightarrow$$

El punto de corte será el $(0, 3)$

Asíntotas Verticales:

Para $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8} = \frac{-12}{0} \left[\frac{k}{0} \right] \rightarrow \text{Calculamos los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{-}{0^-} = +\infty$$

Tenemos una Asíntota Vertical en $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

Para $x = -4$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2(x+4)(x-3)}{(x+4)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2(x-3)}{(x-2)} = \frac{7}{3} \rightarrow \text{No hay una Asíntota vertical en } x = -4$$

Como el Grado del Numerador = Grado del Denominador $\rightarrow$ Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = 2 \end{cases} \quad \text{Tenemos una Asíntota Horizontal en } y = 2$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A_{\text{Horizontal}}$

$$g(x) = \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} - (2) = \frac{2x^2+2x-24-2x^2-4x+16}{x^2+2x-8} = \frac{-2x-8}{x^2+2x-8}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x-8}{x^2+2x-8} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x-8}{x^2+2x-8} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

Asíntota Oblicua : No tiene asíntota oblicua.

Signo de la función

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $f(x)$	+	+	-	

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{(4x+2)(x^2+2x-8) - (2x+2)(2x^2+2x-24)}{(x^2+2x-8)^2} = \frac{2x^2+16x+32}{(x^2+2x-8)^2} \quad f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 + 16x + 32 = 0 \rightarrow x = -4$$

No sería un extremo relativo, ya que $x = -4$ no se encuentra dentro de mi dominio

$$\text{Si hubiéramos factorizado y simplificado nos quedaría: } f'(x) = \frac{2x^2+16x+32}{(x^2+2x-8)^2} = \frac{2(x+4)^2}{(x-2)^2(x+4)^2} = \frac{2}{(x-2)^2}$$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	+
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

- Crecimiento : $(-\infty, -4) \cup (-4, 2) \cup (2, \infty)$
- Decrecimiento: No hay
- No hay mínimo
- No hay máximo

Concavidad

$$f''(x) = \frac{(4x+16)(x^2+2x-8)^2 - 2(x^2+2x-8)(2x+2)(2x^2+16x+32)}{(x^2+2x-8)^4} = \frac{(x^2+2x-8)[(4x+16)(x^2+2x-8) - 2(2x+2)(2x^2+16x+32)]}{(x^2+2x-8)^4} =$$

$$\frac{-4x^3 - 48x^2 - 192x - 256}{(x^2+2x-8)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-4x^3 - 48x^2 - 192x - 256}{(x^2+2x-8)^3} \quad f''(x) = 0 \rightarrow x = -4$$

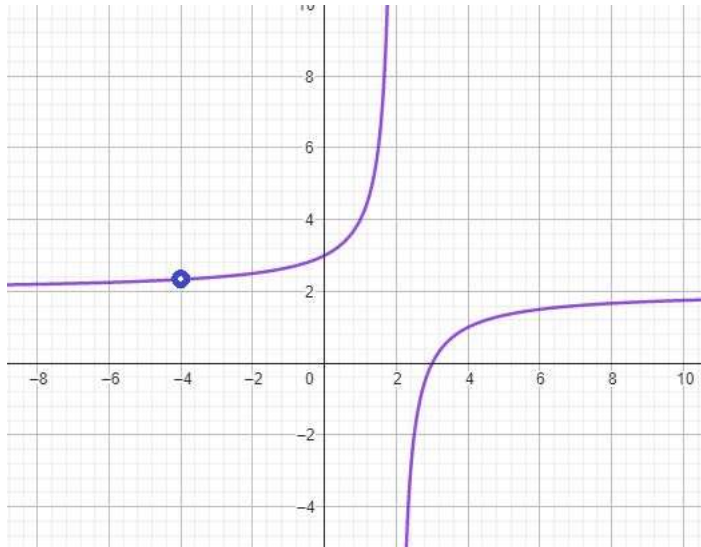
No sería un punto de inflexión, ya que $x = -4$ no se encuentra dentro de mi dominio

Si derivamos la función $f'(x)$ simplificada, nos quedaría $\rightarrow f''(x) = \frac{0 \cdot (x-2)^2 - 2(x-2) \cdot 2}{(x-2)^4} = \frac{-4(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{-4}{(x-2)^3}$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f''(x)$	+	+	-
Comportamiento de $f(x)$	U	U	∩

- Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -4) \cup (-4, 2)$
- Cóncava hacia abajo: $(2, \infty)$
- No hay puntos de inflexión

Representación gráfica



8) $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x - 1}$ (EBAU Junio 2014)

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + (-x) - 5}{(-x) - 1} = \frac{x^2 - x - 5}{-x - 1}$$

$f(-x) \neq f(x)$ No tiene simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$ No tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 + x - 5}{x - 1} = 0 \rightarrow x^2 + x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \end{cases} \rightarrow \left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}, 0 \right), \left(\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, 0 \right)$
- Con el eje Y: $x=0 \rightarrow f(0) = 5 \rightarrow (0, 5)$

Asíntotas Verticales:

Para $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 5}{x - 1} = \frac{-3}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \quad \text{Calculamos los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 5}{x - 1} = \frac{-}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 5}{x - 1} = \frac{-}{0^+} = -\infty \rightarrow$$

Tenemos una Asíntota Vertical en $x = 1$

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, tendremos una Asíntota Oblicua.

Asíntota Oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + x - 5}{x - 1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 5}{x^2 - x} = 1$$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 5}{x - 1} - x = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 5 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 5}{x - 1} = 2$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - \text{Oblicua}$

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x - 1} - (x + 2) = \frac{x^2 + x - 5 - x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{-x - 3}{x - 1}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x-1} = 0^- \rightarrow$ La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x-1} = 0^+ \rightarrow$ La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua

Monotonía

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)-1 \cdot (x^2+x-5)}{(x-1)^2} = \frac{(2x^2+x-2x-1)-(x^2+x-5)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow$ (No tiene solución real) $\rightarrow$ No tendrá ni máximos ni mínimos.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	+
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

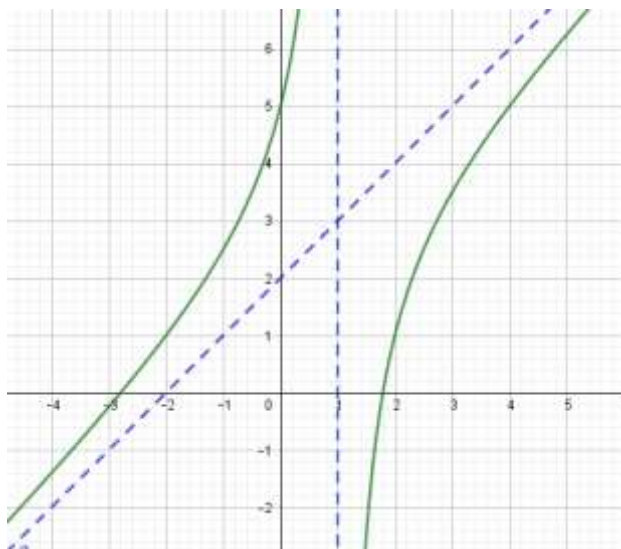
- Crecimiento: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
- Decrecimiento: No hay
- Máximos y Mínimos: No hay

Concavidad

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x+4)]}{(x-1)^4} = \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x-8}{(x-1)^3} = \frac{-6}{(x-1)^3}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow$ No hay puntos de Inflexión

Representación Gráfica:



$$9) y = f(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{2-(-x)} = \frac{x^2}{2+x}$$

$f(-x) \neq f(x)$ No tiene simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$ No tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

El punto de corte será el (0,0)

- Corte con el eje OY ($x = 0$) :

$$f(0) = \frac{0^2}{2+0} = 0 \rightarrow$$

El punto de corte será el (0,0)

Asíntotas Verticales:

Para $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{2-x} = \frac{4}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \quad \text{Calculamos los límites laterales:}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{2-x} &= \infty \\ \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{2-x} &= -\infty \end{aligned}$$

Tiene una asíntota vertical en $x=2$

Como el Grado del Numerador > Grado del denominador con una diferencia de un grado $\rightarrow$ tendremos una Asíntota Oblicua

Asíntota Horizontal

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2-x} &= -\infty \\ \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2-x} &= \infty \end{aligned}$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota Oblicua $y = mx+n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{2-x}}{\frac{x}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x-x^2} = -1$$

Asíntota oblicua: $y = -x-2$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2-x} + x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-x^2}{2-x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2-x} = -2$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Oblicua

$$g(x) = \frac{x^2}{2-x} - (-x-2) = \frac{x^2+2x-x^2+4-2x}{2-x} = \frac{4}{2-x}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2-x} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{2-x} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua}$$

Signo de la función

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f(x)$	+	+	-

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{2x(2-x)+x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -x^2+4x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ y } x = 4$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	+	-
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

- Crecimiento : $(0, 2) \cup (2, 4)$
- Decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
- Tenemos un mínimo en $(0, 0)$
- Tenemos un máximo en $(4, -8)$

Concavidad

$$f''(x) = \frac{(-2x+4)(2-x)^2 + 2(2-x)(-x^2+4x)}{(2-x)^4} = \frac{(2-x)[(-2x+4)(2-x) + 2(-x^2+4x)]}{(2-x)^4} = \frac{-4x+8+2x^2-4x-2x^2+8x}{(2-x)^3} = \frac{8}{(2-x)^3}$$

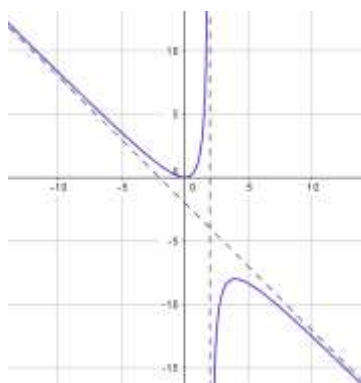
$$f''(x) = \frac{8}{(2-x)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \text{Sin solución}$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f''(x)$	+	-
Comportamiento de $f(x)$	U	$\cap$

- Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 2)$
- Cóncava hacia abajo: $(2, \infty)$
- No hay puntos de inflexión

Representación gráfica



$$10) y = f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{1-(-x)^2}{(-x)^2-4} = \frac{1-x^2}{x^2-4} \quad f(-x) = f(x) \text{ Tiene simetría par. Es simétrica respecto al eje Y.}$$

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4} = 0 \rightarrow 1-x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$
 Los puntos de corte serán : (-1,0) y (1,0)
- Corte con el eje OY :

$$f(0) = \frac{1-0^2}{0^2-4} = -\frac{1}{4} \rightarrow$$
 El punto de corte será el $(0, -\frac{1}{4})$

Asíntotas Verticales

Para $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-3}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \quad \text{Calculamos los límites laterales:}$$

- $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-}{0^+} = -\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-}{0^-} = +\infty$
- Tenemos una asíntota vertical en $x = -2$

Para $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-3}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \quad \text{Calculamos los límites laterales:}$$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-}{0^-} = \infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{-}{0^+} = -\infty$
- Tenemos una asíntota vertical en $x = 2$

Como el Grado del Numerador = Grado del Denominador $\rightarrow$ Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1$
- Tenemos una asíntota horizontal en $y = -1$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Horizontal

$$g(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4} - (-1) = \frac{1-x^2+x^2-4}{x^2-4} = \frac{-3}{x^2-4}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x^2-4} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^2-4} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

Asíntota Horizontal (No tiene asíntota oblicua).

Signo de la función

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f(x)$	-	+	-	+	-

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{-2x(x^2-4)-2x(1-x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{6x}{(x^2-4)^2} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x=0$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	-	+	+
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

- Crecimiento : $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
- Decrecimiento: $(0, 2) \cup (2, \infty)$
- Tenemos un mínimo en $(0, \frac{-1}{4})$

Concavidad

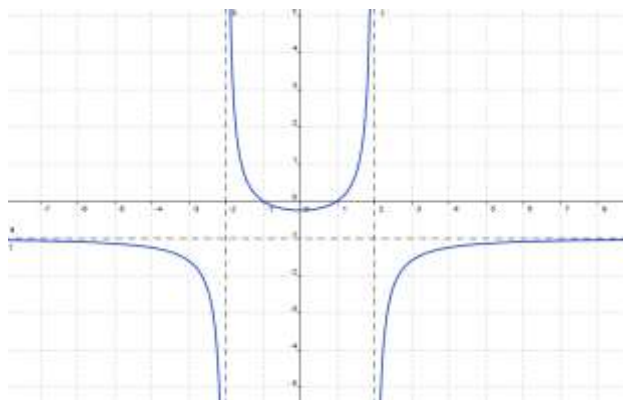
$$f''(x) = \frac{6(x^2-4)^2-24x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4} = \frac{(x^2-4)[6(x^2-4)-24x^2]}{(x^2-4)^4} = \frac{6x^2-24-24x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-18x^2-24}{(x^2-4)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow -18x^2-24=0 \rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+	-
Comportamiento de $f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

- Cóncava hacia arriba: $(-2, 2)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
- No hay punto de inflexión

Representación gráfica



$$11) y = f(x) = \frac{6x+12}{x+3}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-3\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{6(-x)+12}{(-x)+3} = \frac{-6x+12}{-x+3} \quad f(-x) \neq f(x) \quad \text{No presenta simetrías}$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{6x+12}{x+3} = 0 \rightarrow 6x+12=0 \rightarrow x = -2 \quad \text{El punto de corte será: } (-2,0)$$

- Corte con el eje OY :

$$f(0) = \frac{0+12}{0+3} = 4 \rightarrow y = 4 \quad \text{El punto de corte será el } (0,4)$$

Asíntotas Verticales

Para $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6x+12}{x+3} = \frac{-6}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \rightarrow \text{Calculamos los límites laterales:}$$

- $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{6x+12}{x+3} = \frac{-}{0^-} = \infty$ Tiene una asíntota vertical en $x = -3$
- $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{6x+12}{x+3} = \frac{-}{0^+} = -\infty$

Como el Grado del Numerador = Grado del Denominador $\rightarrow$ Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+12}{x+3} = 6$ Tiene una asíntota horizontal en $y=6$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x+12}{x+3} = 6$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A_{\text{Horizontal}}$

$$g(x) = \frac{6x+12}{x+3} - 6 = \frac{6x+12-6x-18}{x+3} = \frac{-6}{x+3}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+12}{x+3} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x+12}{x+3} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

Asíntota Horizontal No tiene asíntota oblicua.

Signo de la función

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, \infty)$
Signo de $f(x)$	+	-	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{6(x+3) - (6x+12)}{(x+3)^2} = \frac{6x+18-6x-12}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2} \quad f'(x) = 0 \rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	+
Comportamiento de $f(x)$	↗	↗

- Crecimiento : $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$
- No tiene ni máximos ni mínimos

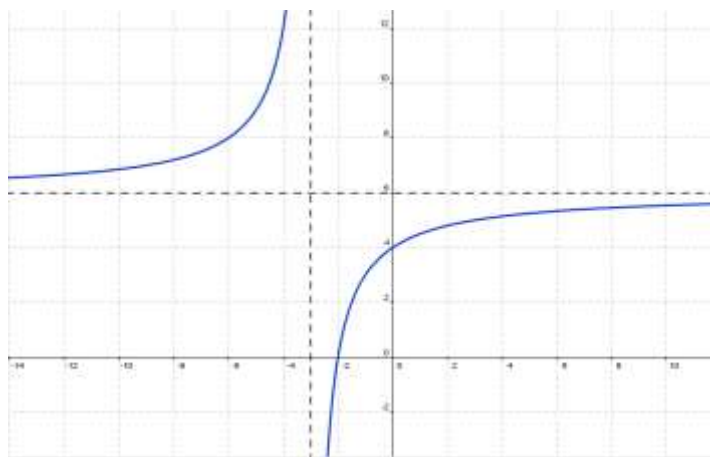
Concavidad

$$f''(x) = \frac{0(x+3)^2 - 2(x+3)6}{(x+3)^4} = \frac{-12(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{-12}{(x+3)^3} \quad f''(x) = 0 \rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, \infty)$
Signo de $f''(x)$	+	-
Comportamiento de $f(x)$	∪	∩

- Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -3)$
- Cóncava hacia abajo: $(-3, \infty)$
- No hay puntos de inflexión

Representación gráfica



$$12) y = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad f(-x) = f(x) \quad \text{Presenta simetría par}$$

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = 0 \rightarrow x^2+1=0 \rightarrow \text{No corta con el eje OX}$$
- Corte con el eje OY :

$$f(0) = \frac{0^2+1}{0^2-1} = -1 \quad \text{El punto de corte será el (0,-1)}$$

Asíntotas Verticales:

Para $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \rightarrow \text{Calculamos los límites laterales:}$$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{+}{0^+} = +\infty$ Tiene una asíntota vertical en $x = -1$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{+}{0^-} = -\infty$

Para $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right] \rightarrow \text{Calculamos los límites laterales:}$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{+}{0^-} = -\infty$ Tiene una asíntota vertical en $x = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{+}{0^+} = +\infty$

Como el Grado del Numerador = Grado del Denominador $\rightarrow$ Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$ Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Horizontal

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} - 1 = \frac{x^2+1-x^2-1}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2-1} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2-1} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

Asíntota Horizontal: No tiene asíntota oblicua.

Signo de la función

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f(x)$	+	-	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \quad f'(x) = 0 \rightarrow -4x=0 \rightarrow x=0$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	-	-
Comportamiento de $f(x)$	↗	↗	↘	↘

- Crecimiento : $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- Decrecimiento: $(0, 1) \cup (1, \infty)$
- Tenemos un máximo en $(0, -1)$

Concavidad

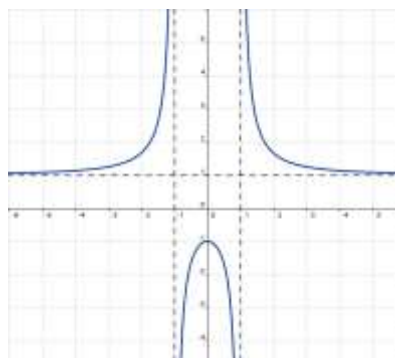
$$f''(x) = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x \cdot 2 \cdot (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{(x^2-1)[-4(x^2-1) + 4x \cdot 4 \cdot 2x]}{(x^2-1)^4} = \frac{-4x^2 + 4 + 16x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 + 4 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f''(x)$	+	-	+
Comportamiento de $f(x)$	U	∩	U

- Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-1, 1)$
- No hay punto de inflexión

Representación gráfica



$$13) y = f(x) = \frac{2x^2}{(2-x)^2}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{2x^2}{(2+x)^2}$$

$f(-x) \neq f(x)$ No tiene simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$ No tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(2-x)^2} = 0 \rightarrow 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{El punto de corte será el } (0,0)$$

- Corte con el eje OY :

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0^2}{(2-0)^2} = 0 \rightarrow \quad \text{El punto de corte será el } (0,0)$$

Asíntotas Verticales

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2}{(2-x)^2} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Tiene una asíntota vertical en $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2}{(2-x)^2} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Como el Grado del Numerador = Grado del Denominador $\rightarrow$ Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{(2-x)^2} = 2$$

Tiene una asíntota horizontal en $y=2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{(2-x)^2} = 2$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.\text{Horizontal}$

$$g(x) = \frac{2x^2}{(2-x)^2} - 2 = \frac{2x^2 - 2x^2 + 8x - 8}{(2-x)^2} = \frac{8x - 8}{(2-x)^2}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x - 8}{(2-x)^2} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x - 8}{(2-x)^2} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

Signo de la función

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f(x)$	+	+	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{4x \cdot (2-x)^2 - 2x^2 \cdot 2(2-x) \cdot (-1)}{(2-x)^4} = \frac{8x - 4x^2 + 4x^2}{(2-x)^3} = \frac{8x}{(2-x)^3} \quad f'(x) = 0 \rightarrow 8x = 0 \rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
Comportamiento de $f(x)$	↘	↗	↘

- Crecimiento : $(0, 2)$
- Decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
- Tenemos un mínimo en $(0, 0)$

Concavidad

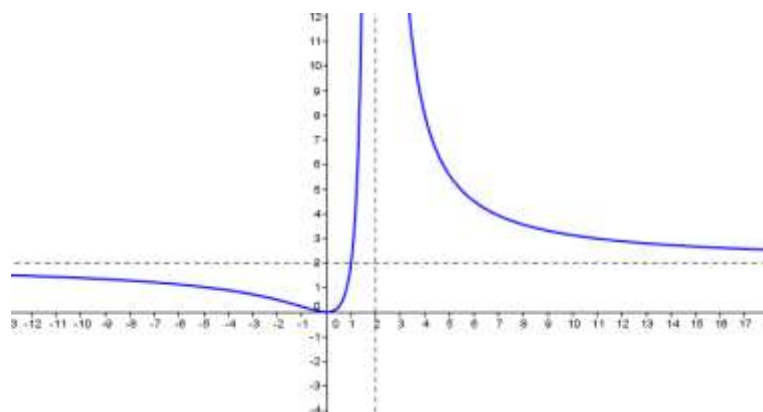
$$f''(x) = \frac{8(2-x)^3 - 8x \cdot 3 \cdot (2-x)^2 \cdot (-1)}{(2-x)^6} = \frac{16 - 8x + 24x}{(2-x)^4} = \frac{16x + 16}{(2-x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{16x + 16}{(2-x)^4} \quad f''(x) = 0 \rightarrow \frac{16x + 16}{(2-x)^4} = 0 \rightarrow 16x + 16 = 0 \rightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+	+
Comportamiento de $f(x)$	∩	∪	∪

- Cóncava hacia arriba: $(-1, 2) \cup (2, \infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -1)$
- Puntos de Inflexión: $\left(-1, \frac{2}{9}\right)$

Representación gráfica



$$14) Y = f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$$

Dominio

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

Simetrías

$$f(-x) = \frac{-6x}{x^2+1}$$

$f(-x) \neq f(x)$ No tiene simetría par

$f(-x) = -f(x)$ Tiene simetría impar

Cortes con los ejes

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{6x}{x^2+1} = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

El punto de corte será el (0,0)

- Corte con el eje OY :

$$f(0) = \frac{6 \cdot 0}{0^2+1} = 0 \rightarrow$$

El punto de corte será el (0,0)

Asíntotas Verticales No hay

Como el Grado del Numerador < Grado del Denominador $\rightarrow$ Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal

$$\begin{aligned} \square \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x^2+1} &= 0 \\ \square \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x^2+1} &= 0 \end{aligned}$$

Tiene una asíntota horizontal en $y=0$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.$ Horizontal

$$g(x) = \frac{6x}{x^2+1} - 0 = \frac{6x}{x^2+1}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x^2+1} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x^2+1} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

Asíntota Oblicua No hay

Signo de la función

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Signo de $f(x)$	-	+

Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{6(x^2+1)-2x \cdot 6x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^2+6-12x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2} \quad f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2+6=0 \rightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
Comportamiento de $f(x)$	↘	↗	↘

- Crecimiento : $(-1, 1)$
- Decrecimiento: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- Tenemos un mínimo en $(-1, -3)$
- Tenemos un máximo en $(1, 3)$

Concavidad

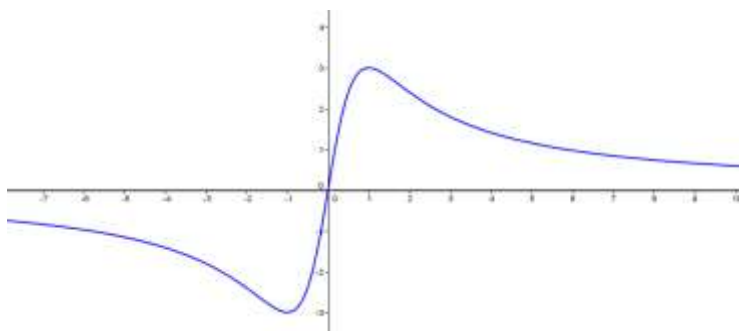
$$f''(x) = \frac{-12x(x^2+1)^2 - (-6x^2+6) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-12x^3-12x+24x^3-24x}{(x^2+1)^3} = \frac{12x^3-36x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{12x^3-36x}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow 12x^3-36x=0 \rightarrow x=0 \text{ e } x=\pm\sqrt{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+	-	+
Comportamiento de $f(x)$	∩	∪	∩	∪

- Cóncava hacia arriba: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
- Puntos de Inflexión: $(-\sqrt{3}, -2, 5)$
 $(0, 0)$
 $(\sqrt{3}, 2, 5)$

Representación gráfica



15) (PAU 2024 Junio) Dada la función $f(x) = \frac{2x^2+4x+2}{x-2}$

- a) Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY
- b) Identifique las asíntotas de la función
- c) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento

A. Calculamos el dominio de la función:

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

- Calculamos los puntos de corte con los ejes:
 - Con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^2+4x+2}{x-2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \quad (-1, 0)$
 - Con el eje Y : $x=0 \rightarrow f(0) = -1 \quad (0, -1)$

B. Calculamos las asíntotas:

Asíntota Vertical

- Para $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} = \frac{18}{0} \rightarrow \left[\begin{matrix} k \\ o \end{matrix} \right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} = \frac{+}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} = \frac{+}{0^+} = +\infty \rightarrow$$

Tenemos una **Asíntota Vertical** en $x = 2$

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, tendremos una Oblicua

Asíntota Oblicua

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2+4x+2}{x-2}}{x} = \left[\begin{matrix} \infty \\ \infty \end{matrix} \right] \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4x+2}{x^2-2x} = 2$$

Asíntota oblicua: $y = 2x + 8$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4x+2}{x-2} - 2x = \left[\begin{matrix} \infty \\ \infty \end{matrix} \right] \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4x+2-2x^2+4x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x+2}{x-2} = 8$$

C. Monotonía

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

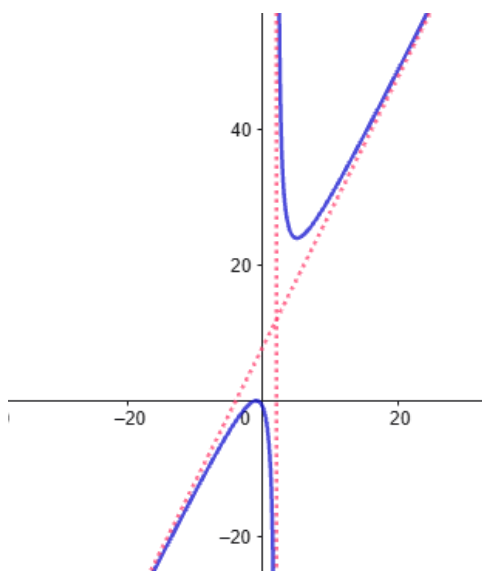
$$f'(x) = \frac{(4x+4) \cdot (x-2) - (1)(2x^2+4x+2)}{(x-2)^2} = \frac{4x^2+4x-8x-8-2x^2-4x-2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases} \rightarrow \text{Posibles Máximos o Mínimos}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-	-	+
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- Crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$
- Decrecimiento: $(-1, 2) \cup (2, 5)$
- Mínimo en $x=5$: $(5, 24)$
- Máximo en $x=-1$: $(-1, 0)$

Representación gráfica



FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

14) (PAU 2026) Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x-4)^2 - 4 & \text{si } x \leq 6 \\ 16 - (x-10)^2 & \text{si } x > 6 \end{cases}$ Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)$ con los ejes coordenados y realice un esbozo de la misma.

$$f(x) = \begin{cases} (x-4)^2 - 4 & \text{si } x \leq 6 \\ 16 - (x-10)^2 & \text{si } x > 6 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 12 & \text{si } x \leq 6 \\ -x^2 + 20x - 84 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

Puntos de corte con los ejes

- La función dada es $f(x) = x^2 - 8x + 12$

Corte con el eje 0X ($y = 0$): $x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 6 \end{cases}$ Puntos (2, 0) y (6, 0)

Corte con el eje 0Y ($x = 0$): $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 12 = 12 \rightarrow$ Punto (0, 12)

- La función dada es $f(x) = -x^2 + 20x - 84$

Corte con el eje 0X ($y = 0$): $-x^2 + 20x - 84 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 14 \end{cases}$ Puntos (6, 0) y (14, 0)

Corte con el eje 0Y ($x=0$): $f(0) = 0^2 - 20 \cdot 0 - 84 = -84$ Punto (0, -84)

Monotonía

- $f(x) = x^2 - 8x + 12$ (Azul)

Derivando e igualando a 0: $f'(x) = 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4$

	$(-\infty, 4)$	$(4, \infty)$
Signo de $f'(x)$	-	+
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Crecimiento: $(4, \infty)$

Decrecimiento: $(-\infty, 4)$

Máximo: no hay

Mínimo: $(4, -4)$

- $f(x) = -x^2 + 20x - 84$ (Verde)

Derivando e igualando a 0: $f'(x) = -2x + 20 = 0 \rightarrow x = 10$

	$(-\infty, 10)$	$(10, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Crecimiento: $(-\infty, 10)$

Decrecimiento: $(10, \infty)$

Máximo: $(10, 16)$

Mínimo: no hay

Representación de la función definida a trozos

Al representar una función definida a trozos, es fundamental prestar especial atención a los intervalos en los que está definida cada parte.

En este caso, la función polinómica $y = x^2 - 8x + 12$ está definida en el intervalo $(-\infty, 6]$. Por tanto, debemos calcular el valor de la función en $x=6$, ya que este punto pertenece a su dominio. Sustituyendo:

$$f(6) = 6^2 - 8 \cdot 6 + 12 = 0$$

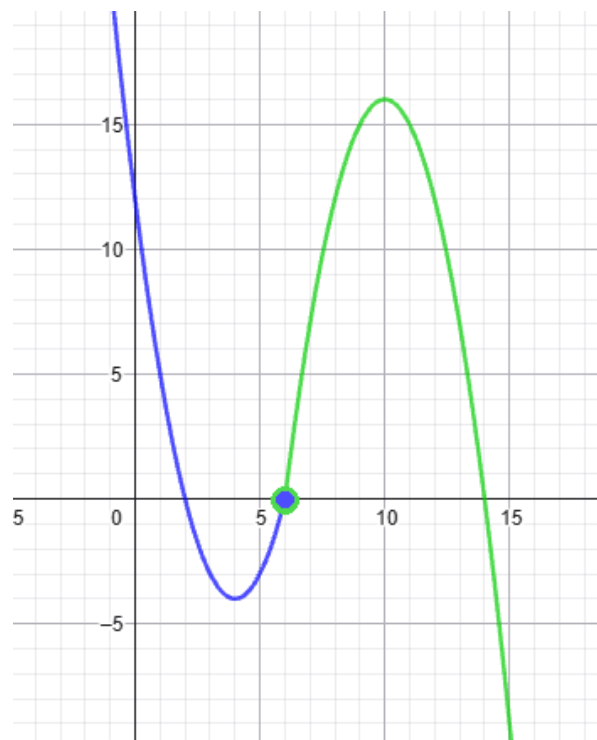
Esto significa que la gráfica llega hasta el punto $(6, 0)$ y dicho punto se representa cerrado.

Por otro lado, la función polinómica $y = -x^2 + 20x - 84$ está definida en el intervalo $(6, \infty)$. En este caso, aunque podemos calcular su valor en $x=6$

$$f(6) = -6^2 + 20 \cdot 6 - 84 = 0$$

este punto no pertenece a su dominio, ya que la función comienza para valores estrictamente mayores que 6. Por tanto, el punto $(6, 0)$ se representaría abierto en la gráfica.

En conclusión, al representar la función debemos marcar un punto cerrado en $(6, 0)$ y un punto abierto en $(6, 0)$, respetando los intervalos de definición de cada tramo.



15) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{si } x \leq 4 \\ x^2 - 9x + 21 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ Representa gráficamente la función y determine máximos y mínimos relativos, si los hubiere, así como el crecimiento y decrecimiento.

Realizamos el análisis de la función $f(x) = \frac{1}{x-3}$ que está definida entre $(-\infty, 4]$

a) Calculamos el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \rightarrow D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

b) Calculamos los puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{x-3} = 0 \rightarrow 1 \neq 0 \rightarrow$ la función no corta con el eje X
- Con el eje Y: $x=0 \rightarrow f(0) = -\frac{1}{3} \rightarrow \left(0, -\frac{1}{3}\right)$

c) Calculamos las asíntotas:

Asíntota Vertical

Para $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0} \rightarrow \left[\begin{matrix} k \\ o \end{matrix} \right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{+}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

Tenemos una **Asíntota Vertical en $x=3$**

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, tendremos una Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-3} = 0$$

Tenemos una **Asíntota horizontal en $y=0$**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-3} = 0$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Horizontal:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.\text{Horizontal}$

$$g(x) = \frac{1}{x-3} - 0 = \frac{1}{x-3}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-3} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-3} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Horizontal}$$

d) **Monotonía**

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x-3) - (1)(1)}{(x-3)^2} = \frac{-1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x-3)^2} = 0 \rightarrow -1 \neq 0 \rightarrow \text{No hay extremos relativos}$$

	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $f'(x)$	-	-
Comportamiento de $f(x)$	↘	↘

- Crecimiento: No hay
- Decrecimiento: $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$
- Mínimo: no hay
- Máximo: no hay

Realizamos el análisis de la función $f(x) = x^2 - 9x + 21$ que está definida entre $(4, \infty)$

a) **Calculamos el dominio de la función**

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

b) **Cortes con los ejes**

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = x^2 - 9x + 21 = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \text{No corta con el eje X}$$

- Corte con el eje OY : $x = 0$

$$f(0) = (0)^2 - 9 \cdot 0 + 21 = 21 \quad \text{El punto de corte será el } (0, 21)$$

c) **Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)**

$$f'(x) = 2x - 9 \quad f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{9}{2} \rightarrow \text{Presenta un extremo relativo}$$

	$(-\infty, \frac{9}{2})$	$(\frac{9}{2}, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	+
Comportamiento de $f(x)$	↘	↗

- Crecimiento : $(\frac{9}{2}, \infty)$
- Decrecimiento : $(-\infty, \frac{9}{2})$
- Máximo: no hay
- Tenemos un mínimo en : $(\frac{9}{2}, \frac{3}{4})$

Representación de la función definida a trozos

Al representar una función definida a trozos, es fundamental prestar especial atención a los intervalos en los que está definida cada parte.

En este caso, la función racional $y = \frac{1}{x-3}$ está definida en el intervalo $(-\infty, 4]$. Por tanto, debemos calcular el valor de la función en $x=4$, ya que este punto pertenece a su dominio. Sustituyendo:

$$f(4) = \frac{1}{4-3} = 1$$

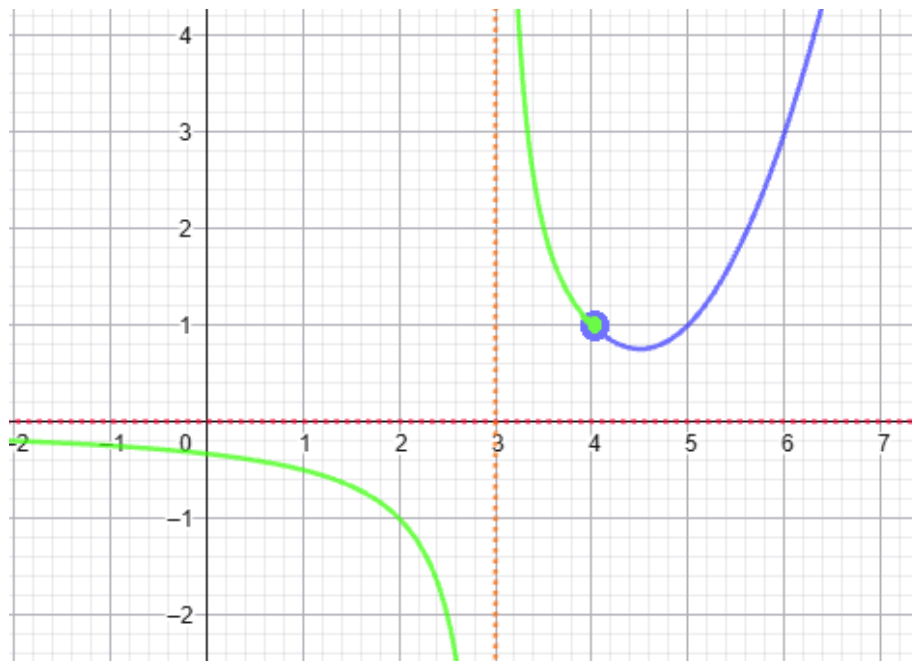
Esto significa que la gráfica llega hasta el punto $(4, 1)$ y dicho punto se representa cerrado.

Por otro lado, la función polinómica $y = x^2 - 9x + 21$ está definida en el intervalo $(4, \infty)$. En este caso, aunque podemos calcular su valor en $x=4$

$$f(4) = 4^2 - 9 \cdot 4 + 21 = 1$$

este punto no pertenece a su dominio, ya que la función comienza para valores estrictamente mayores que 4. Por tanto, el punto $(4, 1)$ se representaría abierto en la gráfica.

En conclusión, al representar la función debemos marcar un punto cerrado en $(4, 1)$ y un punto abierto en $(4, 1)$, respetando los intervalos de definición de cada tramo.



16) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x} & \text{si } x \leq 4 \\ 2x - \frac{x^2}{2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$ Representa gráficamente la función y determine máximos y mínimos relativos, si los hubiere, así como el crecimiento y decrecimiento.

Realizamos el análisis de la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x}$ que está definida entre $(-\infty, 4]$

a) **Calculamos el dominio de la función:**

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x} \rightarrow D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

b) **Calculamos los puntos de corte con los ejes:**

- Con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2-4}{x} = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = +2 \end{cases}$ Puntos (-2, 0) y (2, 0)
- Con el eje Y : $x=0 \rightarrow \nexists f(0) \rightarrow$ no corta con el eje Y

c) **Calculamos las asíntotas:**

Asíntota Vertical

Para $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-4}{x} = \frac{-4}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-4}{x} = \frac{-}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-4}{x} = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

Tenemos una **Asíntota Vertical en $x = 0$**

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, tendremos una Asíntota Oblicua

Asíntota Oblicua $y = mx+n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-4}{x}}{\frac{x}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{x^2} = 1 \quad \text{Asíntota oblicua: } y = x$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4-x^2}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{x} = 0$$

Posición de la Función con respecto a la Asíntota Oblicua:

Calculamos la función $g(x) = f(x) - A.\text{Oblicua}$

$$g(x) = \frac{x^2-4}{x} - (x) = \frac{x^2-4-x^2}{x} = \frac{-4}{x}$$

Calculamos los límites cuando tienden a $\pm \infty$ de la función $g(x)$:

Ambos límites van a tender a 0. Lo que nos interesa es el signo, por lo tanto sustituimos por $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{x} = 0^- \rightarrow \text{La función se encuentra por debajo de la Asíntota Oblicua}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x} = 0^+ \rightarrow \text{La función se encuentra por encima de la Asíntota Oblicua}$$

d) **Monotonía**

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x) - (1)(x^2 - 4)}{(x)^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 + 4 = 0 \rightarrow \text{No hay extremos relativos}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Signo de $f'(x)$	+	+
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

- Crecimiento: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- Decrecimiento:
- Mínimo: no hay
- Máximo: no hay

Realizamos el análisis de la función $f(x) = 2x - \frac{x^2}{2}$ que está definida entre $(4, \infty)$

a) **Calculamos el dominio de la función**

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

b) **Cortes con los ejes**

- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x)=2x - \frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow \frac{4x - x^2}{2} = 0 \rightarrow 4x - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{Puntos } (0, 0) \text{ y } (4, 0)$$
- Corte con el eje OY : $x = 0$

$$f(0) = 2 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} = 0 \quad \text{El punto de corte será el } (0,0)$$

c) **Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)**

$$f'(x) = 2 - \frac{2x}{x} = 2 - x \quad f'(x) = 0 \rightarrow 2 - x = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{Presenta un extremo relativo}$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	-
Comportamiento de $f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

- Crecimiento : $(-\infty, 2)$
- Decrecimiento: $(2, \infty)$
- Máximo: $(2, 2)$
- Mínimo: no hay

Representación de la función definida a trozos

Al representar una función definida a trozos, es fundamental prestar especial atención a los intervalos en los que está definida cada parte.

En este caso, la función racional $y = \frac{x^2 - 4}{x}$ está definida en el intervalo $(-\infty, 4]$. Por tanto, debemos calcular el valor de la función en $x=4$, ya que este punto pertenece a su dominio. Sustituyendo:

$$f(4) = \frac{4^2 - 4}{4} = 3$$

Esto significa que la gráfica llega hasta el punto $(4, 3)$ y dicho punto se representa cerrado.

Por otro lado, la función polinómica $y = 2x - \frac{x^2}{2}$ está definida en el intervalo $(4, \infty)$. En este caso, aunque podemos calcular su valor en $x=4$

$$f(4) = 2 \cdot 4 - \frac{4^2}{2} = 0$$

este punto no pertenece a su dominio, ya que la función comienza para valores estrictamente mayores que 4. Por tanto, el punto $(4, 0)$ se representaría abierto en la gráfica.

En conclusión, al representar la función debemos marcar un punto cerrado en $(4, 3)$ y un punto abierto en $(4, 0)$, respetando los intervalos de definición de cada tramo.

